

# ESTIMATION, SIMULATIONS ET PRÉVISION D'UN MODÈLE DE PROPAGATION DE FISSURES PAR DES PROCESSUS MARKOVIENS DÉTERMINISTES PAR MORCEAUX.

## ESTIMATION SIMULATION AND PREDICTION OF A CRACK GROWTH MODEL USING PIECEWISE DETERMINISTIC MARKOV PROCESSES

**AZAIS Romain,**  
**GÉGOUT-PETIT Anne**  
IMB UMR 5152, INRIA CQFD  
Université de Bordeaux  
351 Bd de la Libération  
33405 BORDEAUX Cedex

**TOUZET Marie**  
LMP UMR 5469  
Université de Bordeaux  
351 Bd de la Libération  
33405 BORDEAUX Cedex

**ELEGBEDE Charles**  
EADS Astrium  
Avenue du Gal Niox  
BP11  
33165 St Médard en Jalles

### Résumé

Malgré des essais de fatigue réalisés dans des conditions expérimentales très contrôlées, les données de propagation de fissures présentent un caractère aléatoire. De nombreux auteurs ont utilisés des versions stochastisées de la loi de Paris-Erdogan. Dans ce travail, nous nous proposons de modéliser la propagation d'une fissure par des processus markoviens déterministes par morceaux. Ces processus introduits par Davis dans les années 80 sont à la fois faciles à décrire et permettent d'utiliser les lois connues de la physique. De plus, leurs propriétés mathématiques s'appuient sur des travaux théoriques solides [DAV93]. Nous avons estimé les paramètres du modèle sur des données de la littérature [VIR79]. Les résultats de simulation permettent de générer un faisceau de fissures semblable à celui des fissures de Virkler. Ensuite, nous adaptons la méthode d'actualisation [PER08] à notre modèle pour prédire la propagation d'une fissure à l'aide des premiers points de sa trajectoire. Les résultats sont excellents et confirment la qualité du modèle.

### Summary

The experimental conditions of test of fatigue are very controlled. All the same, data of propagation present a random nature. Many authors have used random versions of the Paris-Erdogan law. In this work, we propose to model crack propagation by Piecewise Deterministic Markov Processes (PDMP in short). These processes were introduced by Davis in the eighties. It is easy to describe them and they allow us to use the known laws from the physics. Their mathematical properties rely on solid theoretical results [DAV93]. We have fitted the parameters of the model on the data of the literature [VIR79]. The results of the simulation give a cluster of cracks similar to the experimental one. Next we adapt the actualization method of [PER08] to our model for the prediction of the future of the crack using only the first measure points of its trajectory. The results are excellent and confirm the quality of the model.

**Remerciements** : Ce travail a été partiellement financé par la direction de la recherche d'EADS Astrium Space Transportation sous le contrat associé aux clauses TE3B2 X0864/09 et par le programme ARPEGE de l'Agence Nationale de la Recherche, projet FAUTOCOES, n° ANR-09-SEGI-004.

---

## 1 Introduction

La fatigue est un mécanisme de défaillance complexe dû à un ensemble de facteurs liés à la conception et à la fabrication de la pièce, au matériau et au chargement mécanique qui interviennent simultanément et dont les effets sont généralement couplés. L'effet de ces différents facteurs est quantifiable par des essais de fatigue qui permettent de valider une pièce et/ou une méthode de calcul de durée de vie. Cependant, pour qu'un essai soit représentatif, il faut que la pièce soit soumise à des conditions aussi proches que possible des conditions en service. La reproduction des conditions réelles et la nécessité de faire un grand nombre d'essais engendrent des coûts très élevés. En effet, la dispersion des résultats des essais de fatigue [VIR79], [LAP95], [GHO87] [WU07] est acceptée à la fois comme un fait d'expérience et comme un fait physique. Une approche complémentaire consiste donc à développer des modèles qui traduisent ces dispersions expérimentales assez fortes. Pour cela, des auteurs ont développé des modèles stochastiques de propagation de fissures par fatigue [DIT86], [LAP96], [WU07], [YAN96]. Ils ont généralement introduit un élément aléatoire dans la loi déterministe de Paris [PAR63] qui permet de relier la

vitesse d'avancée par cycle  $\frac{da}{dN}$  et l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes  $\Delta K$  par l'équation :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K(a))^m \quad [1]$$

Dans [1], les coefficients C et m peuvent être vus comme des constantes qui dépendent du matériau et de certaines conditions d'essai. Mais c'est aussi par l'intermédiaire de ces paramètres qu'il est possible de stochastiser le modèle de Paris en les rendant aléatoires. Ceci peut-être fait de différentes manières : le couple de paramètres (m,C) peut-être par exemple une variable aléatoire choisie à l'instant initial  $t = 0$  [MEE98] [PER08] [WU04]. Lapetra et Perrin ([LAP96], [PER08]) ont modélisé le lien entre les variables aléatoires m et C. En effet, des ajustements réalisés sur les courbes expérimentales de Virkler permettent de conforter l'idée d'une forte corrélation entre m et ln(C). Ainsi, la propagation d'une fissure est modélisée par la loi de Paris dont les paramètres sont aléatoires et liés entre eux par un modèle de régression linéaire entre ln(m) et ln(C) pour

