Université de Lorraine
Master 2 IMOI 2016-2017

Modélisation stochastique

Madalina Deaconu

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce cours est d'introduire des outils théoriques et d'illustrer, à travers des problèmes réels, comment la modélisation stochastique et les outils aléatoires simples permettent d'apporter des réponses pour des questions issues de nombreux domaines applicatifs.

La modélisation probabiliste est fondamentale dans tous les domaines d'application.

Les outils probabilistes que nous développons, comme les méthodes de Monte Carlo, les chaînes de Markov et les processus de renouvellement, sont des outils généraux utilisés dans de nombreux domaines comme en physique (écoulement d'un fluide, trajectoire d'un avion), en biologie (mutation du genôme), en chimie (coagulation des polymères), en climatologie (modélisation du vent, de la pluie etc), en informatique, en médicine, en finance (évaluation des produits dérivés), en science du vivant, en assurance, en linguistique, en sociologie, ...

Les modèles que nous étudions sont inspirés du monde de la finance, des files d'attente, etc.

Nous débuterons ce cours par des rappels sur les méthodes numériques permettant de simuler des variables aléatoires.

Ensuite nous étudions des méthodes numériques basées sur les tirages successifs de nombres aléatoires, méthodes appelées généralement méthodes de Monte Carlo.

En outre, nous aborderons l'étude de certains processus stochastiques simples mais essentiels dans la modélisation, tels que les chaînes de Markov, les processus de renouvellement et les processus de branchement. Les prémices de la gestion de stock seront aussi introduites.

L'ensemble de ces études théoriques sera illustré, lors des travaux pratiques, par des simulations.

Chapitre 1

Simulation de variables aléatoires

1.1 Introduction

On présentera dans cette partie un panel de méthodes pour la simulation de variables aléatoires. Nous commençons par rappeler les principes de simulation pour les lois classiques. Ensuite nous introduisons les méthodes générales de simulation pour les variables aléatoires à valeurs discrètes et continues.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle sur cet espace. On notera F sa fonction de répartition et f sa densité. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

et

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x).$$

Principe *Pour simuler des variables aléatoires de loi quelconque, l'idée est de se ramener à la loi uniforme sur* $[0,1]$. *La loi uniforme sur* $[0,1]$ *est donc la base de toute simulation de variable aléatoire. Rappelons ses propriétés.*

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Dans ce cas :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

et

$$f_U(x) = \mathbb{1}_{\{x \in [0,1]\}}.$$

Cadre général : On suppose qu'on dispose d'un générateur de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes.

L'hypothèse d'indépendance des valeurs est une des conditions essentielles pour la validité de la plupart des algorithmes présentés dans la suite.

Exemple 1. SCILAB possède une fonction `rand()` dont les appels successifs fournissent une suite de variables aléatoires "indépendantes" et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[0,1]$. Nous ne nous intéresserons pas ici à la conception d'une telle fonction.

Les générateurs sont souvent construits à partir d'une relation de congruence sur de nombres de grande dimension et initialisés par exemple à partir de l'horloge de la machine. Il s'agit des générateurs de nombres pseudo-aléatoires, notamment les valeurs obtenues ne sont qu'apparemment indépendantes.

Remarque 1. *Une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$ est différente de 0 et 1 presque surement. En particulier, si $\Lambda(dx)$ note la mesure de Lebesgue, on a*

$$\mathbb{P}(U \in \{0,1\}) = \int_{\{0,1\}} \mathbb{1}_{[0,1]}\, d\Lambda = \Lambda(\{0,1\}) = 0.$$

Remarque 2. *En* SCILAB *la fonction* `rand` *ne renvoie que des valeurs différentes de 0 et 1.*

Objectif du cours : Vous apprendre à construire des méthodes pour simuler une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire suivant une loi donnée, différents de la loi uniforme sur $[0,1]$.

1.2 Simulation de lois classiques

1.2.1 Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$. On veut simuler une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(p)$ de loi de probabilité

$$\mu(x) = p\delta_1(x) + (1-p)\delta_0(x). \tag{1.1}$$

Pour cela on tire U une uniforme sur $[0,1]$ et on définit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } U \leq p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire $X = \mathbb{1}_{\{U \leq p\}}$.

On propose deux fonctions pour simuler cette variable aléatoire. La première ne rend qu'une réalisation d'une variable aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre p, la seconde renvoie un k-échantillon, qui sera utilisé par la suite dans la simulation de la loi binomiale :

```
function x=bernoulli1(p)
// tirage suivant la loi de Bernoulli de parametre p
  x=0;
if rand()<p then;
  x=1;
end

function x=bernoulli2(k,p)
// tirage d'un k-echantillon suivant la loi de Bernoulli de parametre p
  x=bool2s(rand(k,1) < p);
  end;
```

Exemple 2. Pile ou face

On veut simuler une variable aléatoire de loi "Pile ou face" *i.e.* $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On tire U une uniforme sur $[0, 1]$ et

$$X = \begin{cases} \text{"Pile"} & \text{si } U \leq \dfrac{1}{2} \\ \text{"Face"} & \text{sinon,} \end{cases}$$

formellement on peut écrire $X = \mathbb{1}_{\{U \leq \frac{1}{2}\}}$.

1.2.2 Loi binomiale de paramètres (n, p)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On veut simuler $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ donc de loi

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k(x). \tag{1.2}$$

On sait qu'une variable aléatoire binomiale peut être représentée comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Plus précisément on a le résultat suivant :

Lemme 1. *Soient $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p).*

Il suffit donc de simuler n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ et d'en faire la somme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq p\}}.$$

```
function x=binomiale(n,p)
// tirage suivant la loi binomiale de parametres (n,p)
  x=sum(bernoulli2(n,p));
```

1.2.3 Loi de probabilité discrète

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E avec $E = \{x_i | i \in I\}$ et $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{0, 1, \ldots, n\}$. Considérons le cas I fini, le second se traitant de la même manière. La loi de probabilité de X est donnée par

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \delta_{x_i}(x)$$

où

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \mu(x_i), \forall i \in I \text{ et } \sum_{i=0}^{n} p_i = 1. \tag{1.3}$$

Notons par P_k le cumul des p_i, pour $0 \leq i \leq k$, *i.e.*

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} p_i. \tag{1.4}$$

On a alors $P_0 = p_0$ et $P_n = 1$.

Nous souhaitons simuler une variable aléatoire de même loi que X. Pour ce faire construire une variable aléatoire Y telle que

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = x_i) = p_i, \quad \forall i \in I,$$

à l'aide d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Algorithme L'algorithme s'écrit : on tire U une uniforme sur $[0, 1]$ et on pose

$$Y = k \text{ si } P_{k-1} < U \leq P_k$$

ce qui s'exprime également sous la forme

$$Y = x_0 \mathbb{1}_{\{U \leq P_0\}} + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\{P_{i-1} < U \leq P_i\}}.$$

Remarque 3. *Nous introduisons cette méthode générale pour l'appliquer dans la suite pour le cas des variables aléatoires discrètes particulières. Nous reviendrons avec des commentaires et justifications dans la partie méthodes générales.*

1.2.4 Loi uniforme sur $\{0, 1, ..., n-1\}$

On veut simuler X de loi uniforme sur $\{0, 1, ..., n-1\}$, donc de loi

$$\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(x). \tag{1.5}$$

Méthode 1 : Nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme 2. *Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la partie entière $[nU]$ suit la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., n-1\}$.*

Remarque 4. *En admettant ce résultat, l'algorithme s'écrit :*

```
function x=uniforme1(n)
 // tirage suivant la loi uniforme sur {0,...,n-1}
  x=floor(n*rand());
end
```

Démonstration : On note X la variable aléatoire rendue par cette fonction. Comme $\mathbb{P}(0 \leq \texttt{rand()} < 1) = 1$, on a $\mathbb{P}(0 \leq \texttt{n*rand()} < n) = 1$ et

$$\mathbb{P}(\texttt{floor(n*rand())} \in \{0, 1, ..., n-1\}) = 1.$$

Donc X prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., n-1\}$.

Maintenant, soit $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\texttt{floor(n*rand())} = k) = \mathbb{P}(k \leq \texttt{n*rand()} < k+1) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} \leq \texttt{rand()} < \frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat souhaité. ■

Méthode 2 : En utilisant la méthode générale de simulation d'une variable aléatoire discrète.

1.2.5 Loi uniforme sur $[a, b]$

On souhaite simuler X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ pour $a < b$, avec

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x). \tag{1.6}$$

Lemme 3. *Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors, si $a < b$ et a, $b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $X = a + (b - a)U$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.*

Dé : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée : en faisant le changement de variable $x = a + (b - a)u$, on a

$$\mathbb{E}(\varphi(a + (b - a)U)) = \int_0^1 \varphi(a + (b - a)u)\mathrm{d}u = \int_a^b \varphi(x)\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x,$$

ce qui signifie que X est une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$, et on reconnaît ainsi la densité de la loi uniforme sur $[a, b]$. ■

L'algorithme associé s'écrit alors :

```
function x=uniforme2(a,b)
// tirage suivant la loi uniforme sur [a,b]
  x=a+(b-a)*rand();
end
```

1.2.6 Loi exponentielle de paramètre λ

Soit $\lambda > 0$. On souhaite simuler une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ, avec

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x). \tag{1.7}$$

Sa fonction de répartition est $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Cette fonction est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$, d'inverse

$$G(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u). \tag{1.8}$$

Lemme 4. *Si U est de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $G(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.*

En utilisant ce lemme on déduit l'algorithme suivant pour la simulation de la loi exponentielle :

```
function x=exponentielle(a)
// tirage suivant la loi exponentielle de parametre a
  x=- log(rand())/a;
end
```

Ce procédé annonce la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition, que nous présenterons plus tard.

