Estimation du Noyau de Transition d'un Processus Markovien Déterministe par Morceaux

Romain Azaïs

Université de Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR CNRS 5251 et INRIA Bordeaux – Sud-Ouest, Équipe CQFD, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence.

romain.azais@inria.fr

Résumé. Les processus markoviens déterministes par morceaux sont une classe générale de processus stochastiques non diffusifs, faisant intervenir des trajectoires déterministes ponctuées par des sauts aléatoires. Cette classe de modèles stochastiques couvre un grand nombre d'applications, en biologie (mécanisme de production d'un antibiotique par une bactérie) ou en fiabilité (propagation de fissure). Dans ce cadre, on propose d'estimer de manière non paramétrique et récursive le noyau de transition d'un tel processus à partir de l'observation d'une trajectoire en temps long. On montre la consistance de l'estimateur considéré. Des simulations illustrent les résultats asymptotiques.

Mots-clés. Processus markoviens déterministes par morceaux, Estimation non paramétrique, estimateur récursif, noyau de transition.

Abstract. Piecewise-deterministic Markov processes are a general class of non-diffusion stochastic models involving deterministic motion punctuated by random jumps. An appropriate choice of the state space and the main characteristics of the process covers a large variety of models covering problems in biology (mechanism behind antibiotic released by a bacteria) or in reliability (crack propagation). In this context, we propose a recursive nonparametric estimator of the transition kernel of such a process from one observation within a long time. We state a result of consistency. A simulation study illustrates the good asymptotic behavior of our estimator.

Keywords. Piecewise-deterministic Markov processes, Nonparametric estimation, Recursive estimator, Transition kernel.

1 Introduction

On considère un processus markovien déterministe par morceaux dont l'espace d'état est $\mathbf{R}^d$, où d est un entier supérieur ou égal à 1. Le processus évolue dans un sous-ensemble ouvert E de $\mathbf{R}^d$, muni de la norme euclidienne notée $|\cdot|$. Le comportement au cours du temps du processus est décrit par trois caractéristiques (λ, Q, Φ).

- $\Phi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$ est le flot déterministe. Il satisfait,
$$\forall \xi \in \mathbf{R}^d,\ \forall s, t \in \mathbf{R},\ \Phi_\xi(t+s) = \Phi_{\Phi_\xi(t)}(s).$$
Pour tout $\xi \in E$, $t^+(\xi)$ désigne le temps déterministe de sortie de E,
$$t^+(\xi) = \inf\{t > 0\ :\ \Phi_\xi(t) \in \partial E\},$$
avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.

- $\lambda : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}_+$ est le taux de saut du processus. Il s'agit d'une fonction mesurable qui vérifie,
$$\forall \xi \in \mathbf{R}^d,\ \exists \varepsilon > 0,\ \int_0^\varepsilon \lambda\big(\Phi_\xi(s)\big)\mathrm{d}s < +\infty.$$

- Q est un noyau de Markov sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ qui vérifie,
$$\forall\ \xi \in \overline{E},\ Q(\xi, \overline{E} \setminus \{\xi\}) = 1 \quad \text{et} \quad Q(\xi, E) = 1.$$