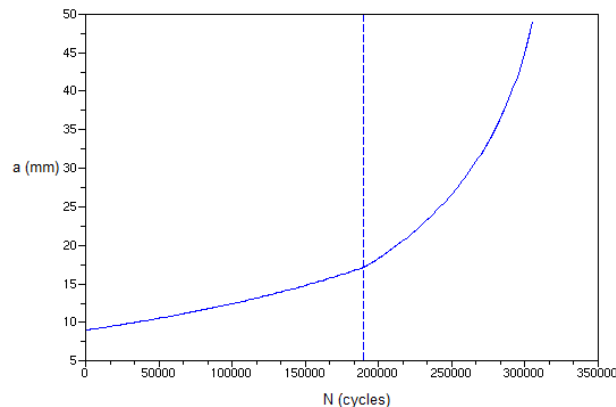
[LAP96] et  $m$  et  $\ln(C)$  pour [PER08]. Ces deux modélisations semblent être contradictoires mais ne le sont pas en réalité car le domaine des valeurs prises par  $m$  est très restreint ; les variations de  $\ln(m)$  en fonction de  $m$  dans ce domaine peuvent donc être considérées comme linéaires. Dans notre travail, nous assouplissons les travaux précédents en permettant au couple aléatoire  $(m, C)$  de changer de valeur en un temps aléatoire de la trajectoire : c'est un processus de Markov à un seul instant de saut. Dans ce cas, la trajectoire de la longueur de la fissure est déterministe avant et après le saut, c'est un cas particulier de processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP). Ce modèle a déjà montré qu'il était adapté à la modélisation des problèmes de fiabilité ([ZHA08]). Dans notre cas, il est beaucoup plus simple que celui proposé par [CHI08] qui a aussi modélisé la longueur d'une fissure par des PDMP avec un espace d'états très riches. Notre modèle permet malgré sa simplicité, de rendre compte de la dispersion du faisceau des courbes expérimentales de propagation de Virkler. Via une méthode d'actualisation, il permet aussi de prédire la propagation d'une fissure à partir des premières mesures. Dans la section 2, nous expliquons ce qu'est un PDMP. Nous présentons ensuite les données de Virkler et expliquons comment nous avons, pour chaque fissure expérimentale, estimé les paramètres du PDMP le plus proche (section 3). A l'aide de la statistique des résultats obtenus, nous construisons le modèle et donnons les résultats de simulation (section 4). Enfin, nous donnons la méthode et les résultats de l'actualisation avant de conclure.

## 2 Modèle markovien déterministe par morceaux de propagation de fissures

On propose de modéliser la propagation d'une fissure au cours du temps par un processus markovien déterministe par morceaux  $(a_t, V_t)_{t \geq 0}$  où à l'instant  $t$  (par abus de notation, nous noterons  $t$  le nombre de cycles),  $a_t$  désigne la longueur de la fissure et  $V_t$  désigne le mode de propagation  $(m, C)$ . Le processus  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un processus markovien de saut à valeurs dans un ensemble fini  $K$ . A chaque valeur du mode  $v$ , correspond un couple  $(m, C)$  de paramètres de la loi déterministe de propagation de Paris-Erdogan. Lorsque le mode  $v$  vaut  $i$ , le couple de paramètres est  $(m_i, C_i)$  et la propagation de la fissure est régie par l'équation différentielle [ED( $C_i, m_i$ )] donnée par la loi de Paris-Erdogan avec

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \times \cos\left(\frac{\pi a}{\omega}\right)^{-1/2} \right)^m \quad [\text{ED}(C, m)]$$

$\Delta \sigma$  est l'amplitude de contrainte et  $\omega$  la largeur de l'éprouvette. A  $t=0$ , nous initialisons la longueur de la fissure à  $a_0=9$  mm (longueur de fissure initiale dans les données de Virkler) et supposons que  $v_0 = i$ . L'évolution de la fissure est donnée par l'équation [ED( $C_i, m_i$ )] avec la condition initiale  $a_0=9$  jusqu'à l'instant aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ . A cet instant, le mode varie de manière aléatoire. Notons  $a_{T^-}$  la longueur de la fissure juste avant le saut, et supposons que  $v_{T^+}=j$ . Alors, l'évolution de la fissure à partir de l'instant  $T$  et jusqu'à l'instant terminal est donnée par [ED( $C_j, m_j$ )] avec la condition initiale  $a_T = a_{T^-}$ . Pour une fissure donnée, nous noterons  $(m_d, C_d)$  le couple aléatoire de paramètres de la loi de Paris-Erdogan caractérisant le premier régime - c'est-à-dire avant  $T$  - alors que  $(m_f, C_f)$  caractérise le second régime. La figure 1 donne un exemple de trajectoire produite par le modèle.