Remarque 5. *Pourquoi a-t-on remplacé $1-U$ par U dans l'algorithme ?*

1.2.7 Loi géométrique de paramètre p

Soit $p \in]0,1]$. On veut simuler une variable aléatoire géométrique de paramètre p, donc de loi

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \delta_k(x). \tag{1.9}$$

Plusieurs méthodes sont possibles.

Méthode 1 : En utilisant la loi exponentielle :

Lemme 5. *Si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $X = 1 + \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right]$ est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.*

Démonstration : Notons $X = 1 + \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right]$. Par définition de la partie entière, X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\left(1 + \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right] = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right] = k-1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(k-1 \leq \frac{\ln U}{\ln(1-p)} < k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(k\ln(1-p) < \ln U \leq (k-1)\ln(1-p)\right) \\
&= \mathbb{P}\left((1-p)^k < U \leq (1-p)^{k-1}\right) \\
&= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\
&= (1-p)^{k-1} p.
\end{aligned}$$

■

L'algorithme correspondant s'écrit :

```
function x=geometrique1(p)
// tirage suivant la loi geometrique de parametre p
  x=1+floor(log(rand())/log(1-p));
```

Méthode 2 : En utilisant la loi de Bernoulli :

Lemme 6. *Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $N = \min\{i : X_i = 1\}$ est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p.*

L'algorithme correspondant s'écrit.

```
function x=geometrique2(p)
// tirage suivant la loi geometrique de parametre p
  x=1;
  while rand()>p, x=x+1;
 end
```

Méthode 3 : En utilisant la méthode générale pour la simulation des variables aléatoires discrètes.

1.2.8 Loi de Poisson de paramètre λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On veut simuler une variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, donc de loi donnée par

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k(x). \tag{1.10}$$

Une variable aléatoire poissonienne ne prend pas ses valeurs dans un ensemble fini, mais on peut étendre la méthode présentée au paragraphe 1.2.3 au cas où X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. En fait, la méthode proposée ici annonce la méthode de la fonction inverse.

Méthode 1 : Cumul des durées exponentielles.

Une première méthode pour la simulation de variables aléatoires de Poisson est issue d'une des propriétés des processus de Poisson, il s'agit du cumul de durées exponentielles.

On sait que si des événements surviennent à des dates séparées par des durées exponentielles de paramètre λ, le nombre d'événements survenant en une unité de temps suit une loi de Poisson de même paramètre.

Lemme 7. *Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre λ. La variable aléatoire définie par*

$$N = 0 \text{ si } X_1 \geq 1 \text{ et } N = \max\{i \geq 1 : \sum_{j=1}^{i} X_j \leq 1\} \text{ sinon,}$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration : Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{k} X_j \leq 1 < \sum_{j=1}^{k+1} X_j\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \lambda^{k+1} \exp(-\lambda(x_1 + \cdots + x_{k+1}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}} \\
&\qquad \times \mathbb{1}_{\{x_{k+1}>1-(x_1+\cdots+x_k)\}}\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{k+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k}} \lambda^{k} \exp(-\lambda(x_1 + \cdots + x_{k}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}} \\
&\qquad \times \left(\int_{1-(x_1+\cdots+x_k)}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x_{k+1})\mathrm{d}x_{k+1}\right)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k}} \lambda^{k} \exp(-\lambda(x_1 + \cdots + x_{k}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}} \exp(-\lambda) \\
&\qquad \times \exp(\lambda(x_1 + \cdots + x_k))\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k \\
&= \lambda^k \exp(-\lambda) \textstyle\int_{\mathbb{R}_+^k} \mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}}\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $\ldots$, $s_k = x_1 + \cdots + x_k$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^k} \mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}}\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k &= \int_{\mathbb{R}_+^k} \mathbb{1}_{\{s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_k\leq 1\}}\mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_k \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}s_k \int_0^{s_k} \mathrm{d}s_{k-1} \ldots \int_0^{s_2} \mathrm{d}s_1 = \frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Remarque 6. *Il faut donc simuler des variables aléatoires exponentielles de paramètre λ et compter le nombre de simulations nécessaires pour dépasser 1, ou bien simuler des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 et compter le nombre de simulations nécessaires pour dépasser λ.*

Remarque 7. *Soient $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, alors si $X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(U_i)$, les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre λ, et*

$$\sum_{j=1}^{i} X_j \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{j=1}^{i} U_j\right) \leq 1 \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{i} U_j \geq \exp(-\lambda).$$

L'algorithme s'écrit :

```
function x=poisson(a)
// tirage suivant la loi de Poisson de parametre a
  test=exp(-a);x=0;prod=rand();
  while (prod>=test), x=x+1; prod=prod*rand(); end;
```

Méthode 2 : En utilisant la méthode générale pour les variables aléatoires discrètes.

On sait que

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow p_k = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\text{pour } k \in \mathbb{N})$$

ce qui implique que

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1}p_k,$$

et en notant P_k la somme des p_j pour $0 \leq j \leq k$, ($P_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$), on a

$$P_{k+1} = P_k + \frac{\lambda}{k+1}p_k.$$

On simule donc une variable de Poisson de paramètre λ en prenant

$$X = \sum_{k\geq 0} k\mathbb{1}_{\{P_{k-1}<U\leq P_k\}}$$

avec la convention $P_{-1} = 0$.

Cet algorithme est assez simple à programmer.

1.2.9 Loi gaussienne centrée réduite : Méthode de Box-Muller

La loi normale n'a pas une densité à support compact et on ne connaît pas d'expression simple de l'inverse de sa fonction de répartition. Nous utiliserons le résultat suivant pour sa simulation :

Lemme 8. *Soit R une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et θ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, supposées de plus indépendantes. Alors, si on pose $X = \sqrt{R}\cos(\theta)$ et $Y = \sqrt{R}\sin(\theta)$, les variables aléatoires X et Y sont i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite.*

Ceci conduit à une méthode de simulation simple pour une loi gaussienne, basée sur la simulation de deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. C'est la méthode de Box-Muller.

```
function [x,y]=boxmuller
// tirage de deux N(0,1) independantes
  r=sqrt(-2*log(rand())); t=2*%pi*rand();
  x=r*cos(t); y=r*sin(t);
end
```

1.3 Méthodes générales

1.3.1 Méthode générale pour une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) = \{x_0, x_1, ...\} = \{x_i\}_{i \in I}$ avec $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{0, 1, \dots, n\}$. Pour tout $i \in I$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. On rappelle que $p_i \geq 0$ et $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Rappelons les idées générales de la section 1.2.3. L'algorithme suivant simule une variable représentative pour cette loi :

```
function y=simuldiscrete(x,p)
// simulation d'une va de loi discrete,
// x=vecteur des valeurs prises, p=vecteur des probabilites
  u=rand(); q=p(1); i=0;
  while (u>q); i=i+1; q=q+p(i); end;
  y=x(i);
end
```

Démonstration : En effet, on a : $\mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(\texttt{rand()} \leq p_0) = p_0$ et pour $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i < \texttt{rand()} \leq \sum_{i=0}^{k} p_i\right) = p_k.$$

■

Remarque 8. *Le nombre N de tests nécessaires satisfait $N = 1$ ssi $u \leq p_0$, et pour $i > 1$,*

$$N = i \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{i-1} p_i < u \leq \sum_{j=0}^{i} p_i.$$

On a donc intérêt à réordonner les $(x_i)_{i \geq 0}$ dans l'ordre des $(p_i)_{i \geq 0}$ décroissants.

1.3.2 Méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition

On veut simuler une variable aléatoire X de fonction de répartition F.

La méthode utilisée pour simuler une loi exponentielle est en fait générale : dès que l'on sait inverser une fonction de répartition F, il est très facile de simuler une variable aléatoire de fonction de répartition F.

Lemme 9. *Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et F une fonction de répartition bijective de $]a,b[$ dans $]0,1[$ d'inverse F^{-1}. Alors $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire de fonction de répartition F.*

Démonstration : On pose $X = F^{-1}(U)$. Cette variable aléatoire prend ses valeurs dans $]a,b[$. Remarquons que nécessairement F est strictement croissante de $]a,b[$ dans $]0,1[$. Soit $t \in]a,b[$:

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$

Donc la fonction de répartition de X est bien F. ■

Remarque 9. *L'hypothèse de la connaissance de F^{-1} n'a de sens que si F est strictement croissante. Cependant, même dans ce cas, il se peut que F^{-1} n'ait pas d'expression analytique simple, c'est le cas par exemple pour la loi normale.*

Si on note $\phi(x)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t,$$

il n'existe pas de formulation simple de $\phi(x)$ et encore moins de $\phi^{-1}(x)$, la méthode de la fonction inverse ne peut donc pas s'appliquer directement à la loi normale.

Il existe cependant des polynômes donnant de bonnes approximations de $\phi(x)$ et de $\phi^{-1}(x)$ qui permettent donc d'appliquer la méthode de la fonction inverse à la loi normale moyennant cette approximation.

1.3.3 Algorithme par rejet

On veut simuler une variable aléatoire X de densité f et de fonction de répartition F.

