Annexe
Démonstration du théorème de Choquet

L'outil principal est le théorème de Riesz. On va donc construire une forme linéaire $m \in C(X)^\star$ et considérer la mesure signée μ telle que :

$$\forall g \in C(X), \int g d\mu = m(g)$$

$$\mu \xleftarrow{\text{th. de Riesz}} m$$

mesure signée sur X	forme linéaire sur $C(X)$
On voudrait que μ vérifie :	On va donc construire m tel que :
$\forall g$ restriction à X d'une forme linéaire, $\mu(g) = g(x_0)$ $\mu(1) = 1$	$\forall g \in A, m(g) = g(x_0)$
μ mesure positive	m forme linéaire positive En particulier, $\forall f \in C(X)$, si $h \in A$ et $h \geq f$, $h(x_0) \geq m(f)$
μ portée par les points extrémaux	? ? ? solution : associer à f str. convexe $\bar{f}(x_0) = \inf\{h(x_0), h \in A \text{ et } h \geq f\}$

Etapes de la démonstration :

1. Prolonger n : $\begin{array}{rcl} A + \mathbb{R}f & \to & \mathbb{R} \\ h + rf & \mapsto & h(x_0) + r\bar{f}(x_0) \end{array}$, majoré par p : $\begin{array}{rcl} C(X) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \bar{g}(x_0) \end{array}$

2. Positivité de m : $-m(g) = m(-g) \leq \overline{(-g)}(x_0) \leq 0$
   Continuité de m : $-||g|| = m(-||g||) \leq m(g) \leq m(||g||) = ||g||$

3. μ est portée par les points extrémaux car $\mu(\bar{f}) \leq \bar{f}(x_0) = \mu(f)$.
   En effet, $\forall h \in A$, tel que $h \geq f$, $h \geq \bar{f}$ et donc :

$$h(x_0) = m(h) = \mu(h) \geq \mu(\bar{f})$$

Justification de l'utilisation d'une fonction convexe

Cas de la dimension 1

$$I = [a; b], x = \lambda a + (1 - \lambda) b \text{ est représenté par } \mu = \lambda \varepsilon_a + (1 - \lambda) \varepsilon_b.$$

Regardons quelle doit être la valeur $y = m(f)$ dans ce cas là.

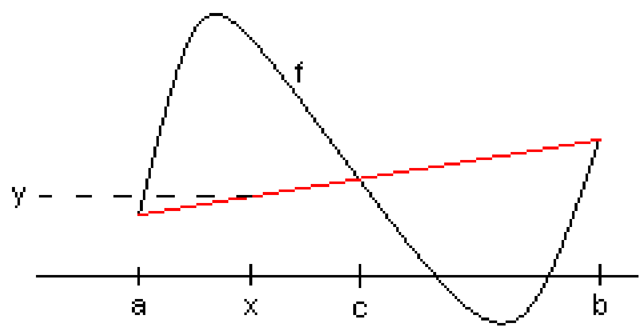

FIG. 1 – f quelconque

Ici, il existe une mesure μ de probabilité portée par $\{a, c\} \nsubseteq exI$ telle que $g \mapsto \int_I g d\mu$ soit un prolongement de $\begin{array}{ccc} A + \mathbb{R}f & \to & \mathbb{R} \\ h + rf & \mapsto & h(x_0) + ry \end{array}$

Ce n'est pas le cas si f est strictement convexe.

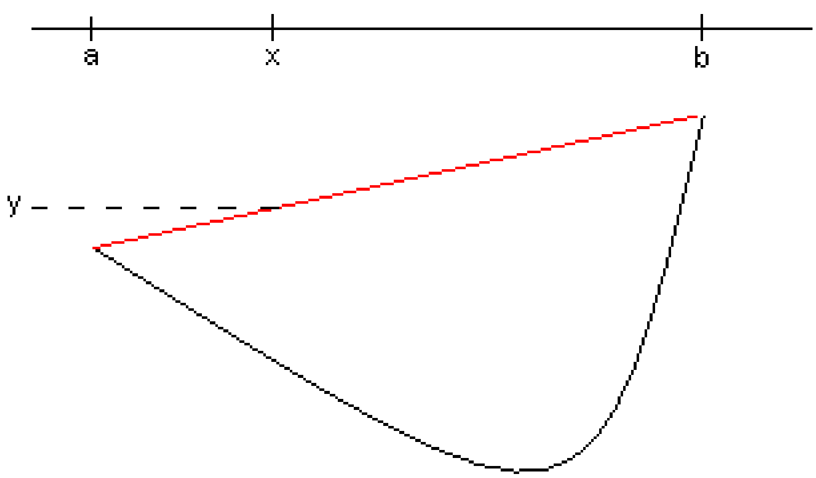

FIG. 2 – f strictement convexe