EXAMEN MATHÉMATIQUES IMAC 1
6 décembre 2007

Calculatrice non autorisée.

EXERCICE 1 (/3*) : Mettre sous forme carthésienne $(x+jy)$ les nombres complexes $z_1 = \left(1+j\sqrt{3}\right)^8$ et $z_2 = \frac{2+j}{5-j}$.

EXERCICE 2 (/4*) : Calculer les coefficients de Fourrier de la fonction définie par $f(t) = \sin(3t)\cos^2(2t)$.

EXERCICE 3 (/3*) : Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$.

PROBLÈME (/10*) : On regarde l'ensemble

$$E = \left\{\text{suites } (u_n)_{n\geq 1} \text{ à valeurs réelles telles que } u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1}\right\}.$$

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. Trouver un nombre réel r tel que la suite $u_n = r^n$ soit dans E. Vérifier que, pour cette valeur de n, la suite $v_n = n \cdot r^n$ est aussi dans E. Les suites u et v sont-elles des vecteurs indépendants de E ?
3. On admet qu'il existe deux suites w_n et x_n dans E telles que $w_0 = x_1 = 0$ et $w_1 = x_0 = 1$. Soit z une suite de E. Montrer par récurrence que
$$\forall n \geq 0, z_n = z_0 \cdot x_n + z_1 \cdot w_n.$$
4. En déduire que l'on ne peut pas trouver 3 vecteurs indépendants dans E. Quelle est la dimension de E ?
5. Soit t la suite de E avec $t_0 = t_1 = 1$. Exprimer t_n en fonction de n.

EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE (donne l'autorisation de sortir avant la fin des 2 heures) : Calculer
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt.$$

* Le barème est suceptible d'être modifié sans préavis.