Exemple 3. Commençons par un exemple très simple : comment simuler une loi uniforme sur le disque unité $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$?

```
function X=disque
// simule un point uniformement sur le disque unite
  X=2*rand(1,2)-[1,1];
while (norm(X)>1),
    X=2*rand(1,2)-[1,1];
end
```

L'idée est la suivante : on tire des points uniformément dans le carré $[0,1] \times [0,1]$, et on les jette jusqu'à en obtenir un qui tombe dans le disque. La loi du point obtenue est la loi d'un point tiré uniformément dans le carré conditionnellement à être dans le disque, ce qui est encore la loi uniforme sur le disque.

Remarque 10. *Quelle est la loi du nombre N de passages dans la boucle ?*

Lemme 10. *Soit X une variable aléatoire de densité f (sur $\mathbb{R}^d$) à simuler. On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ et une densité g (sur $\mathbb{R}^d$ aussi, facile à simuler) tels que*

$$\forall x, \quad f(x) \leq kg(x).$$

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et Z une variable aléatoire, indépendante de U, de densité g. On pose $V = kUg(Z)$. Alors, la loi de Z conditionnellement à l'événement $\{V < f(Z)\}$ a pour densité f.

Remarque 11. *Notons que nécessairement $k \geq 1$ (car f, g sont des densités).*

Remarque 12. *Il est très important de noter qu'on doit choisir la constante k la plus petite possible pour minimiser le nombre de rejets : plus la majoration est grossière, plus il faut des tirages pour obtenir une valeur acceptable.*

Démonstration : On fait la démonstration pour le cas $d = 1$. Notons que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\frac{f(z)}{kg(z)} \leq 1$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V < f(Z)) &= \mathbb{P}(kUg(Z) < f(Z)) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{\{kug(z) < f(z)\}} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(z) \frac{f(z)}{kg(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Évaluons ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z \leq t\} \cap \{V < f(Z)\}) &= \int_{-\infty}^{t} g(z) \left(\int_{0}^{1} \mathbb{1}_{\{kug(z)<f(z)\}} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{t} g(z) \frac{f(z)}{kg(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{t} f(z) \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathbb{P}(Z \leq t | V < f(Z)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(z)\mathrm{d}z$, donc la loi conditionnelle de Z sachant que $\{V < f(Z)\}$ a bien pour densité f.
Dans $\mathbb{R}^d$, on utilise la généralisation de la fonction de répartition. ∎

On obtient donc l'algorithme de simulation par rejet (on suppose qu'on possède une fonction `simulg` qui simule une variable aléatoire de densité g) :

```
function z=simulf
// simule par rejet une va de densite f
  u=rand();
  z=simulg;
  v=k*u*g(z);
  while (v>=f(z));
      u=rand();
      z=simulg;
      v=k*u*g(z);
end;
```

Démonstration : Notons N le nombre de tests fait lors de cette fonction. N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Notons $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite des appels à la fonction `rand()`, et $(Z_n)_{n\geq 1}$ la suite des appels à la fonction `simulg`. Toutes ces variables aléatoires sont indépendantes, les premières de loi uniforme sur $[0,1]$, les secondes de densité g. On note $V_n = kU_n g(Z_n)$, et on note X la sortie de la fonction.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Evaluons

$$\mathbb{P}(X \leq t \text{ et } N = 1) \quad = \quad \mathbb{P}(V_1 < f(Z_1) \text{ et } Z_1 \leq t) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{t} f(z)\mathrm{d}z$$

par la démonstration précédente. Soit maintenant $i \geq 2$. Par indépendance, et comme précédemment :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \leq t \text{ et } N = i) \\
&\quad = \mathbb{P}(V_1 \geq f(Z_1),\ V_2 \geq f(Z_2),\ \ldots,\ V_{i-1} \geq f(Z_{i-1}),\ V_i < f(Z_i),\ Z_i \leq t) \\
&\quad = \mathbb{P}(V_1 \geq f(Z_1))\mathbb{P}(V_2 \geq f(Z_2))\ldots\mathbb{P}(V_{i-1} \geq f(Z_{i-1}))\mathbb{P}(V_i < f(Z_i),\ Z_i \leq t) \\
&\quad = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i-1} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{t} f(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Finalement (rappelons que $k \geq 1$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq t) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leq t \text{ et } N = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i-1} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{t} f(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{t} f(z)\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

donc la densité de X est bien f. ■

1.3.4 Simulation par composition

Exemple 4. Soit F et G deux fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$. On construit une variable aléatoire X de la façon suivante : on lance une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $1/3$ et sur face avec probabilité $2/3$, si pile sort, on tire un nombre au hasard suivant la loi donnée par F, sinon, on tire un nombre au hasard suivant la loi donnée par G. Déterminer la fonction de répartition H de X.

L'exemple précédent est un exemple de mélange de variables aléatoires. On suppose maintenant qu'on veut simuler une variable aléatoire X de fonction de répartition $F = \sum_{i=1}^{n} \theta_i F_i$, où les θ_i sont des poids : $\theta_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$ et les F_i sont des fonctions de répartition dont les lois sont faciles à simuler. On suppose qu'on a à notre disposition des fonctions `simulFi` qui simulent des variables aléatoires de fonction de répartition F_i et une fonction `simulTheta` qui simule une variable aléatoire Θ à valeur dans $\{1, ..., n\}$ telle que $\mathbb{P}(\Theta = i) = \theta_i$.

```
function x = melange
// simulation par melange
  i=simulTheta;
  x=simulFi;
end
```

Cette méthode se généralise immédiatement à un nombre infini dénombrable de poids $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et même à un mélange "continu" de lois : on suppose qu'on veut simuler une variable aléatoire X de densité $f(z) = \int_\theta g(\theta) f_\theta(z) \mathrm{d}\theta$, où g est une densité de probabilité, ainsi que tous les f_θ. L'algorithme est alors simple : on tire θ suivant g, puis x suivant f_θ.

1.4 Simulation de vecteurs aléatoires

1.4.1 Cas indépendant

Supposons qu'on souhaite simuler Z un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Si ses composantes sont indépendantes, on est ramené au cas de la simulation de variables aléatoires réelles indépendantes traité dans les sections précédentes (on rappelle que les sorties successives de `rand` donnent des variables aléatoires *indépendantes* de loi uniforme sur $[0,1]$). Le problème est différent quand les coordonnées ne sont pas indépendantes.

1.4.2 Vecteur gaussien

Un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$ est caractérisé par un vecteur moyenne $m \in \mathbb{R}^d$, et une matrice de covariance K, de taille $d \times d$, symétrique et positive. On suppose pour l'instant que K est *définie positive.*

Théorème 1 (Décomposition de Cholesky)**.** *Si K est une matrice symétrique définie positive de taille $d \times d$, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que :*

$$K = L^t L.$$

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous strictement positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

En pratique on cherche L par coefficients indéterminés et identification, colonne par colonne. Voir l'exemple juste après.

Remarque 13. *Si K est seulement semi-définie positive, la décomposition de Cholesky existe encore mais elle n'est plus unique.*

Lemme 11. *Soit T un vecteur gaussien de dimension d, centré et de matrice de covariance I_d (dont les coordonnées sont des variables aléatoires i.i.d. normales centrées réduites). Soit $m \in \mathbb{R}^d$, et K une matrice définie positive de taille $d \times d$. Soit L la matrice triangulaire inférieure donnée par la factorisation de Cholesky de K.*

Alors le vecteur aléatoire $Z = m + LT$ est un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance K.

Démonstration : Comme L est une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, Z est encore un vecteur gaussien d-dimensionnel. Pour l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(m + LT) = m + L\mathbb{E}(T) = m,$$

puisque T est centré. Pour la matrice de covariance, comme celle de T est I_d,

$$\mathbb{E}((Z-m)^t(Z-m)) = \mathbb{E}(LT^tT^tL) = L\mathbb{E}(T^tT)^tL = LI_d^tL = L^tL = K.$$

■

Exemple 5. On veut simuler le vecteur gaussien Z de $\mathbb{R}^3$ de moyenne m et de matrice de covariance K avec

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

On commence par chercher la matrice de factorisation de Cholesky L par coefficients indéterminés et identification :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

On calcule LL^t et on identifie, colonne par colonne :

1. $l_{11}^2 = k_{11} = 1 \Rightarrow l_{11} = 1.$
2. $l_{11}l_{21} = k_{21} = -1 \Rightarrow l_{21} = -1.$
3. $l_{11}l_{31} = k_{31} = 0 \Rightarrow l_{31} = 0.$
4. $l_{21}^2 + l_{22}^2 = k_{22} = 5 \Rightarrow l_{22} = 2.$
5. $l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = k_{32} = 6 \Rightarrow l_{32} = 3.$
6. $l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = k_{33} = 1 \Rightarrow l_{33} = 1.$

Donc

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} T,$$

où T est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ dont les trois composantes sont *i.i.d.* centrées réduites.

1.4.3 Cas général

1. Le cas d'une *v.a.* discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ se traite comme celui d'une variable aléatoire réelle discrète.

2. La méthode de rejet a été présentée dans la cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

3. On peut encore utiliser les lois conditionnelles. Nous allons illustrer cette méthode, dite **méthode récurrente**, par un exemple :

Exemple 6. On veut simuler un vecteur (X, Y) de loi uniforme sur le triangle ABC avec $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ et $C = (0, 1)$.

On commence par déterminer la densité de cette loi :

$$f(x, y) = 2\mathbb{1}_{0 \le x \le 1}\mathbb{1}_{0 \le y \le 1}\mathbb{1}_{x \le y}.$$

On peut alors calculer la densité de X :

$$f_X(x) = 2(1 - x)\mathbb{1}_{0 \le x \le 1},$$

puis la densité de la loi conditionnelle de Y sachant X :

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{1 - x}\mathbb{1}_{x \le y \le 1}.$$

Pour la simulation, on procède maintenant de la façon suivante : on simule X suivant sa densité (en utilisant par exemple la méthode de la fonction de répartition), on obtient une valeur x, puis on simule Y suivant la densité $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{1-x}\mathbb{1}_{x \le y \le 1}$ (on reconnaît par exemple une loi usuelle).