Partant d'un point $x \in E$, l'évolution du processus peut être décrite comme suit. T_1 est une variable aléatoire positive dont la fonction de survie est donnée, pour tout $t \geq 0$, par
$$\mathbf{P}(T_1 > t | X_0 = x) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\Phi_x(s))\mathrm{d}s\right)\mathbf{1}_{\{0 \leq t < t^+(x)\}}.$$
On choisit ensuite une variable aléatoire Z_1 à valeurs dans E selon la loi $Q(\Phi_x(T_1), \cdot)$. Entre les instants 0 et T_1, le processus évolue selon
$$X_t = \left\{ \begin{array}{cl} \Phi_x(t) & \text{pour } 0 \leq t < T_1, \\ Z_1 & \text{pour } t = T_1. \end{array} \right.$$
Partant de X_{T_1}, le temps $S_2 = T_2 - T_1$ et la position Z_2 sont générés selon la même méthode que précédemment, et ainsi de suite. On obtient ainsi un processus markovien dont la suite des instants de saut est notée (T_k), avec $T_0 = 0$ par convention. On considère souvent la chaîne immergée (Z_n, S_n) associée au processus (X_t), où Z_n est la position lors du $n^{\text{ème}}$ saut ($Z_n = X_{T_n}$) et $S_n = T_n - T_{n-1}$ est la durée entre le $n^{\text{ème}}$ et le $(n-1)^{\text{ème}}$ saut, avec $S_0 = 0$. La chaîne immergée (Z_n, S_n) contient tout l'aléa du processus à temps continu (X_t). On peut diriger le lecteur intéressé vers [2] pour de nombreuses précisions sur les processus markoviens déterministes par morceaux.

Dans tout ce travail, on suppose que le noyau Q admet une densité q par rapport à la mesure de Lebesgue. Notre objectif principal est l'estimation de cette fonction à partir de l'observation d'une trajectoire en temps long de la chaîne (Z_n, S_n) du processus. Il existe de nombreux travaux portant sur l'estimation du noyau de transition d'une chaîne de Markov, notamment [3, 4, 5, 6]. Le cadre de travail des processus markoviens déterministes par morceaux et celui des chaînes de Markov sont différents : la structure particulière des chaînes immergées du processus impose un traitement spécifique du problème d'estimation. Ce travail a fait l'objet de [1] soumis pour publication.

2 Estimation récursive

Afin de définir notre estimateur, on considère le processus à temps discret (Z_n^-) défini par,

$$\forall n \geq 1, \; Z_n^- = \Phi_{Z_{n-1}}(S_n).$$

Il est naturel de considérer cette suite puisque le noyau Q décrit les transitions de Z_n^- vers Z_n. On peut montrer que la suite (Z_n^-) est une chaîne de Markov homogène dont on peut calculer le noyau de transition.

Notre objectif ici est de donner un estimateur récursif de la quantité $q(x, y)$ pour tous x, y dans E. L'estimateur récursif de $q(x, y)$ que nous proposons peut s'écrire comme suit,

$$\widehat{q}_n(x, y) = \frac{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{w_j^{2d}} K\left(\frac{Z_j^- - x}{w_j}\right) K\left(\frac{Z_j - y}{w_j}\right)}{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{v_j^d} K\left(\frac{Z_j^- - x}{v_j}\right)},$$

où $w_j = w_1 j^{-\beta}$, $v_j = v_1 j^{-\alpha}$, avec $\alpha, \beta > 0$, et K est un noyau continu dont le support est compact. Cet estimateur s'écrit comme le rapport $\widehat{h}_n(x, y)/\widehat{p}_n(x)$ où $\widehat{h}_n(x, y)$ estime la partie à densité $h(x, y)$ de la loi invariante de la chaîne de Markov (Z_n^-, Z_n), alors que $\widehat{p}_n(x)$ estime la partie à densité $p(x)$ de la loi invariante de la chaîne de Markov (Z_n^-).

En utilisant des techniques de martingales à temps discret, notamment la loi forte des grands nombres pour les martingales, on montre que $\widehat{p}_n(x)$ converge presque sûrement vers $p(x)$ lorsque $\alpha d < 1$. La difficulté majeure dans ce travail intervient lorsqu'on cherche à montrer la convergence de $\widehat{h}_n(x, y)$ vers la quantité $h(x, y)$. La chaîne de Markov (Z_n^-, Z_n) admet une structure particulière : sa loi invariante est à densité sur l'intérieur de l'espace d'état, mais pas son noyau de transition. En effet, la position juste avant le saut est distribuée sur la courbe définie par le flot déterministe initialisée en la position lors du saut précédent. Cela nous oblige à proposer une nouvelle approche pour étudier le comportement asymptotique de l'estimateur de cette loi invariante. La méthode proposée est plus universelle (elle permet d'obtenir la convergence presque sûre sans que le noyau soit à densité sur l'intérieur de l'espace), mais plus restrictive sur l'allure de la fenêtre de lissage. Précisément, on montre que $\widehat{h}_n(x, y)$ converge presque sûrement vers $h(x, y)$ lorsque $8\beta d < 1$. Finalement, notre résultat de consistance est donné dans le théorème qui suit.