**Figure 1: Exemple de trajectoire produite par le modèle avec  $m_d=2,45$  ;  $\log(C_d) = 23,97$  ;  $m_f=2,49$  ;  $\log(C_f) = 23,69$  ;  $T=190000$**

On souhaite proposer un modèle de ce type pour décrire l'évolution d'une fissure au cours du temps. Il est donc nécessaire de proposer :

- Un espace d'états pour le mode, c'est-à-dire  $n$  couples de paramètres de la loi de Paris-Erdogan  

$$K' = \{ (m_1, C_1), \dots, (m_n, C_n) \} \quad [2]$$
- Une loi de probabilité initiale pour le mode, c'est-à-dire une loi pour les paramètres initiaux de la loi de propagation.
- Une valeur  $\lambda_i$  pour le paramètre de la loi de  $T$  lorsque le mode vaut  $i$ , pour tout  $1 \leq i \leq n$ .
- Une matrice de transition pour décrire la loi de  $v_T$  sachant  $v_0$ .

### 3 Ajustement sur les données de Virkler

#### 3.1. Les données de Virkler

Nous donnons ici les caractéristiques des essais réalisés par Virkler & al [Vir79]. Il s'agit des données concernant 68 éprouvettes en aluminium 2024-T3 pré-fissurées sur lesquelles on a appliqué une contrainte cyclique d'amplitude constante  $\Delta\sigma = 48,28$  MPa. Les éprouvettes sont rectangulaires, de longueur 558,8 mm, de largeur  $\omega = 152,4$  mm et d'épaisseur 2,54 mm. Pour chacune des fissures, on dispose de 164 mesures de longueur associées au nombre de cycles pour atteindre cette longueur. Les fissures ont une longueur initiale de 9 mm et les mesures s'arrêtent à la longueur limite de 49,8 mm. Pour la fissure n°k donnée, on dispose donc de deux vecteurs lignes  $a_k$  et  $N_k$  de dimension 164 et la  $q^e$  composante de  $a_k$ , notée  $a_{qk}$  est la longueur de la fissure après l'application de  $N_{qk}$  cycles de contraintes. Nous utiliserons ces données pour ajuster le modèle. La fissure qui se propage le plus rapidement atteint la longueur limite de 49,8 mm en 215000 cycles de contrainte alors que la plus lente atteint cette longueur limite en 310000 cycles. La figure 1 représente les données de propagation de cet essai.

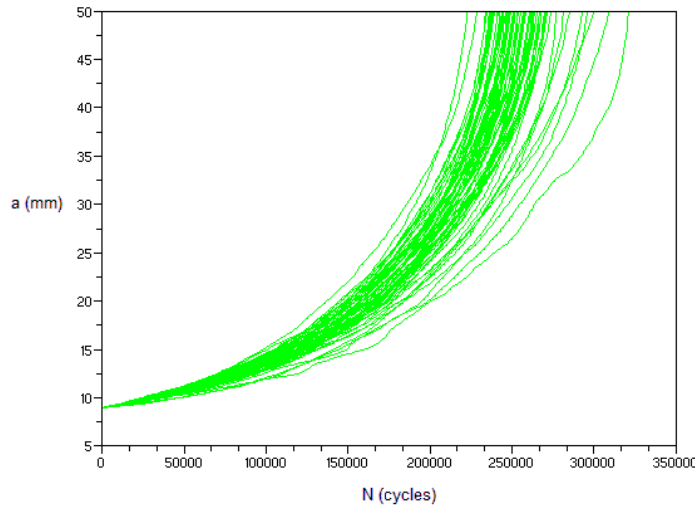


Figure 2 : Données de propagation de Virkler : en abscisse le nombre de cycles, en ordonnée la longueur en mm.

#### 3.2. Ajustement d'une courbe expérimentale à une courbe théorique

Pour chaque fissure dans les données de Virkler, on cherche quelles sont les réalisations des variables aléatoires  $(m_d, C_d)$  ( $m_f, C_f$ ) et  $T$  qui minimisent l'écart entre la courbe expérimentale et la courbe théorique définie par ces paramètres.

La solution à l'instant  $t$  de  $[ED(C, m)]$  pour la condition  $a(t_0) = a_0$  mm, est toujours notée dans la suite  $(a_{(t_0, a_0)}^{th}(m, C))(t)$ .

On définit maintenant  $a^{th}(m_d, C_d, T, m_f, C_f)(t)$  la longueur théorique de la fissure à l'instant  $t$  lorsque les cinq paramètres sont  $m_d, C_d, T, m_f$  et  $C_f$ .