Remarque 14. *Remarquons que la seconde étape ressemble beaucoup à la simulation par mélange.*

1.5 Exercices

Exercice 1. Supposons que la loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{5}\delta_{-1} + \frac{2}{5}\delta_0 + \frac{2}{5}\delta_1.$$

1. Écrire un algorithme permettant de simuler une réalisation de la v.a. X.
2. Écrire une fonction permettant de simuler un n-échantillon de X.
3. Représenter l'évolution de la fréquence empirique de la valeur 0 en fonction de la taille de l'échantillon. Tester pour plusieurs choix de taille maximale N d'échantillon. Qu'observez-vous ? Quel résultat théorique venez-vous d'illustrer ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Proposer une fonction qui construit une réalisation de X.
2. Proposer une fonction qui renvoie un k-échantillon de cette variable aléatoire.
3. Tester ces résultats en Scilab pour différentes valeurs de p et k.

Exercice 3. Simuler une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres (n, p) pour différentes valeurs de n et p.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots n\}$. Proposer un algorithme en Scilab pour la simulation de cette loi :

1. En utilisant la simulation d'une loi de probabilité discrète sur un ensemble fini.
2. En utilisant le résultat suivant : Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors $[nU] + 1$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

Simuler les résultats pour différentes valeurs de n. Comparer les deux approches.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Proposer un algorithme pour la simulation de cette loi et tester le pour différentes valeurs de a et b.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Proposer un algorithme pour la simulation de cette loi en utilisant la méthode de la fonction inverse.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p. Proposer un algorithme pour la simulation de cette loi :

1. En utilisant le résultat : Si $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $N = \min\{i; Y_i = 1\}$ suit une loi géométrique de paramètre p.
2. En utilisant le résultat : Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ alors $G = 1 + \left[\dfrac{\ln U}{\ln(1-p)}\right]$ suit la loi géométrique de paramètre p.
3. Comparer les résultats en insistant sur le temps de calcul.

Exercice 8. Soit X_n une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p_n = \lambda/n$ et Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $[\theta Y] + 1$ où $[y]$ désigne la partie entière de y et $\theta > 0$?
2. Simuler un N-échantillon de X_n à l'aide d'une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre 1.
3. Établir la convergence (en loi) de la suite $(X_n/n)_n$ vers la variable Y/λ.
4. Illustrer numériquement cette convergence.

Exercice 9. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Sa densité est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

On définit une variable aléatoire $Z = 1 + [Y]$, où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ note la partie entière de x.

1. Quelle est la loi de Z ? Justifier votre réponse.
2. Soient $p \in]0,1[$ et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Trouver la constante λ telle que
$$1 + \left[-\frac{\ln U}{\lambda}\right] \sim \mathcal{G}(p).$$
3. Utiliser ce résultat pour écrire un algorithme pour la simulation d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p.
4. Donner des résultats numériques de votre algorithme pour $p = 0.1$, $p = 0.5$ et $p = 0.9$ (4 valeurs pour chaque choix de p).

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Simuler cette variable aléatoire en utilisant le résultat suivant :
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre λ. Alors la variable aléatoire :

$$N = \begin{cases} 0, & \text{si } X_1 \geq 1 \\ \max\{i \geq 1;\ \sum_{j=1}^{i} X_j \leq 1\}, & \text{sinon} \end{cases}$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi normale de moyenne m et variance σ^2. Simuler cette variable aléatoire en utilisant la méthode de Box-Muller.

Exercice 12. En utilisant la méthode de la fonction de répartition, simuler une loi de Cauchy. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$. Sa densité est donée par :

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérfier que f est une densité.
2. Calculer sa fonction de répartition F.
   (*Indication :* $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}$.)
3. En déduire G l'inverse de la fonction F.
4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. En utilisant la périodicité de la fonction tan, montrer que

   $$\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) = \tan(\pi U), \quad \text{en loi .}$$

   (*Indication :* Montrer que pour toute fonction φ continue et bornée on a $\mathbb{E}\left\{\varphi\left(\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)\right)\right\} = \mathbb{E}\{\varphi(\tan(\pi U))\}$.)
5. Écrire un algorithme pour simuler une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre a.
6. Donner des réalisations de votre code Scilab pour $a = 10$ et $a = 1$ (4 valeurs numériques pour chaque choix de a).
7. Tracer la vraie densité et un histogramme à l'aide de cet algorithme pour $a = 10$ et $a = 1$. Utiliser un échantillon de taille 10000.

Exercice 13. Simulation de la gaussienne par rejet par rapport à la double exponentielle. On pose

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \text{ et } g(z) = \frac{1}{2}\exp(-|z|).$$

1. Montrer que g est bien une densité sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une constante k satisfaisant $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) \leq kg(z)$. On aura intérêt à prendre k la plus petite possible : $[k = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} = 1.3155]$.
3. Écrire un algorithme de simulation d'une loi gaussienne centrée réduite par rejet.

Exercice 14. Considérons l'algorithme de la méthode par rejet. Montrer que le nombre de passage dans la boucle suit une loi géométrique dont le paramètre ne dépend que de k. Justifier alors l'intérêt de prendre k la plus petite possible.

Exercice 15. Simuler un mélange d'exponentielles $F(x) = \alpha(1-\exp(-ax)) + (1-\alpha)(1-\exp(-bx))$, avec $\alpha \in [0,1]$.

Exercice 16. Simuler une variable aléatoire de loi $\frac{1}{2}\delta_0(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 17. Simuler le vecteur gaussien Z de $\mathbb{R}^3$ de moyenne m et de matrice de covariance K avec

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Simuler un vecteur (X, Y) de loi uniforme sur le triangle ABC avec $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ et $C = (0,1)$.

Exercice 19. Simuler un vecteur de loi $f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où

$$f(x,y,z) = 6\mathbb{1}_{x>0,y>0,z>0}\mathbb{1}_{x+y+z<1} :$$

1. En utilisant les lois conditionnelles.
2. Par la méthode du rejet.
3. Comparer.

Exercice 20. Simuler un vecteur de loi $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}1_{x>0}1_{y>0}.$$

Simulation de variables aléatoires

Dans tout ce qui suit U note une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d., avec U_1 de loi uniforme sur $[0,1]$.

Loi	**Méthode de simulation**
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$	$\mathbb{1}_{\{U \leq p\}}$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq p\}}$
Uniforme sur $\{0,\ldots,n-1\}$	$[nU]$
Uniforme sur $[a,b]$	$a+(b-a)U$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$-\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$1+\left[\dfrac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\right]$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\min\left\{n \in \mathbb{N} : \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i \leq e^{-\lambda}\right\}$
Gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m+\sigma\sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$
Cauchy $\mathcal{C}(a)$	$a\tan(\pi U)$

Chapitre 2

Méthodes de Monte Carlo

2.1 Introduction

On appelle *Méthode de Monte Carlo* toute méthode numérique basée sur le tirage de nombres aléatoires. Ces méthodes sont utilisées dans de nombreux domaines : en physique nucléaire, en géophysique, en finance, en statistiques, en chimie, etc.

Origine On attribue l'origine de la méthode de Monte Carlo au comte de Buffon qui en 1777 a proposé le problème de l'aiguille de Buffon qui fournit une méthode pour le calcul de π basée sur la réalisation d'expériences répétées.

Aiguille de Buffon : Sur un parquet composé de planches parallèles de même largeur a, on jette des aiguilles de même longueur b au hasard. La probabilité qu'une aiguille tombe à cheval sur deux planches est, pour $b < a$, égale à $\frac{2b}{\pi a}$. Ceci donne une approximation de π en répétant le jet des aiguilles.

Le vrai développement de la méthode de Monte Carlo est lié à l'apparition des ordinateurs.

2.1.1 Idée de la méthode pour le calcul d'intégrales

Supposons qu'on souhaite calculer par une méthode numérique l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

pour une fonction intégrable $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. On utilise alors des formules du type $\sum_{i=1}^n \theta_i f(x_i)$ où $\theta_i \geq 0$ sont tels que $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ et $x_i \in [0,1]$.

Suivant le choix de θ_i et x_i on peut construire et proposer différentes méthodes d'approximation.

Une méthode de Monte Carlo est du même type : on choisit $\theta_i = \frac{1}{n}$ et on tire les x_i selon la loi uniforme sur $[0,1]$. Cette méthode converge avec une vitesse de l'ordre $\frac{C}{\sqrt{n}}$. En dimension 1 cette vitesse peut paraître faible lorsqu'on la compare aux autres méthodes d'intégration déterministe. Mais toutes ces méthodes numériques s'effondrent lorsque la dimension augmente : dans $\mathbb{R}^d$ il faut n^d points pour garder une erreur constante. Le gros avantage de la méthode de Monte Carlo est d'être *insensible à la dimension*.

2.2 Description de la méthode de Monte Carlo

Pour utiliser une méthode de Monte Carlo il faut tout d'abord mettre sous forme d'une espérance la quantité que l'on cherche à évaluer. En admettant que cela est possible on doit donc calculer une quantité de la forme $\mathbb{E}(X)$ avec X une variable aléatoire.

