UNE REMARQUE SUR LES NOMBRES DE HODGE DES VARIÉTÉS PROJECTIVES COMPLEXES

July 27, 2004

Introduction

La question suivante m'a éte posée par P.Y. Gaillard: si X, X' sont deux variétés projectives complexes, ou Kählériennes compactes (connexes) homéomorphes, leurs nombres de Hodge sont-ils égaux? Une recherche bibliographique ultérieure montre que cette question est déjà posée par F. Hirzebruch en 1954, sans qu'une réponse nécessairement positive y soit attendue ([H], Problem 31). La question posée par F. Hirzebruch ([H], problem 31) suppose implicitement que l'homémorphisme préserve l'orientation, comme le révèle la remarque précédant cet énoncé. Dans ce contexte, Borel et Hirzebruch ont eux-mêmes fourni un contre-exemple en 1959 ([B-H], p. 341; voir aussi [H'], p. 783) en produisant deux variétés rationnelles homogènes de dimension complexe 5 et difféomorphes pour lesquelles les c_1^5 valent respectivement 4500 et 4860.

Nous considérerons donc ici les cas de dimension inférieure, ou bien dans lesquels l'orientation n'est pas préservée.

En dimension 1, la réponse (à la question ci-dessus) est bien sûr positive, puisque le seul nombre de Hodge est $q := h^{0,1} = b_1/2$.

Dans le cas des surfaces, la réponse est encore positive, pourvu que l' homéomorphisme considéré préserve les orientations naturelles déduites des structures complexes. Ceci résulte des égalités bien connues (voir [B-P-V]): $1 + 2p_g = b_2^+$, $h^{1,1} - 1 = b_2^-$ et $q = b_1/2$.

Par contre, la possibilité que l'homéomorphisme considéré échange les orientations permet d'envisager une réponse négative dans le cas des surfaces, déjà. Cette observation est faite par M. Nardmann ([N]) (voir aussi [F-M, pp. 22,32], par exemple).

Notre objectif est ici, en effet, de montrer la:

Proposition 0.1 *Il existe des surfaces projectives complexes S, S' simplement connexes et de type général homéomorphes, mais ayant des nombres de Hodge différents.*

La construction consiste simplement à éclater de manière adéquate deux des surfaces de type général simplement connexes et de signature positive construites par

Xiao Gang ([X], [C]). (On pourrait également utiliser les surfaces simplement connexes d'indice positif de Moishezon-Teicher [M-T]). On utilise alors le théorème de Freedman [F] pour vérifier l'homéomorphie[1]. (En utilisant les calculs de [C], on peut d'ailleurs même obtenir des exemples minimaux). Remarquons que la construction de Xiao est très délicate, F.Bogomolov ayant par exemple conjecturé que les surfaces d'indice positif devraient avoir un groupe fondamental infini.

Remarque 0.2 Les surfaces S et S' précédentes ne sont pas difféomorphes. (Ceci peut être établi par l'argument utilisé dans [K]).

On en déduit immédiatemment, en dimensions supérieures, des exemples difféomorphes.

Corollaire 0.3 *Il existe des variétés projectives complexes X, X' connexes et simplement connexes de dimension complexe 3 (resp. 4) ayant des nombres de Hodges différents et difféomorphes par un difféomorphisme qui échange (resp. préserve) les orientations.*

En effet, il suffit de choisir, pour la dimension complexe 3, $X_1 := S \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $X_1' := S' \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$(resp. $X_2 := S \times S$, et $X_2' := S' \times S'$), si S, S' est un couple de la proposition précédente. Les résultats de A.V. Zubr ([Z], voir aussi [Z']) montrent alors que X_1 et X_1' sont difféomorphes. Il est immédiat de vérifier que ni leurs nombres de Hodge, ni leurs nombres de Chern ne coincident tous. On a echange (resp. préservation) de l'orientation si $i = 1$ (resp. si $i = 2$).

Dans une avant-dernière section, nous montrons que si deux surfaces projectives complexes (à b_1 pair suffirait) sont homéomorphes, et ont des nombres de Hodge différents, alors elles sont toutes deux de type général. Ceci contraste avec les homéomorphismes préservant l'orientation, qui existent pour certaines dimensions de Kodaira prescrites différentes.