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq t < T, a^{th}(m_d, C_d, T, m_f, C_f)(t) &= a_{(0,9)}^{th}(m_d, C_d)(t) \\ \forall t \geq T, a^{th}(m_d, C_d, T, m_f, C_f)(t) &= a_{(T,x)}^{th}(m_f, C_f)(t) \\ \text{avec } x &= a_{(0,9)}^{th}(m_d, C_d)(T^-) \end{aligned}$$

On définit l'écart entre la courbe expérimentale de Virkler pour la fissure  $k$  et la courbe théorique par

$$V_k(m_d, C_d, T, m_f, C_f) = \sum_{q=1}^{164} (a_{qk} - a^{th}(m_d, C_d, T, m_f, C_f)(N_{qk}))^2 \quad [3]$$

Minimiser l'application  $V_k$  en fonction des cinq paramètres revient à chercher pour la fissure  $k$  la réalisation des cinq variables aléatoires qui la décrivent au mieux. Pour réaliser cette minoration globale, on utilise l'algorithme stochastique du recuit simulé [BAR01]. Pour la fissure  $k$ , on notera  $m^{d,k^*}, C^{d,k^*}, T^{k^*}, m^{f,k^*}, C^{f,k^*}$ , les réalisations estimées des cinq variables aléatoires considérées.

### 3.3. Statistique des résultats obtenus

L'ajustement est satisfaisant puisque la moyenne 68 erreurs d'ajustement  $V_k$  (définie en [3]) est de l'ordre de  $22\text{mm}^2$  (écart-type  $15,2\text{mm}^2$ ). L'erreur minimale est de  $3,8\text{mm}^2$ , l'erreur maximale est de  $79,7\text{mm}^2$ . Dans un but descriptif mais aussi dans celui de construire notre modèle nous présentons quelques statistiques descriptives des résultats obtenus et nous étudions le lien entre les coefficients  $m^{d,*}$ ,  $C^{d,*}$ ,  $m^{f,*}$ ,  $C^{f,*}$ ,

Tableau 1: Statistiques des paramètres estimés sur les 68 fissures.

	min	max	moyenne	écart-type
$m^{d,*}$	2,313	2,541	2,462	$4,68 \cdot 10^{-2}$
$\ln(C^{d,*})$	-24,247	-23,740	-24,013	$1,18 \cdot 10^{-1}$
T	28207	258046	118004	51577
$m^{f,*}$	2,446	2,597	2,535	$3,14 \cdot 10^{-2}$
$\ln(C^{f,*})$	-24,423	-23,736	-24,048	$1,39 \cdot 10^{-1}$

Dans sa thèse [Per08], F. Perrin montre que les coefficients  $m$  et  $\ln(C)$  de la loi de Paris-Erdogan sont liés entre eux par un modèle de régression linéaire. Nous cherchons le même type de relation entre  $\ln(C^{d,*})$  et  $m^{d,*}$  d'une part et  $\ln(C^{f,*})$  et  $m^{f,*}$  d'autre part. La pente de la droite de régression entre  $\ln(C^{d,*})$  et  $m^{d,*}$  est  $a_d=-1,4700$  et l'ordonnée à l'origine est  $b_d=-20,3928$ . L'écart-type de l'erreur est de  $\sigma_d=0,0965$ . En ce qui concerne le lien entre  $\ln(C^{f,*})$  et  $m^{f,*}$ , les coefficients sont  $a_f=-3,5886205$ ,  $b_f=-14,949966$  et  $\sigma_f=0,0822$ .

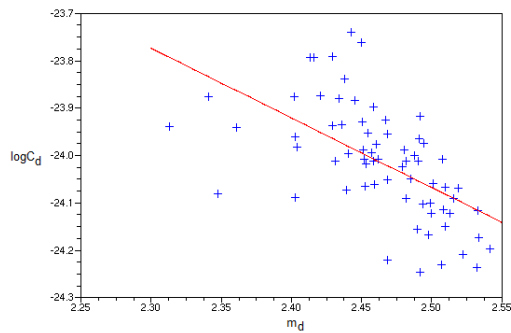


Figure 3 : relation linéaire entre  $\ln(C_d)$  et  $m_d$ .

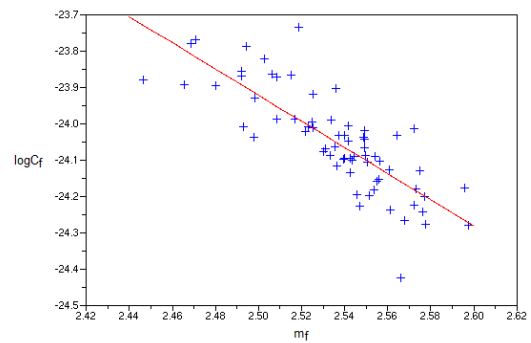


Figure 4 : relation linéaire entre  $\ln(C_f)$  et  $m_f$ .

Afin de proposer une loi de transition entre les deux régimes, nous étudions le lien entre  $\ln(C^{d,*})$  et  $\ln(C^{f,*})$  par l'intermédiaire de leur différence  $\ln(C^{f,*}) - \ln(C^{d,*})$ . En effet celle-ci, suit une normale de moyenne  $\mu=-0,0350$  et de variance  $s^2=0,0289$ .