Pour pouvoir évaluer $\mathbb{E}(X)$ il est souhaitable de savoir simuler une v.a. selon la loi de X. Il est ainsi possible de simuler une suite des v.a.i.i.d. $(X_i)_{i\geq 1}$ de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on approche ensuite $\mathbb{E}(X)$ par la moyenne arithmétique des $(X_i)_{i\geq 1}$

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

2.3 Convergence de la méthode et vitesse de convergence

Comme pour toute méthode numérique, nous souhaitons répondre aux deux questions suivantes :

1. Pourquoi la méthode converge ?
2. A quelle vitesse la méthode converge ?

La réponse a ces deux questions est fournie par deux théorèmes fondamentaux de la théorie des probabilités.

2.3.1 Convergence

La réponse à la première question est donnée par la loi forte des grands nombres.

Théorème 1. ***(Loi forte des grands nombres)*** *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et intégrables, de même loi que la variable aléatoire X. Alors, presque sûrement (et dans L^1),*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X).$$

Remarque 1. *Ce résultat précise une limite théorique pour la méthode de Monte Carlo, on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables.*

2.3.2 Vitesse de convergence

Le théorème de la limite centrale précise la convergence. Ce théorème donne le comportement asymptotique de l'erreur, qui finit par ressembler à une loi gaussienne centrée.

Théorème 2. ***(Théorème de la limite centrale)*** *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et on note $\sigma^2 = Var(X)$. Alors,*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\mathbb{E}(X) - \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots X_n\right)\right) \text{ converge en loi vers } G,$$

où G note une variable aléatoire normale centrée et réduite.

Remarque 2. *De ce théorème on peut déduire que pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ on a*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a \leq \mathbb{E}(X) - \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots X_n\right) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}b\right\} &= \mathbb{P}(a \leq G \leq b)\\ &= \phi(b) - \phi(a)\\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,\end{aligned}$$

où ϕ note la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Remarque 3. *Le théorème central limite ne permet pas de borner l'erreur puisque le support de la gaussienne est égal à $\mathbb{R}$ tout entier. On présente alors souvent l'erreur de la méthode de Monte Carlo soit en donnant l'écart type de l'erreur, c'est-à-dire $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, soit en donnant un intervalle de confiance* *à 95 % pour le résultat. Ceci signifie que le résultat obtenu se trouve avec une probabilité de 95 % dans l'intervalle donné. Avec les propriétés de la loi normale on a*

$$\mathbb{P}\{|G| \leq 1.96\} \approx 0.95$$

ce qui conduit à un intervalle de confiance du type

$$\left[m - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

où $m = \mathbb{E}(X)$.

Remarque 4. *On remarque ainsi que, si l'on souhaite diminuer l'erreur, il faut augmenter n et/ou diminuer σ.*

2.4 Une application

Nous allons étudier sur un exemple la construction et les propriétés de la méthode de Monte Carlo.

Cadre : Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On veut calculer une valeur approchée de

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x.$$

Cette intégrale peut par exemple provenir d'un problème concret : en fiabilité, calculer la durée moyenne de vie (Mean Time To Failure MTTF) est souvent impossible analytiquement.

Nous admettons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

Hypothèses :
1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g^2(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
2. Il existe une densité f sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)}\mathrm{d}x < +\infty$.
3. On sait simuler une variable aléatoire de densité f et on a à notre disposition une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a.i.i.d. de densité f.

Buts :
1. Donner une valeur approchée $\hat{I}_n$ de I en fonction de $X_1, ..., X_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Écrire l'algorithme.
3. Étudier sa convergence et estimer l'erreur.
4. Améliorer la vitesse et comparer avec d'autres méthodes de calcul d'intégrales.

2.5 Loi des grands nombres et estimateur

Pour calculer $I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x$, l'idée est de l'écrire comme l'espérance d'une fonction de la variable aléatoire X que l'on sait simuler. On pose pour tout $i \geq 1$, $Y_i = \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$. Les variables aléatoires $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi ; leur espérance commune est

$$\mathbb{E}(Y_1) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)\mathrm{d}x = I.$$

On introduit naturellement l'*estimateur* suivant :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}.$$

Comme $\mathbb{E}(\hat{I}_n) = I$, l'estimateur est *sans biais*. En appliquant la loi forte des grands nombres on déduit :

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de densité f. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{f(X_i)} = I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x \quad p.s. \text{ et dans } L^1.$$

2.6 Variance, erreurs et intervalle de confiance

2.6.1 Variance et erreurs

Exemple 1. Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On pose $\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{I}_n$ en fonction de l'espérance et la variance de Y_1.

Calculons la variance de Y_1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1^2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f^2(x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)}\mathrm{d}x < +\infty \text{ et} \\ \mathrm{Var}(Y_1) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)}\mathrm{d}x - I^2.\end{aligned}$$

On a immédiatement

$$\mathrm{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{2.1}$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n converge vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n - I) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0,1),$$

et signifie intuitivement que, pour n très grand, $\hat{I}_n - I \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} G$, où G est une gaussienne centrée réduite. Il est donc naturel d'introduire l'erreur standard $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et l'erreur relative $\frac{1}{I}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Cependant, la variance σ^2 est en général inconnue (en particulier, elle dépend de I). On va donc la remplacer par l'estimateur classique de la variance :

Estimateur de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{I}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\hat{I}_n^2\right).$$

On sait (voir cours de statistique) que s_n^2 converge *p.s.* vers σ^2. Pour estimer l'erreur standard et l'erreur relative, on remplace donc σ^2 par s_n^2 :

Nous allons donc utiliser les approximations suivantes :

Erreur standard : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$

Erreur relative : $\dfrac{1}{I}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \dfrac{1}{\hat{I}_n}\dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$.

En pratique : Dans l'algorithme de Monte Carlo pour calculer $\hat{I}_n$, il sera judicieux d'ajouter le calcul de s_n^2 pour avoir en même temps une estimation de l'erreur.

2.6.2 Intervalle de confiance par TCL

On peut maintenant donner des intervalles de confiance pour notre estimation, dans l'utilisation du théorème central limite, on remplace la variance σ^2 par son estimation s_n^2 :

$$\mathbb{P}(|\hat{I}_n - I| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}|\hat{I}_n - I| \leq \frac{\sqrt{n}}{s_n}\varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}\varepsilon\right) - 1.$$

Pour un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 95\%$, on prend

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}\varepsilon\right) - 1 = \alpha = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}\varepsilon\right) = \frac{\alpha+1}{2} = 0.975$$

et donc $\frac{\sqrt{n}}{s_n}\varepsilon = 1.96$, ou encore $\varepsilon = 1.96\frac{s_n}{\sqrt{n}}$.

L'intervalle de confiance pour I au niveau 95% est

$$\left[\hat{I}_n - 1.96\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + 1.96\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right].$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$ proche de 1. *L'intervalle de confiance au niveau* α est

$$\left[\hat{I}_n - \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right].$$

Pour le niveau de confiance α fixé, la largeur de l'intervalle de confiance décroît en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. On dit que la méthode de Monte Carlo a une vitesse de convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

En pratique : On peut aussi parfois majorer la variance, et utiliser l'inégalité de Tchebychev pour obtenir des intervalles de confiance.

2.7 Algorithme de Monte Carlo

On suppose qu'on a à notre disposition une procédure `simulf` dont les différents appels simulent une suite de v.a.i.i.d. de densité f. La fonction `cdfnor("X",0,1,p,1-p)` donne l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite en p :

$$x = \texttt{cdfnor("X",0,1,p,1-p)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(G \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = p,$$

où G suit la loi normale centrée réduite.

Dans l'algorithme qui suit, on fixe le niveau de confiance α (proche de 1), et la largeur de l'intervalle de confiance 2δ au niveau de confiance α. Le nombre n de simulations nécessaires est décidé par un test, et est par conséquent aléatoire :

Entrées de l'algorithme :

```
function [n,I,e] = montecarlo(alpha,delta)
// estimation de I par Monte Carlo
// alpha : niveau de confiance alpha
// 2delta : largeur intervalle de confiance
// n : nombre de simulations effectuees
// I : valeur estimee, e:erreur standard
  p=(alpha+1)/2; z= cdfnor("X",0,1,p,1-p)};
  x=simulf; y=g(x)/f(x);
```

```
S1=y; S2=y^2;
x=simulf; y=g(x)/f(x);
n=2; S1=S1+y; S2=S2+y^2; V=(S2-S1^2/n)/(n-1);
while (z*sqrt(V/n)>delta);
  x=simulf; y=g(x)/f(x);
  n=n+1; S1=S1+y; S2=S2+y^2; V=(S2-S1^2/n)/(n-1);
end;
I=S1/n; e=sqrt(V);
```

Commentaires

On stocke $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ dans `S1`, $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ dans `S2`, l'estimateur de la variance s_n^2 dans `V`. Le test regarde si la demi-largeur de l'intervalle de confiance après n simulations, $z\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est supérieure à celle souhaitée, δ, auquel cas on refait une simulation.

Conclusions

1. L'algorithme est extrêmement facile à mettre en place.
2. Il ne suppose pas de régularité sur g, autre que l'intégrabilité.
3. L'erreur pour n simulations est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ce qui justifie l'appellation "méthode de vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$" :
   — Cette vitesse est indépendante de la dimension : c'est donc un avantage quand la dimension est grande, par contre en dimension petite, cette méthode est peu compétitive par rapport aux méthodes d'analyse numérique, en particulier quand la fonction à intégrer est régulière.
   — On voit l'importance de la variance σ^2. Une voie pour améliorer l'erreur sera d'essayer de réduire la variance.
4. C'est une méthode aléatoire : le critère de sortie de l'algorithme est aléatoire.