Je voudrais remercier F.Chargois, V. Cortes-Suarez et bien sûr P.Y. Gaillard pour leur intérêt, et T. Peternell (resp. O. Biquard) pour la référence [H] (resp. [K], qui semble très peu connue), et tout particulièrement F. Hirzebruch pour ses commentaires détaillés et les références [B-H] et [H'].

1 Une Construction

Pour une surface projective complexe S, on notera $b_i, c_2, c_1^2, q, p_g, b^+, b^-$ les invariants usuels déduits de son orientation *complexe* naturelle. On notera $s := b^+ - b^-$ sa signature, ainsi que $\chi := \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de son faisceau structural, c'est un invariant birationnel de S. Ce fait sera constamment utilisé par la suite.

[1] Des exemples similaires (de toute façon, le choix est très limité par le peu d'exemples connus) ont été considérés, mais pour des raisons très différentes, dans [K] où le lien avec la présente question n' est pas envisagé

Rappelons les égalités suivantes (voir [B-P-V]), qui relient les invariants topologiques (éventuellement orientés) q, b_1, b^+, b^-, s aux invariants analytiques complexes (nombres de Chern et de Hodge): $q = b_1/2$, $b^+ = 1 + 2p_g$,$b^- = h^{1,1} - 1$, $1 - q + p_g = \chi = (c_1^2 + c_2)/12$, $s = (c_1^2 - 2c_2)/3$, $c_2 = 2 - 4q + b^+ + b^-$. D'où l'on déduit aussi: $s = 4\chi - c_2 = c_1^2 - 8\chi$.

Proposition 1.1 *Soit T, T' deux surfaces projectives complexes connexes et simplement connexes telles que:*

1. $s(T) > 0$ et $s(T') > 0$.

2. $s(T) > 2(\chi - \chi') > 0$, en posant $\chi(T) = \chi$ et $\chi(T') = \chi'$.

On a alors:

3. $m := 2(\chi + \chi') - c_2 > 0$ et $m' := 2(\chi + \chi') - c_2' > 0$, si $c_2 = c_2(T)$ et $c_2' = c_2(T')$.

4. Si S (resp. S') est obtenue de T (resp. T') par éclatement de m (resp. m') points, alors S et S' sont homéomorphes, mais n'ont pas les mêmes nombres de Hodge, car leurs signatures sont non-nulles et opposées (égales en valeur absolue à $2(\chi - \chi')$).

En effet, la propriété 3 résulte immédiatement des hypothèses 1 et 2, par l'égalité: $s = 4\chi - c_2$. Pour vérifier que S et S' sont homéomorphes, il suffit puisque S et S' sont simplement connexes, par le théorème de Freedman [F], de voir que $c_2(S) = c_2(S')$, que $s(S) = -s(S')$, et que les formes d'intersection (sur la cohomologie entière de degré 2) de S et S' sont toutes deux impaires et indéfinies. Cette dernière condition d'imparité est immédiate, puisque S et S' ne sont pas minimales. La vérification des deux autres propriétés est facile, puisque $c_2(S) = c_2(T) + m = 2(\chi+\chi') = c_2(T')+m' = c_2(S')$ et que $s(S) = s(T)-m = 2(\chi-\chi') = -s(T')+m' = -s(S')$, par les choix de m et m'. On a utilisé le fait que $\chi(T) = \chi(S)$, et que $\chi(S') = \chi(T')$.

Il reste à montrer l'existence d'un couple T, T' satisfaisant les conditions de la proposition.

2 Les Surfaces de Xiao-Chen

Ces exemples sont fournis par la construction de Xiao, exposée et généralisée dans [C], dont nous utilisons ci-dessous seulement la proposition 3.3, p. 154, et les formules (7), p. 152 (dans le cas particulier où les paramètres r_1, r_2, r_3 sont nuls, pour simplifier).