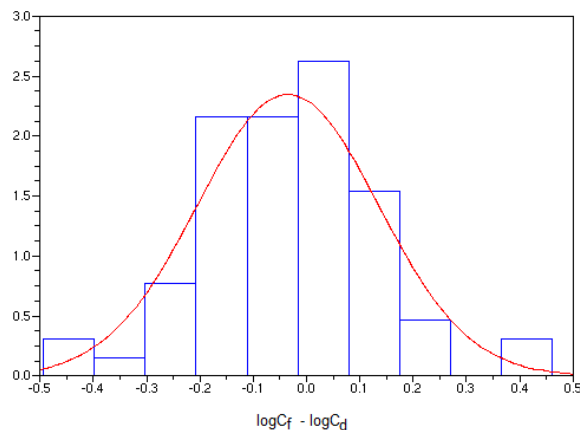


Figure 5 : histogramme des valeurs de  $\ln(C^{f,*}) - \ln(C^{d,*})$  et courbe théorique d'ajustement.

Ce sont ces résultats statistiques qui vont nous permettre d'ajuster le modèle de PDMP que nous proposons à la section suivante.

## 4 Modèle et simulations

Nous avons vu en section 2, que pour déterminer le modèle de PDMP, il fallait (1) un espace d'état  $K'$  pour le mode de propagation, (2) une loi initiale sur cet espace, (3) la loi du temps de transition dans chaque mode de  $K'$ , (4) une matrice de transition entre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>nd</sup> mode. Nous définissons ces 4 objets dans la suite pour différentes valeurs possibles du cardinal de  $K'$ .

#### 4.1 Espace d'état.

On propose un espace d'états pour le mode de cardinal  $n=4p$  où  $p$  est un entier inférieur à 10. On considère les 68 valeurs de  $m^{d,*}$ . On réalise un découpage en  $p$  classes de même amplitude.  $\mu_1, \dots, \mu_p$  et  $\pi_1, \dots, \pi_p$  sont respectivement les moyennes des  $m^{d,*}$  et les proportions de  $m^{d,*}$  dans chacune des classes. Pour  $p > 10$ , certaines classes sont vides : c'est pourquoi nous supposons  $p \geq 10$ .

Chacun de ces  $p$  paramètres va nous permettre de construire  $2p$  modes de propagation initiale en utilisant le lien linéaire entre les  $m^{d,k*}$  et  $\ln(C)^{d,k*}$  vu au paragraphe suivant. Pour tout  $0 < k \leq p$ , et  $0 < i \leq 2p$ , on pose

$$\text{Si } i=2k-1, \text{ on pose } (m_i = \mu_k, C_i = \exp(a + b\pi_k + \sigma))$$

$$\text{Si } i=2k, \text{ on pose } (m_i = \mu_k, C_i = \exp(a + b\pi_k - \sigma))$$

Nous proposons maintenant les modes de propagation du second régime. Nous gardons les valeurs de  $C$  du régime initial et utilisons le lien linéaire « inversé » entre  $m^{f,*}$  et  $\ln(C^{f,*})$  (c'est-à-dire donné par le modèle  $m^{f,*} = a' + b' \ln(C^{f,*}) + \varepsilon$ ). Les valeurs des coefficients sont  $a' = -0,1819$  et  $b' = -1,8393$ .

$$\text{Si } i=2p + 2k-1, \text{ on pose } (m_i = a' + b' \ln(C_{2k}), C_i = C_{2k})$$

$$\text{Si } i=2p + 2k, \text{ on pose } (m_i = a' + b' \ln(C_{2k-1}), C_i = C_{2k-1})$$

Ainsi, suivant la valeur de  $p$ , nous avons un modèle à 4, 8, ..., ou 40 états.

#### 4.2 Loi initiale

Elle ne charge que les  $2p$  premiers modes et est déterminée par  $P(v_0=2k-1) = P(v_0=2k) = \pi_k/2$ .

#### 4.3 Loi de l'instant de transition

En ce qui concerne la loi des temps de transition  $T_i$ , ils suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ , avec  $\lambda_i$  estimé par son estimateur du maximum de vraisemblance, c'est à dire l'inverse de la moyenne des  $T^k$  pour les fissures  $k$  telles que  $m^{d,k*}$  est dans la classe  $i$ .

#### 4.4 Matrice de transition.

C'est une matrice de dimension  $4p \times 4p$ . Elle est définie par blocs de dimensions  $2p \times 2p$  par la formule

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & Id_{2p} \end{pmatrix} \text{ avec } A \text{ déterminée à partir de la relation liant } \ln(C^{f,*}) - \ln(C^{d,*}). \text{ Pour une transition du mode } i \leq 2p$$

vers un mode  $j > 2p$ , nous utilisons la relation entre  $\ln(C^{f,*}) - \ln(C^{d,*})$  vue au paragraphe 3.3. Nous privilégions les modes  $j$  tels que  $|\ln(C_j) - \ln(C_j) - \mu|$  soient inférieurs à  $s$  en leur donnant des poids égaux entre eux mais largement supérieurs aux autres modes.