2.8 Choix d'une méthode de Monte Carlo

Supposons qu'on ait le choix entre deux méthodes de Monte Carlo MC1 et MC2.

	Densité	Var	Coût par sim.	Nbr. de sim.	Coût total	Erreur std
MC1	f_1	σ_1^2	c_1	n_1	$n_1 c_1$	$\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$
MC2	f_2	σ_2^2	c_2	n_2	$n_2 c_2$	$\dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}$

Laquelle doit-on choisir ? On rappelle que

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}_f\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)}\mathrm{d}x - \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

Avec erreurs standards égales : $\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} = \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$.
Pour une même erreur, la meilleure méthode est celle qui coûte le moins cher en calcul : on compare donc les coûts totaux de simulation $n_i c_i$:

$$\frac{n_1 c_1}{n_2 c_2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{c_1}{c_2}.$$

Avec coûts de simulation égaux : $n_1 c_1 = n_2 c_2$.
Pour un même coût de simulation, la meilleure méthode est celle qui offre la plus petite erreur standard : on compare donc les erreurs standards, ou plutôt les erreurs standards au carré $\frac{\sigma_i^2}{n_i}$:

$$\frac{\sigma_1^2 n_2}{\sigma_2^2 n_1} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{c_1}{c_2}.$$

Dans les deux cas, la meilleure méthode est celle qui minimise $c_i \sigma_i^2$.

On a vu que dans l'erreur $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est intrinsèque, et que pour réduire l'erreur, on peut essayer de diminuer la variance σ^2. Il faudra cependant veiller à ce que cette diminution de variance ne soit pas compensée par une augmentation exagérée des coûts de calcul.

2.9 Exemples

Nous allons construire plusieurs versions de la méthode de Monte Carlo pour la calcul approché de $\frac{\pi}{4}$. Afin de les comparer, nous allons écrire à chaque fois la variance de l'estimation après n simulations sous la forme $\frac{C}{n}$ et comparer les différents C.

(1) Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$: Technique du hit or miss

On considère le carré $[0,1]^2$, et on trace le quart de disque D centré en 0 et de rayon 1. On remarque que l'aire du quart de disque vaut $\frac{\pi}{4}$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]^2$, on pose

$$Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i \in D\}}.$$

On a $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(X_1 \in D) = \frac{\pi}{4}$, et donc

$$\hat{I}_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

est un estimateur de $\frac{\pi}{4}$. La variance est ici

$$C^{(1)} = \mathrm{Var}(Y_1) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0.168.$$

(2) Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$: Moyenne empirique sur $[0,1]$

L'équation du quart de cercle est donnée par $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, on pose

$$Y_i = g(X_i).$$

On a $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(X_1 \in D) = \frac{\pi}{4}$, et

$$\hat{I}_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

est un autre estimateur de $\frac{\pi}{4}$. La variance est ici

$$\begin{aligned} C^{(2)} &= \mathrm{Var}(Y_1) = \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= \int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.050. \end{aligned}$$

Comparaison

La variance est plus faible dans le second cas, la seconde méthode est donc meilleure. C'est encore vrai dans le cas d'une fonction $g : [0,1] \to [0,1]$ générale : la technique de la moyenne empirique a une variance plus petite que la technique hit or miss (voir Rubinstein [?], paragraphe 4.2.3).

2.10 Techniques de réduction de variance

But : On a vu que l'erreur standard est

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}_f \frac{g(X)}{f(X)} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x - I^2.$$

Le facteur en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ étant intrinsèque à la méthode de Monte Carlo, on cherche à réduire la variance σ^2, pour diminuer l'erreur commise, à nombre de simulation fixé.

2.10.1 Échantillonnage préférentiel (importance sampling) : choix de la densité f

Dans l'estimation précédente, on a la choix de la densité f. Si le support de g est un ensemble E de mesure de Lebesgue finie de $\mathbb{R}^d$, la première idée pour choisir f est de prendre simplement la loi uniforme sur E : c'est ce qu'on appelle la *Méthode de Monte Carlo standard.* Ce n'est cependant pas nécessairement le meilleur choix possible.

On a vu que l'erreur était contrôlée par la variance

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x - I^2.$$

Théorème 3. *La variance minimale est égale à* $\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx\right)^2 - I^2$*, et est atteinte pour*

$$f_0(y) = \frac{|g(y)|}{\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx}.$$

Démonstration : Pour montrer que f_0 réalise bien le minimum de la variance, il suffit de vérifier que pour toute densité f sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{|g(x)|} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \mathrm{d}x \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \mathrm{d}x \right)^2. \end{aligned}$$

Mais, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \mathrm{d}x \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|}{\sqrt{f(x)}} \sqrt{f(x)} \mathrm{d}x \right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2}{f(x)} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La valeur du minimum se vérifie facilement. ■

Remarquons que, dans le cas particulier où $g > 0$, la densité optimale est $f = g/I$, auquel cas la variance serait nulle. Ce choix est bien sûr d'intérêt purement théorique, puisque I est inconnu. Cependant...

Échantillonnage préférentiel : Afin de réduire la variance, on essaie d'adapter la densité f à la fonction à intégrer g : on a intérêt à prendre f grande dans les régions où $|g|$ est grande et petite dans les régions où $|g|$ est petite.

(3) Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$: Échantillonnage préférentiel

On reprend la méthode de la moyenne empirique, en essayant de choisir une densité f meilleure que la densité de la loi uniforme sur $[0, 1]$: on peut prendre par exemple une fonction affine décroissante sur $[0, 1]$, comme $f(x) = \frac{3}{2} - x$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1 - x^2}{\frac{3}{2} - x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \frac{1}{\frac{3}{2} - x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \ln(3) \\
&\approx 0,6267
\end{aligned}$$

et donc

$$C^{(3)} = \mathrm{Var}(Y_1) = \int_0^1 \frac{g^2(x)}{f(x)} \mathrm{d}x - I^2 = 0.0099.$$

2.10.2 Échantillonnage stratifié (stratified sampling)

L'idée est de découper le domaine d'intégration en un nombre fini m de parties $D_1, D_2, ..., D_m$ deux-à-deux disjointes :

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} I_i, \text{ avec } I_i = \int_{D_i} g(x) \mathrm{d}x,$$

et d'estimer séparément chacun des I_{D_i}.

Soit f une densité sur $\mathbb{R}^d$ fixée. On va comparer les deux estimateurs suivants

— Estimateur de la moyenne empirique. Soient $(X_j)_{j\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de densité f, l'estimateur de la moyenne empirique avec n estimations est comme précédemment

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{g(X_j)}{f(X_j)}.$$

— Estimateur avec stratification. On note $p_i = \int_{D_i} f(x)\mathrm{d}x$, et, sur D_i, on renormalise f pour obtenir une densité $f_i = \frac{f}{p_i}\mathbb{1}_{D_i}$. Pour chaque morceau D_i, on estime I_i avec n_i simulations : soient $(X^i_j)_{j\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de densité f_i, l'estimateur correspondant est $\hat{I}^i_{n_i} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{g(X^i_j)}{f_i(X^i_j)}$. L'estimateur de I par échantillonnage stratifié avec $\sum_{i=1}^m n_i$ simulations s'obtient en sommant ces m estimations :

$$\hat{I}^{strat}_n = \sum_{i=1}^{m}\hat{I}^i_{n_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{g(X^i_j)}{f_i(X^i_j)}.$$

Afin de comparer ces deux estimations, on fait le même nombre de simulations pour les deux : $n = \sum_{i=1}^m n_i$, et on compare les variances.

Dans le premier cas, la variance pour n simulations est :

$$\begin{aligned}
V_1 := \mathrm{Var}(\hat{I}_n)V_1 &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}_f\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\int_D\left(\frac{g(x)}{f(x)} - I\right)^2 f(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i\int_{D_i}\left(\frac{g(x)}{f(x)} - I\right)^2 f_i(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i\int_{D_i}\left(\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{I_i}{p_i} + \frac{I_i}{p_i} - I\right)^2 f_i(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\int_{D_i}\left(\frac{g(x)}{f_i(x)} - I_i\right)^2 f_i(x)\mathrm{d}x\\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i\int_{D_i}\left(\frac{I_i}{p_i} - I\right)^2 f_i(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\mathrm{Var}_{f_i}\left(\frac{g(X^i_1)}{f_i(X^i_1)}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{I_i^2}{p_i} - \frac{1}{n}I^2.
\end{aligned}$$

Pour l'estimateur de la moyenne empirique de I_i, la variance pour n_i simulations est $\frac{1}{n_i}\mathrm{Var}_{f_i}\left(\frac{g(X^i_1)}{f_i(X^i_1)}\right) = \frac{1}{n_i}\sigma_i^2$. Pour l'estimation stratifiée, avec n_i

simulations pour chaque morceau I_i, la variance est, vu que les estimations des différents morceaux sont indépendantes,

$$\mathrm{Var}(\hat{I}_n^{strat}) := V_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} \mathrm{Var}_{f_i}\left(\frac{g(X_1^i)}{f_i(X_1^i)}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} \sigma_i^2,$$

à comparer à V_1 quand $n = \sum_{i=1}^m n_i$. On minimise donc cette variance en les n_i, sous la contrainte $n = \sum_{i=1}^m n_i$. On trouve (extrema liés)

$$n_i = n \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2},$$

ce qui donne une variance minimale pour l'estimation stratifiée avec n simulations de

$$V_2 = \frac{m}{n} \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2.$$

Si on choisit maintenant les D_i de sorte que les $p_i = \int_{D_i} f(x) \mathrm{d}x$ soient tous égaux à $1/m$, il vient

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{n} \mathrm{Var}_f\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right) \\ &= \frac{m}{n} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 + \frac{1}{n}\left(m \sum_{i=1}^{m} I_i^2 - I^2\right) \\ &= V_2 + \frac{1}{n}\left(m \sum_{i=1}^{m} I_i^2 - I^2\right). \end{aligned}$$

Mais, sur $\mathbb{R}^m$, on a $\|x\|_1 \leq \sqrt{m}\|x\|_2$, et donc $m \sum_{i=1}^m I_i^2 - I^2 \geq 0$. La variance de l'estimateur avec échantillonnage stratifié est plus petite que celle de l'estimateur de départ.