Théorème 2.1. *Si la chaîne de Markov (Z_n^-) est ergodique et sous des hypothèses de Lipschitz portant sur les caractéristiques locales du processus, lorsque $p(x) > 0$, $\alpha d < 1$ et $8\beta d < 1$,*

$$\widehat{q}_n(x, y) \xrightarrow{p.s.} q(x, y), \quad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini.}$$

3 Illustration numérique

On considère un PDMP (X_t) défini sur l'espace d'état $E =]0,1[$ et partant de $X_0 = 0.5$. Le flot Φ est donné par $\Phi_x(t) = x + t$ pour tous $x \in E$ et $t \in \mathbf{R}$. De plus, le taux de saut λ est choisit constant égal à une constante C_1. Finalement, pour $x \in \overline{E}$, $Q(x,\cdot)$ est la loi exponentielle de paramètre $C_2 + x$ restreinte à E.

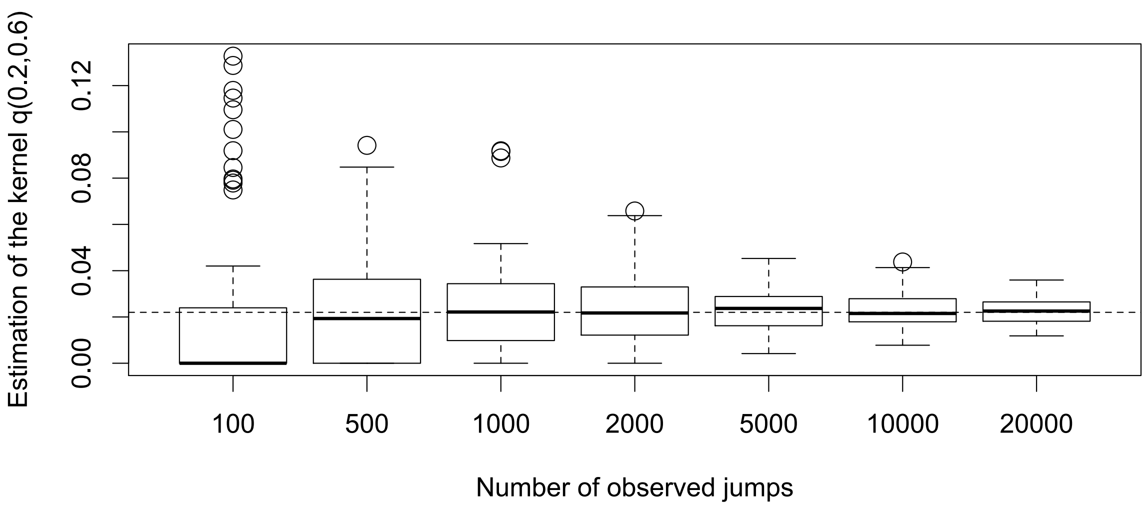

Figure 1: Boxplots, sur 100 réplications, de notre estimation de $q(x,y)$, avec $x = 0.2$, $y = 0.6$ et $C_1 = C_2 = 10$, à partir de différents nombres de sauts observés. Lorsque $\widehat{p}_n(x) = 0$, on remplace $\widehat{q}_n(x,y)$ par 0. Par conséquent, il y a beaucoup de zéros parmi les 100 réplications lorsque n est petit.