#### 4.5 Simulation.

Les résultats sont intéressants même pour le modèle à 4 états ( $p=1$ ). Nous donnons l'ensemble  $K$  des modes et la matrice  $A$  de transition pour  $p=4$  :

$$K = \left\{ \begin{array}{l} (2,46; \exp(-23.92)) \\ (2,46; \exp(-24.11)) \\ (2,51; \exp(-23.92)) \\ (2,55; \exp(-24.11)) \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,44 & 0,56 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les figures 6 et 7, nous présentons des résultats de simulations du modèle à 4 états puis d'un modèle à 40 états. Dans le graphique de gauche, il n'y a que des courbes simulées, dans le second, en plus des courbes simulées, les trajectoires expérimentales de Virkler sont en vert. On distingue clairement les changements de régime des fissures les plus lentes. On peut voir que le faisceau des courbes simulées englobe celui des courbes expérimentales.

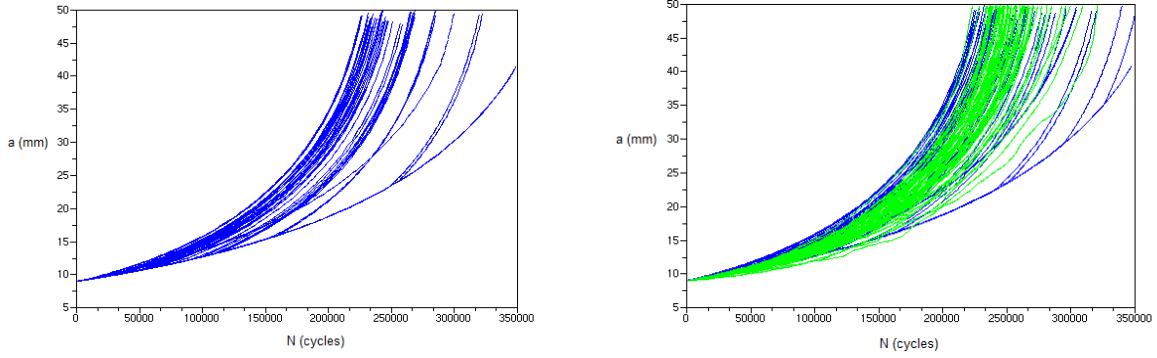


Figure 6 : Résultat de simulations d'un modèle à 4 modes (bleu), les courbes expérimentales sont en vert

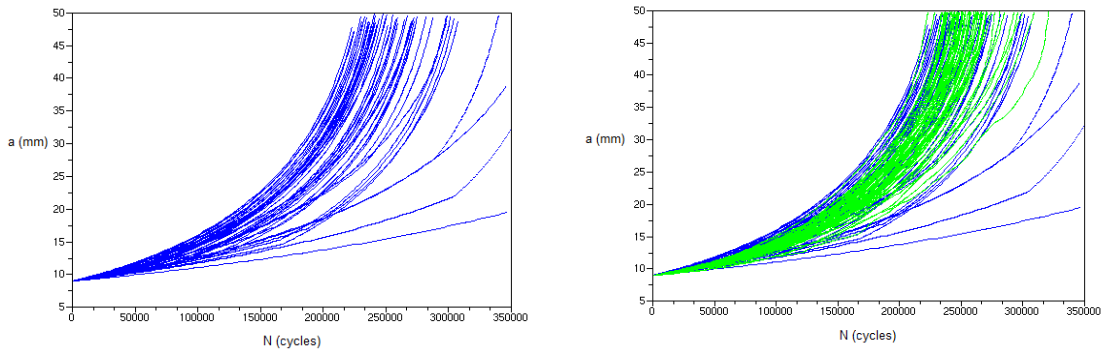


Figure 7 : Résultat de simulations d'un modèle à 40 modes (bleu), les courbes expérimentales sont en vert

## 5 Méthodes d'actualisation

Un moyen de tester la pertinence du modèle est de regarder s'il prédit correctement le comportement d'une fissure en fonction des premières mesures uniquement. Nous avons adapté ici la méthode d'actualisation de Perrin [PER08] à notre modèle. Pour ce travail il est nécessaire d'avoir un grand nombre de modes possibles.

On suppose maintenant qu'on dispose des premières mesures de la longueur d'une fissure et on souhaite prédire son évolution en tenant compte de cet apport d'informations, et ceci à partir du modèle qu'on vient de décrire. La méthode d'actualisation du modèle markovien de la partie précédente à partir de  $q$  mesures repose sur l'idée suivante : les mesures doivent permettre de limiter le nombre de mode en ne gardant que ceux qui sont proches des mesures initiales de la fissure. On va à la fois mieux choisir le mode initial, mais aussi mieux modéliser la loi de transition du mode, c'est-à-dire le second mode. Pour exploiter au mieux l'information supplémentaire, on force le saut à avoir lieu avant l'avant-dernière des mesures, c'est pourquoi on redéfinit également la loi de  $T$ .