Échantillonnage stratifié : Afin de diminuer la variance par échantillonnage stratifié, pour une densité fixée f : on partitionne le support de g en domaines $(D_i)_{1 \leq i \leq m}$ de même masse pour f, puis on estime séparément l'intégrale de g sur chacun des D_i. Dans l'idéal, le nombre n_i de simulations pour le morceau D_i doit être proportionnel à $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}_{f_i}\left(\frac{g(X_1^i)}{f_i(X_1^i)}\right)$: on pourra estimer grossièrement ces variances afin d'avoir une idée du choix des n_i.

L'idée est un peu la même pour l'échantillonnage préférentiel, mais pour une densité fixée : pour diminuer la variance, il faut faire davantage de simulations dans les domaines D_i où la variance $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}_{f_i}\left(\frac{g(X_1^i)}{f_i(X_1^i)}\right)$ est grande.

(4) Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$: échantillonnage stratifié

On reprend pour f la densité de la loi uniforme sur $[0,1]$, et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. On fait une stratification en $m = 2$ morceaux :

$$
\begin{aligned}
&D_1 = [0,1/2] && D_2 =]1/2,1] \\
&f_1 = 2\mathbb{1}_{D_1} && f_2 = 2\mathbb{1}_{D_2} \\
&I_1 = \int_{D_1} g = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.4783 && I_2 = \int_{D_2} g = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.3071 \\
&\int_{D_1} \frac{g^2}{f_1}(x)\mathrm{d}x = \frac{11}{48} \approx 0.2292 && \int_{D_1} \frac{g^2}{f_2}(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{48} \approx 0.1042 \\
&\sigma_1^2 = \mathrm{Var}_{f_1}(g/f_1) && \sigma_2^2 = \mathrm{Var}_{f_2}(g/f_2) \\
&\quad = \int_{D_1} \frac{g^2}{f_1}(x)\mathrm{d}x - I_1^2 \approx 0.0004 && \quad = \int_{D_2} \frac{g^2}{f_2}(x)\mathrm{d}x - I_2^2 \approx 0.0099.
\end{aligned}
$$

Pour optimiser la stratification, on doit donc répartir les n simulations en

$$n_1 = n\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \approx 0.04n \quad \text{et} \quad n_2 = n\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \approx 0.96n$$

et on obtient une réduction de variance (par rapport à (2)) de l'ordre de

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{n}\left(2(I_1^2+I_2^2) - I^2\right) \approx 0.03\frac{1}{n}, \text{ d'où } C^{(4)} = 0.02.$$

2.10.3 Variable de contrôle

L'idée de la méthode par variable de contrôle est la suivante : on veut estimer une intégrale $I = \mathbb{E}(Y)$, et on connaît une v.a. C de moyenne μ corrélée à Y, appelée *variable de contrôle*. Pour $\beta > 0$, on pose

$$Y(\beta) = Y - \beta(C-\mu),$$

de sorte que $\mathbb{E}(Y(\beta)) = \mathbb{E}(Y) = I$. On estime alors I par la moyenne empirique de v.a.i.i.d. de même loi que $Y(\beta)$, et la variance pour n simulations est alors $\frac{1}{n}\mathrm{Var}(Y(\beta))$, avec

$$\mathrm{Var}(Y(\beta)) = \mathrm{Var}(Y-\beta(C-\mu)) = \mathrm{Var}(Y)+\beta^2\mathrm{Var}(C)-2\beta\ \mathrm{Cov}(Y,C), \quad (2.2)$$

qui peut être inférieure à $\mathrm{Var}(Y)$ si β est bien choisi.

Lemme 1. *Le minimum de la fonction* (2.2) *est atteint en*

$$\beta^* = \frac{Cov(Y,C)}{Var(C)}$$

et la variance minimale est

$$Var(Y(\beta^*)) = (1-\rho^2_{Y,C})\,Var(Y).$$

Remarque 5. *Donc plus C est corrélée à Y, plus la réduction de variance est importante.*

Variable de contrôle : C, de moyenne μ connue, et corrélée à Y

$$Y(\beta) = Y - \beta(C-\mu), \quad \beta^* = \frac{\mathrm{Cov}(Y,C)}{\mathrm{Var}(C)}, \quad \mathrm{Var}(Y(\beta^*)) = (1-\rho^2_{Y,C})\mathrm{Var}(Y).$$

En pratique : La méthode présente deux difficultés. Premièrement, on ne connaît pas forcément une variable de contrôle C, c'est-à-dire une v.a. de moyenne connue et corrélée à Y. Deuxièmement, même si on connaît une variable de contrôle C, la valeur optimale β^* dépend de la covariance entre C et Y qui est souvent inconnue et par conséquent doit être estimée.

Remarque 6. *Cette méthode se généralise au cas d'un vecteur de contrôle $C = (C_1, C_2, ..., C_m)^t$ de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^m$. Pour $\beta \in \mathbb{R}^m$, on pose $Y(\beta) = Y - \beta^t(C-\mu)$, et*

$$Var(Y(\beta)) = Var(Y) + \beta^t\Gamma_c\beta - 2\ Cov(Y,C)^t\beta,$$

où Γ_c est la matrice de covariance de C, et $Cov(Y,C)$ est le vecteur dont les composantes sont les $Cov(Y,C_i)$. Le choix optimal pour β est alors :

$$\beta^* = \Gamma_c^{-1}\ Cov(Y,C) \text{ et } Var(Y(\beta^*))(1-R^2_{Y,C})\,Var(Y),$$

où $R_{Y,C} = \dfrac{Cov(Y,C)^t\Gamma_c^{-1}\ Cov(Y,C)}{Var(Y)}$.

(5) Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$: variable de contrôle

Considérons U de densité uniforme, $Y = \sqrt{1-U^2}$ et comme variable de contrôle $C = (1-U)^2$.

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\pi}{4},\ \mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\ \mathbb{E}(C) = \frac{1}{3},\ \mathrm{Var}(C) = \frac{4}{45},\ \rho_{Y,C} = 0.8.$$

Si on prend $\beta^* = \frac{\mathrm{Cov}(C,Y)}{\mathrm{Var}(C)} \approx 0.59$, on trouve $\mathrm{Var}(Y(\beta^*)) \approx 0.2\mathrm{Var}(Y)$, d'où

$$C^{(5)} \approx 0.01.$$

2.10.4 Variables antithétiques

Idée de la méthode de variables antithétiques : nous supposons qu'il existe deux variables aléatoires Y et Z telles que $I = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$, avec I 'intégrale à estimer. On remarque que :

$$I = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(Y+Z)\right)$$

et

$$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{2}(Y+Z)\right] = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(Y) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(Z) + \frac{1}{2}\ \mathrm{Cov}(Y,Z).$$

Si Y et[Z sont négativement corrélées, alors on peut espérer faire diminuer la variance.

Supposons par exemple que l'on doive estimer $I = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. L'estimateur de la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(U_i)$ pour n simulations a pour variance $\frac{1}{n}V_1$ avec

$$V_1 = \mathrm{Var}(g(U)).$$

Comme $x \to 1-x$ laisse la mesure dx invariante sur $[0,1]$, on peut prendre comme variables antithétiques $Y = g(U)$ et $Z = g(1-U)$ avec U de loi uniforme sur $[0,1]$. L'estimateur pour n simulations s'écrit :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n (g(U_i) + g(1-U_i)),$$

et a une variance $\frac{1}{n}V_2$, avec

$$V_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(g(U)) +\ \mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)).$$

Mais attention, si le nombre de simulations est le même, le temps de calcul est deux fois plus important dans le second cas, donc pour que la méthode des variables antithétiques soit intéressante, il faut que $V_2 < \frac{1}{2}V_1$.

Proposition 1. *Si g est de classe C^1 monotone avec $g(0) \neq g(1)$, alors $V_2 < \frac{1}{2}V_1$.*

Démonstration : On suppose g croissante, donc $g(1) > g(0)$. On doit montrer que $\mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)) < 0$, autrement dit que

$$\int_0^1 g(u)g(1-u)\mathrm{d}u < I^2.$$

On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x g(1-t)\mathrm{d}t - xI$. Alors $\phi(0) = \phi(1) = 0$ et

$$\phi'(x) = g(1-x) - I,$$

est une fonction décroissante. Le théorème de la moyenne assure que $\phi'(0) > 0$ et $\phi'(1) < 0$, et donc que $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$, donc

$$0 < \int_0^1 \phi(x)g'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \phi'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 g(u)g(1-u)du + I^2.$$

Le cas décroissant se traite de la même manière. ■

Variables antithétiques : Pour une fonction g monotone sur $[0,1]$, si $(U_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, l'estimateur avec variables antithétiques

$$\hat{I}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n (g(U_i) + g(1-U_i))$$

est plus efficace que l'estimateur $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(U_i)$.