Proposition 2.1 *Pour tout quintuplet (n, k, s, t, r) d'entiers non-négatifs tels que:*

(*) $n, s \geq 1; r < 2s; r \leq 2t; r \leq 30.2^k$, il existe une surface simplement connexe minimale de type général $T := T(n, k, s, t, r)$ telle que:

$c_1^2(T) = 2^k(18644n - 442) + 8(45n - 1)(s + t) - 3(30n - 1)r$.

$\chi(T) = 2^k.n.2129 + (90n-1)s + 45nt - (30n-1)r + 2.$
Donc: $s(T) = c_1^2 - 8\chi = 2^k(1612n - 442) - 360ns - 8t + 5(30n-1)r$.

3 Des Exemples

On peut maintenant très facilement produire des couples (T, T') satisfaisant les conditions de la proposition 1.1. On choisit $r \geq 1$, puis (n, k, s, t) satisfaisant les conditions (*).

On prend $T' := T(n, k, s, t, r)$ et $T := T(n, k, s, t, (r-1))$. On choisit de plus k assez grand pour que:

(**) $s(T) > 2(30n-1) > 0$, ce qui est toujours possible, r, s, t, n ayant été fixés.

On a alors:

$\chi(T) = \chi(T') + (30n-1)$, et donc: $s(T) = s(T') - 5(30n-1) > 2(\chi(T) - \chi(T')) = 2(30n-1)$, par le choix de k.

Les conditions voulues sont donc bien satisfaites.

Remarque 3.1 On peut également obtenir des exemples minimaux en appliquant les résultats d' existence de Chen [C], qui montre que dans de larges intervalles de la forme $x \in [2y + N, 2y - N]$, pour y assez grand, il existe des surfaces de type général simplement connexes et minimales (en fait du type ci-dessus) telles que $c_1^2 = x, c_2 = y$.

Remarque 3.2 La conjecture 3.3 de [K] (affirmant qu'une surface simplement connexe de type général avec $p_g > 0$ contient une courbe rationnelle) est manifestement fausse: des hypersurfaces hyperboliques (et ne contenant donc pas de courbes rationnelles) de degré $d \geq 11$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sont fournies dans [D-E]. D'ailleurs, un résultat algébro-géométrique optimal est obtenu dans [Cl]: l'hypersurface générale de $\mathbb{P}_3$ de degré $d \geq 5$ ne contient pas de courbe rationnelle. Dans [D-E'], il est par ailleurs montré que l'hypersurface générale de $\mathbb{P}_3$ de degré au moins 21 est hyperbolique.

4 Dimension de Kodaira

Proposition 4.1 *Soit S, S' deux surfaces projectives complexes homéomorphes, et ayant des nombres de Hodge différents. Alors S et S' sont de type général.*

Démonstration: Quitte à échanger S et S', on peut supposer que $s(S) = -s(S') > 0$.

Lemme 4.2 *S est de type général (ie: $\kappa(S) = 2$, κ étant la dimension de Kodaira).*

Démonstration: Si $\chi := \chi(S) < 0$, alors S est birationnellement réglée avec $q \geq 2$ ([F-M; I.1.13,p. 22], par exemple). Donc $p_g(S) = 0$, et $s(S) = (1+2p_g) - b^- = 1 - b^- > 0$, donc $b^- = 0, b^+ = 1 = b_2(S)$. Mais ceci contredit le fait que S admet un morphisme sur un courbe de genre $q > 0$.

Donc $\chi \geq 0$, et donc $c_1^2 = c_1^2(S) = s + 8\chi > 0$. Donc S est soit rationnelle, soit de type général (sinon, $c_1^2 \leq c_{1,min}^2 \leq 0$). Si S est rationnelle, on a: $\chi = 1$, et $s = c_1^2 - 8\chi > 0$, donc $S \cong \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Donc on a aussi: $S' \cong \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ([Y]). Contradiction.

Donc S est de type général.

Lemme 4.3 *On a:* $0 < s(S) < 2\chi' := 2\chi(S')$. *Si on a égalité, S est un quotient de la boule unité de* $\mathbb{C}^2$.