Supposons que pour la fissure  $k$ , on connaisse les  $l$  premières mesures. Pour un certain couple  $(m, C)$ , on peut mesurer l'écart entre la courbe expérimentale définie par ces  $l$  points et la courbe théorique définie par  $[ED(C, m)]$ . C'est ce qu'on fait pour chacune des valeurs initiales possibles du mode. C'est pourquoi, comme nous l'avons dit plus haut, il est intéressant de prendre  $p > 1$ . Définissons l'écart entre ces deux courbes :

$$V_k(m_i, C_i) = \sum_{q=1}^l (a_{qk} - a_{0,9}^{th}(m_i, C_i)(N_{qk}))^2 \quad [4]$$

L'actualisation va donc se dérouler en 2 étapes, l'une qui restreint le nombre de modes possibles avant le saut, l'autre après le saut.

**Etape 1 :** grâce au critère [4], parmi les  $2p$  trajectoires possibles définies par les modes, on ne garde que les  $r$  plus proches de la fissure expérimentale suivant le critère [4]. On redéfinit ensuite la loi initiale du mode en utilisant cette information. Nous dirons que  $v_0$  suit la loi uniforme sur ces  $r$  valeurs. La partie gauche de la figure 8 montre l'étape 1 de l'actualisation pour un modèle où  $2p=10$  et on ne garde que les  $r=4$  fissures les plus proches. Les croix roses donnent les valeurs de la fissure expérimentale.

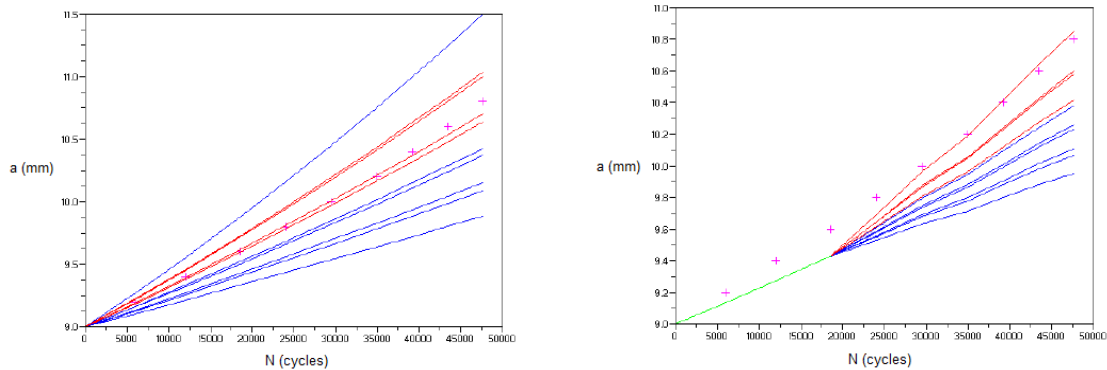
On redéfinit également la loi de l'instant aléatoire de saut  $T$ . Lorsque le mode vaut initialement  $i$ , il existe un unique temps

$t_{i,l}$  tel que  $a_{0,9}^{th}(m_i, C_i)(t_{i,l}) = a_{k(l)}$ . On force le saut à avoir lieu avant l'instant  $t_{i,l}$  qui est entièrement déterminé sachant

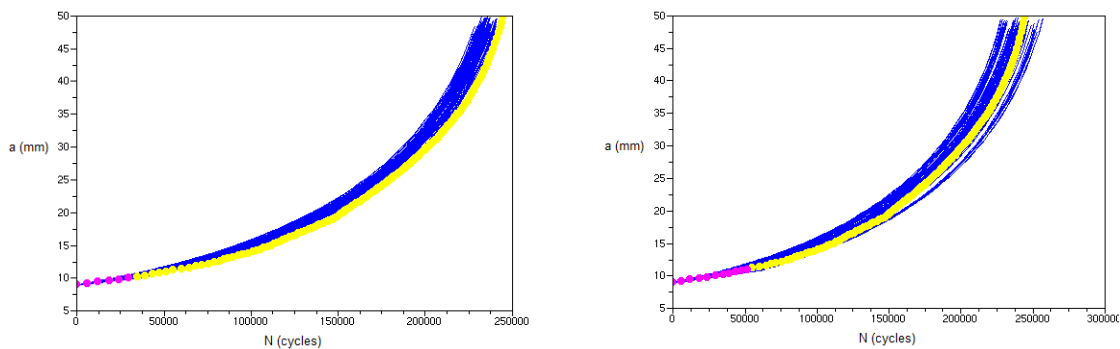
la valeur de  $v_0$ . Ainsi  $T = T' \wedge t_{i,l}$  où  $T'$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_i$ .

**Etape 2 :** pour chaque valeur du saut possible et pour chacune des  $r$  courbes retenues à l'étape 1, on mesure la distance entre chacune des  $2p$  courbes du modèle possibles dans le 2<sup>nd</sup> régime et la courbe expérimentale. On choisit de même les  $r$  courbes les plus proches parmi les  $2p$  possibles. La partie droite de la figure 8 donne un exemple pour un saut à la 3<sup>e</sup> mesure,  $2p=10$  et  $r=4$ .

