

Probabilités
Série d'exercices 2 : indépendance, probabilité conditionnelle

Exercices simples

Exercice 1

Soit A et B deux événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\mathbb{P}(A) = 2/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/6$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/9$. Que vaut $\mathbb{P}(A \cup B)$?
2. On suppose que $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 3/4$. Calculez $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

Exercice 2

Soient A et B deux événements indépendants tels que $\mathbb{P}_{A \cup B}(B) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{2}$.
Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 3

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_{A^c}(B)$.
Montrer que A et B sont indépendants.

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soient A et B deux événements. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = -\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$.

Exercice 5

On lance trois pièces de monnaie équilibrées, de façon indépendante. Calculer les probabilités des événements $A = \{\text{il y a exactement 2 "faces"}\}$ et $B = \{\text{il y a au moins 2 "faces"}\}$.

Exercice 6

Cette machine fabrique des taille-crayons dont 3% sont défectueux. Je prélève 5 taille-crayons à la sortie de cette machine. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 4 fonctionnels ?

Exercice 7

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 8

En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football (les fameux "Diables rouges") est composée de sept Flamands et quatre Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité qu'il soit Flamand.

Exercice 9

Un test sanguin est utilisé pour détecter une maladie. Si cette maladie est présente, il est positif avec probabilité 95% (vrais positifs) ; si elle n'est pas présente, il est positif dans 1% des cas (faux positifs). On sait que 0,5% de la population souffre de cette maladie.

Calculer la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test est positif. Commenter.

Exercice 10

On a deux urnes remplies de boules. La première contient dix boules noires et trente blanches; la seconde en a vingt de chaque. On tire sans préférence particulière une des urnes au hasard et dans cette urne, on pioche une boule au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche?
2. On a pioché une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne?

Exercice 11

J'ai dans ma poche trois jetons identiques au toucher. L'un a deux faces blanches, le second deux faces noires, le troisième une face noire et une face blanche. Je pioche un jeton au hasard, je ne vois qu'une seule face qui est blanche. Quelle est la probabilité que l'autre face soit blanche?

Exercices plus avancés

Exercice 12

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant.

1. Quelle est la probabilité que je trouve pour que la première fois Princecharmant dans la tablette numéro k ?
2. Quelle est la probabilité que je trouve pour que Princecharmant ne soit pas dans les k premières tablettes?
3. Combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80%? Même question pour être sûr à 90%.

Exercice 13 (Fiabilité)

Je dispose d'un composant électronique qui est censé couper le circuit dans lequel il est inséré si la température dépasse 35 degrés. Quand la température dépasse 35 degrés, il coupe le circuit avec probabilité 95%. J'aimerais augmenter la fiabilité de mon système de détection en utilisant plusieurs composant du même type.

1. Je dispose 3 composants en série. Quelle est la probabilité que mon circuit soit coupé si la température dépasse 35 degrés?
2. Je dispose 3 composants en parallèle. Quelle est la probabilité que mon circuit soit coupé si la température dépasse 35 degrés?
3. Que me proposeriez-vous de faire pour que la probabilité que mon circuit se coupe si la température dépasse 35 degrés soit au moins 99,99%?

Exercice 14 (Tricheur?)

Un tricheur a dans sa poche deux pièces de monnaie; l'une est normale, l'autre tombe sur face avec probabilité $2/3$.

1. Il prend la pièce normale, la lance 6 fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 4 face?

2. Il prend la pièce truquée, la lance 6 fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 4 face ?
3. Il prend une de ces pièces au hasard, la lance 6 fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne 4 face ?
4. Il prend une de ces pièces au hasard et obtient 4 face en 6 lancers. Quelle est la probabilité pour qu'il ait pris la pièce truquée ?

Pour réfléchir

Exercice 15 (Paradoxe des enfants)

Mme Durand sait que ses voisins Dupont ont 13 enfants.

- a) Elle a déjà vu 12 fillettes en train de jouer à chat-perché dans la cour. Quelle est la probabilité que le treizième enfant soit encore une fille ?
- b) Après enquête complémentaire auprès de la directrice d'école, Mme Durand sait que les 12 aînés sont des filles. Quelle est la probabilité que le petit dernier, trop jeune encore pour aller à l'école, soit encore une fille ?

Exercice 16 (Paradoxe de Monty Hall)

Saint-Pierre a mis au point un système d'aide pour orienter les nouveaux arrivants. Trois portes, fermées et identiques bien-sûr, se trouvent face au nouveau venu, Bob : deux d'entre elles mènent en enfer, la troisième au paradis. Bob est sommé de choisir une porte. Parmi les deux restantes, Saint-Pierre ouvre une porte menant à l'enfer, et offre à Bob la possibilité de modifier son choix pour la dernière porte restante. Que doit faire Bob ?

Exercice 17 (Paradoxe de Galton)

On lance trois "pile ou face" équilibrés. Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

"A coup sûr, il y a deux lancers identiques. Par symétrie, le troisième a la même probabilité d'être un pile ou un face. Donc la probabilité d'avoir trois lancers identiques est $1/2$."