Démonstration: $4\chi = 4\chi' + 2s$. Donc $c_1^2 = 8\chi + s = 8\chi' + 5s$, et $c_2 = 4\chi - s = 4\chi' + s$. Par l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka-Yau (voir [B-P-V]), on a $c_1^2 \leq 3c_2$. Donc $8\chi' + 5s \leq 12\chi' + 3s$, et $s \leq 2\chi'$. En cas d'égalité, on conclut par [Y].

On suppose maintenant que $\kappa(S') := \kappa' \leq 1$. On a en particulier: $\chi' > 0$.

Si $\kappa' = -\infty$, alors $p_g = 0$, et $\chi' = 1 - q > 0$. Donc S et rationnelle, $\chi' = 1$, et $s = 1$ (si $s = 2$, S est un quotient de la boule, donc n'est pas simplement connexe. Contradiction). Donc $1 - b^-(S') = b^+(S') = 1$ et $1 + 2p_g(S) = b^+(S) = b^-(S') = 2$. Contradiction.

Si $\kappa(S') \geq 0$, et si S" est le modèle minimal de S', alors $c_2' := c_2(S') = c_2(S") + r$, avec $r \geq 0$. De plus, $c_2(S") = 12\chi'$, puisque $c_1^2(S'') = 0$. Donc $c_2' = 12\chi' + r = 4\chi' + s$. Donc $s = 8\chi' + r \leq 2\chi'$. Contradiction.

Remarque: Par contraste, il existe de nombreux couples de surfaces S, S' homéomorphes, avec des nombres de Hodge égaux tels que $\kappa(S) > \kappa(S')$.

5 Bibliographie

[B-P-V] W.Barth-C. Peters-A. Van de Ven. Compact complex surfaces. Springer Verlag (1984).

[B-H] A. Borel-F; Hirzebruch. Homogeneous spaces, II. Am. J. Math. 81 (1959), 315-382.

[C] Z.J. Chen. On the geography of surfaces. Simply connected minimal surfaces with positive index; Math. Ann. **277** (1987), no. 1, 141–164.

[Cl] H. Clemens. Curves on generic hypersurfaces. Ann. Sc. ENS 19 (1986), 629-636.

[D-E] JP. Demailly-J. El Goul. Connexions méromorphes projectives et variétés algébriques hyperboliques. CRAS 324 (1997), 1385-1390.

[D-E'] JP. Demailly-J. El Goul. Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space. Am. J. Math. 122 (2000), 515-546.

[F] M. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds; J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453.

[F-M] R. Friedman-J. Morgan. Smooth Four-Manifolds and complex surfaces. Springer (1994).

[H] F. Hirzebruch. Some Problems on Differentiable and Complex Manifolds. Ann. Math. **60** (1954), 213-236.

[H']F. Hirzebruch. Gesammelte Abhandlungen, I. Springer-Verlag (1987).

[K] D. Kotschik. Orientation reversing homeomorphisms and Surface geography. Math. Ann. 292 (1992), 139-149.

[M-T] B. Moishezon-M. Teicher. Simply connected algebraic surfaces of positive index. Inv. Math. 89 (1987), 601-643.

[N] M. Nardmann .http://mathforum.org/epigone/sci.math.research/khaynelpal

[P-P-X] U. Persson-C. Peters-G. Xiao. Geography of spin surfaces; Topology **35** (1996), no. 4, 845–862.

[X] G. Xiao. An example of Hyperelliptic Surfaces with positive index. Northeastern Math. J. **3** (1986), 255-257.

[Y] S.T. Yau. On the Ricci curvature of compact Kähler Manifolds and the complex Monge-Ampère equations. Communic. Pure and Applied Math. **31** (1978), 339-411.

[Z] A.V Zubr. Classification of simply-connected six-dimensional Manifolds. Dokl.Akad.Nauk. SSSR (1980), 1312-1315.Traduction: Sov. Math. Dokl. 22(1980), 828-831.

[Z'] A.V Zubr. Classification of topological six-Manifolds. LNM 1346 (1988), 325-339.

6 Adresse

F.Campana
Université Nancy 1.
campana@iecn.u-nancy.fr