On s'intéresse à l'estimation non-paramétrique de densité q associée au noyau Q. Pour tout couple $(x,y) \in \overline{E} \times E$, $q(x,y)$ satisfait,

$$q(x,y) = \frac{1}{K_x}(C_2 + x)\exp\left(-(C_2 + x)y\right),$$

où K_x est la constante de normalisation. On choisit le noyau d'Epanechnikov K donné, pour tout réel x, par

$$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}.$$

On choisit aussi les paramètres α et β,

$$\alpha = \beta = \frac{1}{8} - 10^{-2}.$$

La figure 1 présente la distribution empirique à partir de 100 réplications de l'estimation $\widehat{q}_n(x, y)$, avec $x = 0.2$, $y = 0.6$ et $C_1 = C_2 = 10$, à partir de différents nombres de sauts observés. Lorsque l'échantillon est de petite taille, notre procédure d'estimation est peu performante. Néanmoins, on peut considérer que notre estimation est satisfaisante lorsque n est suffisamment grand, surtout au-delà de 10000 données. De plus, la courbe $q(x, y)$, avec $x = 0.5$ et $0.1 \leq y \leq 0.9$, et son estimation à partir de 20000 sauts sont très proches (voir la figure 2).

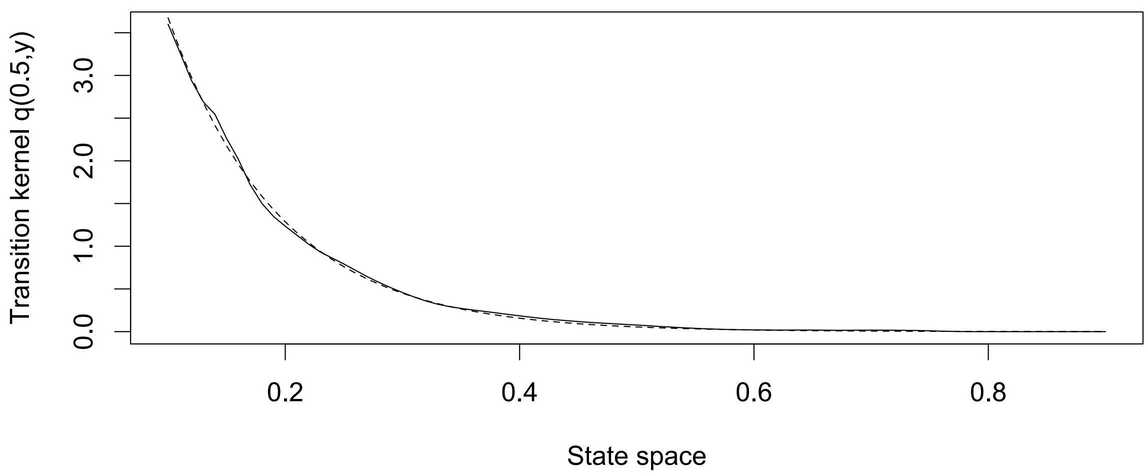

Figure 2: Estimation de $q(x, y)$, avec $x = 0.5$, pour $0.1 \leq y \leq 0.9$ à partir de l'observation de 20000 sauts, avec $C_1 = C_2 = 10$. La densité théorique recherchée est en pointillés, alors que son estimation est en trait plein.

Bibliographie

[1] Azaïs, R. (2013) A recursive nonparametric estimator for the transition kernel of a piecewise-deterministic Markov process. *Preprint.*

[2] Davis, M. H. A. (1993) Markov models and optimization. Vol. 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman & Hall, London.

[3] Doukhan, P., and Ghindès, M. (1983) Estimation de la transition de probabilité d'une chaîne de Markov Doëblin-récurrente. Étude du cas du processus autorégressif général d'ordre 1. *Stochastic Process. Appl.* 15, 3, 271–293.

[4] Duflo, M. (1997) Random iterative models. *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.

[5] Hernández-Lerma, O., Esparza, S. O., and Duran, B. S. (1988) Recursive nonparametric estimation of nonstationary Markov processes. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 33*, 2, 57–69.

[6] Lacour, C. (2008) Nonparametric estimation of the stationary density and the transition density of a Markov chain. *Stochastic Process. Appl.* 118, 2, 232–260.