Une fois le modèle obtenu, on peut alors simuler un faisceau de courbes qui joue le rôle de prédicteurs pour la fissure donnée. Les résultats obtenus sont très bons : pour toutes les fissures, sauf la plus lente, le faisceau simulé à partir de l'information des 10 premières mesures est très peu dispersé et il englobe la courbe expérimentale. La figure 8 donne deux exemples d'actualisation pour une fissure donnée, l'un en utilisant l'information des 5 premières mesures (points roses) l'autres des 10 premières. En bleu le faisceau de prédiction, les points jaunes donnent les valeurs de la courbe expérimentale.



**Figure 8 : A gauche, étape 1 de l'actualisation. ++ : mesures de la courbe expérimentale. Courbes pleines : en bleu, trajectoires possibles du modèle ; en rouge, celles retenues pour la prédiction. A gauche, choix des courbes pour le second régime pour une trajectoire donnée (en vert) et un temps de saut donné (ici mesure 3)**



**Figure 9 : Actualisation d'une fissure avec 5 ou 10 mesures.**

## 6 Conclusion

Ce travail montre qu'un modèle de PDMP dont le flot est basé sur la loi empirique de Paris Erdogan est tout à fait adapté à la modélisation de la propagation d'une fissure. Quel que soit le nombre de régimes possibles entre 4 et 40, les résultats de simulation donnent un faisceau de courbes qui englobent les courbes expérimentales. Même s'il est difficile de mesurer la qualité d'un modèle, les résultats obtenus par la méthode d'actualisation pour prédire le devenir d'une fissure permettent de dire que ce modèle est très intéressant. En effet, nous améliorons les résultats de Perrin [PER08] pour lesquels la méthode d'actualisation ne prédisait pas le comportement des fissures jusqu'à la fin des expériences. La construction du modèle a nécessité un travail statistique très spécifique, l'estimation s'est faite en deux étapes, la 1<sup>ère</sup> a été d'estimer les 5 paramètres associés au modèle pour chacune des fissures prises séparément et par une méthode de recuit simulé ; dans un second temps, nous avons fait des statistiques globales sur ces 5 paramètres pour construire le modèle de PDMP. Il soulève des questions théoriques mathématiques intéressantes sur ces phases d'estimation. D'un point de vue mécanique, cette approche encore prospective peut être prolongée dans plusieurs directions : d'une part, nous pouvons utiliser d'autres lois que celle de Paris pour les différents régimes de propagation. En effet, nous pouvons investiguer d'autres lois adaptées à différentes phases de la propagation et/ou qui tiennent compte des paramètres intrinsèques du matériau. Rien ne nous empêche d'avoir des lois différentes avant et après le saut. D'autre part, les travaux en cours sur les calculs de fonctionnelles de PDMP devraient permettre à terme de calculer des probabilités d'événements redoutés notamment le franchissement d'un seuil avant un nombre donné de cycles ou encore la rupture.

## 7 Références

- [BAR01] Bartoli, N., Del Moral, P., Simulation et algorithmes stochastiques, Une introduction avec applications, . Edition Cépaudes.
- [CHI08] Chiquet, J., and Limnios, N., Piecewise deterministic Markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, pp 1657—1667
- [DAV93] M. Davis, Markov Models and Optimization. Monographs on Statistics and Applied Probability 49, Chapman and Hall, London/New York, 1993
- [DIT86] O. Ditlevsen, R. Olsen, 1986, Statistical analysis of the Virkler data on fatigue crack growth. *Engng Fract Mech*, **25** : 177-195.
- [GHO87] H. Ghonem , S. Dore, 1987; Experimental study of the constant probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engng Fract Mech* **27**:1–25.
- [LAP96] C. Lapetra, J. Mayo, J. 1996, Dominguez, The randomness of fatigue crack growth under constant-amplitude loads, *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **19**(5) : 589-600.
- [MEE98] Meeker, W.Q. and Escobar, L.A, 1998, Statistical Methods for Reliability Data, JOHN WILEY & SONS, INC, Toronto.
- [PAR63] PC. Paris, F. Erdogan, 1963, A critical analysis of crack propagation laws. *J Basic Eng* **85**: 528-534.
- [PER08] Perrin, F., 2008, Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures, Thèse, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II
- [VIR79] D.A. Virkler, B.M. Hillberry and P.K. Goel, 1979, The statistical nature of fatigue crack propagation, *J. Engng Mater Tech* , Trans. ASME, **101** :148-153.
- [WU04] W.F. Wu and C.C. Ni, 2004, Probabilistic models of fatigue crack propagation and their experimental verification, *Engng Fract Mech*, **19**: 247--257.
- [WU07] W.F. Wu and C.C. Ni, 2007, Statistical aspects of some fatigue crack growth data, *Engng Fract Mech*, **74** : 2952-2963.
- [YAN96] J. Yang, S. Manning, 1996, A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis, *Engng Fract Mech*, **53** : 677-686.
- [ZHA08] H. Zhang, Y. Dutuit, F. Dufour, and C. Elegbede, 2008, Application des processus déterministes par morceaux à un système de production pétrolière offshore, *Proceedings of  $\lambda\mu$  16*, Avignon, France, 2008.