(6) Calcul de $\frac{\pi}{4}$: variables antithétiques

Appliquer cette méthode au calcul de π.

2.11 Exercices

Exercice 1. Implémenter les méthodes de la technique de hit or miss et celle de la moyenne empirique. Donner des intervalles de confiance à l'aide du TCL.

Exercice 2. On cherche une valeur approchée de $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$, pour $\alpha > 0$ fixé.

1. Donner un algorithme associé à la méthode de la moyenne.
2. On suppose $\alpha = \pi$.
   (a) Trouver une majoration (éventuellement grossière) de la variance associée à la méthode de Monte Carlo utilisée. (Dans 1., on a utilisé une moyenne empirique de v.a.i.i.d. La variance associée est la variance d'une de ces v.a.).
   (b) En déduire des intervalles de confiance à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Quel n faut-il choisir pour que la probabilité que l'erreur soit plus petite que 0.02 soit plus grande que 0.99 ?
   (c) Refaire le (b) en utilisant cette fois le TCL.

Exercice 3. Dans cet exercice nous cherchons à approcher l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Nous allons proposer une méthode de Monte Carlo ainsi que diverses techniques de réduction de variance pour évaluer cette intégrale. Pour chaque méthode il est demandé d'écrire le code Scilab correspondant et de donner des résultats numériques de ce code.

1. Exprimer cette intégrale sous la forme $\mathbb{E}[f(X)]$ avec f une fonction à préciser et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner la valeur exacte de I. Proposer une méthode de Monte Carlo pour ce calcul et justifier son application.
2. Calculer $\mathrm{Var}[f(X)]$ et préciser la variance de l'estimateur Monte Carlo associé.
3. Nous cherchons à approcher f par un polynôme de degré 2. Construire une fonction paire, positive sur $[0, 1]$, qui vaut 0 en 1 et 1 en 0. Trouver une densité $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ à partir de cette fonction.

4. Si Y est une variable aléatoire de densité g notons par Z la variable aléatoire définie par
$$Z = \frac{2}{3}\frac{\cos\left(\frac{\pi Y}{2}\right)}{1-Y^2}.$$
Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(f(X))$. Calculer $\mathrm{Var}(Z)$.
5. Proposer une nouvelle méthode de Monte Carlo pour le calcul de I en utilisant le point précédent. En admettant que $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.001$, commenter la réduction de variance en comparant les deux estimateurs de Monte Carlo. Préciser l'amélioration engendrée sur la taille de l'intervalle de confiance.
6. Calculer la fonction de répartition F_Y de Y.
7. Soit $H : [0,1] \to [0,1]$ définie par $H(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(-x) + \frac{4\pi}{3}\right)$. Vérifier que $F_Y \circ H(x) = H \circ F_Y(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Écrire la fonction inverse F_Y^{-1}. (Indication : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.)
8. Quelle est la loi de la variable aléatoire $F_Y^{-1}(X)$? En utilisant cette remarque proposer une méthode de simulation pour Y.

Exercice 4. Dans cet exercice nous cherchons à approcher numériquement par des méthodes probabilistes l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^4 (x^3 + x)e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Nous allons proposer une méthode de Monte Carlo ainsi que diverses techniques de réduction de variance pour évaluer cette intégrale. Pour chaque méthode il est demandé d'écrire le code Scilab correspondant et de donner des résultats numériques de ce code.

1. Exprimer I sous la forme d'une espérance, $I = \mathbb{E}(h(X))$ avec h une fonction et X une variable aléatoire de loi f, à préciser.
2. Proposer une méthode de Monte Carlo pour ce calcul et justifier son application. Calculer la valeur exacte de I et $\mathrm{Var}[h(X)]$.
3. Proposer une nouvelle méthode de Monte Carlo pour le calcul de I en utilisant l'échantillonnage préférentiel. Calculer la variance de ce nouvel estimateur et commenter la réduction de variance par rapport à la méthode standard, proposée en 2.
4. Proposer une méthode de réduction de variance par échantillonnage stratifié. Calculer la variance associée. (Vous pouvez par exemple prendre $D_1 = [0,2]$ et $D_2 =]2,4]$ si vous avez fait le choix d'une variable aléatoire à densité sur $[0,4]$.)

5. Soit Y une variable aléatoire de densité $g(x) = \frac{1}{4}(1+x)$ sur $[0,2]$. Notons par Z la variable aléatoire

$$Z = 2e^{-Y}.$$

Montrer que $\mathbb{E}(Z) = I$. Proposer une méthode de Monte Carlo en utilisant la variable Z. Quelle méthode de réduction de variance utilise-t-on ? Est-ce qu'on réduit réellement la variance avec cette méthode ? Justifier.

6. Classer ces méthodes dans l'ordre décroissant. Commenter votre choix de méthode par rapport à la réduction de variance.

Chapitre 3

Processus de renouvellement

Nous allons introduire dans ce chapitre les notions de processus de renouvellement et de processus de renouvellement avec récompense ainsi que leurs propriétés. Commençons par introduire deux exemples.

Exemple 1. Dans une machine, la durée de vie d'un certain composant est modélisée par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On remplace ce composant dès qu'il est en panne, et on peut se demander combien de fois on va devoir le remplacer pendant les 10 prochaines années.

Exemple 2. Des clients se présentent à un bureau de poste, à des instants d'arrivée qu'on suppose aléatoires. Peut-on étudier la longueur de la file d'attente ? Combien de guichets doit-on ouvrir pour optimiser le service ?

3.1 Définitions

Pour modéliser l'évolution au cours du temps d'une certaine quantité aléatoire nous introduisons la notion de processus stochastique.

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un *processus stochastique* $(Y_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexée par le temps $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour un $\omega \in \Omega$ donné, $t \mapsto Y_t(\omega)$ représente l'évolution d'une quantité au cours du temps. Autrement dit, $\omega \mapsto (t \mapsto Y_t(\omega))$ est une variable aléatoire, à valeurs dans l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

À titre d'exemple, Y_t peut décrire la température au temps t, ou le prix d'une action au temps t, ou le nombre de gens qui se sont présentés au guichet avant t.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit

$$S_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Définition 2. On définit le *processus de renouvellement* $(N_t)_{t\geq 0}$ associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ en posant : $N_0 = 0$ et pour $t > 0$,

$$N_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}}.$$

Nous donnons dans la remarques suivante les premières propriétes du processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 1.

1. *Pour tout* $\omega \in \Omega$, $t \mapsto N_t(\omega)$ *est une fonction croissante de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{N}$. *On dit que* $(N_t)_{t\geq 0}$ *est un processus croissant.*
2. *Comme* X_1 *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, *et donc il n'y a pas d'arrivées simultanées. En particulier, la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *des instants de renouvellement est strictement croissante et le processus de renouvellement* $(N_t)_{t\geq 0}$ *ne fait que des sauts de hauteur* 1.
3. *Comme* X_1 *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *soit elle est intégrable et* $\mathbb{E}(X_1) \in [0, +\infty[$, *soit elle n'est pas intégrable, et alors on pose* $\mathbb{E}(X_1) = +\infty$.

Revenons aux exemples 1 et 2 et explicitons les notions pour ces cas précis.

Pour l'exemple 1, si X_i représente la durée de vie du composant i (celui en fonctionnement après $i-1$ remplacements), alors S_n représente l'instant de la n-ième panne ou l'instant du n-ième renouvellement, et N_t le nombre de composants utilisés durant l'intervalle $[0, t]$.

Dans l'exemple 2, si X_i représente le laps de temps qui s'écoule entre l'arrivée du client $i-1$ et celle du client i, S_n représente l'instant d'arrivée du client n, et N_t le nombre de clients qui se sont présentés durant l'intervalle $[0, t]$.

Remarque 2. *Il est équivalent de connaître le processus de renouvellement* $(N_t)_{t\geq 0}$, *la suite* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *des temps inter-arrivées, ou la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *des instants de renouvellement. En effet,* *1. Si on connaît les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on définit les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$, puis le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$.*

2. Si on connaît les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$, on peut construire le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$, et on retrouve les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ en remarquant que

$$X_n = S_n - S_{n-1}.$$

3. Si on connaît le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$, on retrouve les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$ en remarquant que

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \ N_t \geq n\}.$$

3.2 Propriétés trajectorielles

Nous démontrons dans cette section un théorème qui décrit le comportement en temps long d'un processus de renouvellement.

Théorème 1. *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et aux instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$. Supposons que $\mathbb{E}(X_1) > 0$, alors*

(i) Presque-sûrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1)$.

(ii) Presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$, $N_t < +\infty$.

(iii) Presque-sûrement, $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$.

(iv) Presque-sûrement, $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)}$.

Démonstration :

(i) On applique simplement une version de la loi forte des grands nombres :

Théorème 2. *Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors, avec probabilité 1,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1).$$

Ce théorème est vrai même si $\mathbb{E}(X_1) = +\infty$.

(*ii*) D'après le point (*i*), comme $\mathbb{E}(X_1) > 0$, il existe une partie $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, de probabilité 1 telle que pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = +\infty.$$

Soit $\omega \in \tilde{\Omega}$ fixé, $t > 0$ fixé. Il existe $n \geq 1$ tel que $S_n(\omega) \geq t \iff N_t(\omega) \leq n$. D'où le résultat annoncé.

(*iii*) Soit $M \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $N_{S_M} = M$ (voir Exercices), et comme $t \to N_t$ est croissant, pour tout $t \geq S_M$, $N_t \geq M$. Ce qui nous conduit au résultat.

(*iv*) Soit $t > 0$ fixé. On a toujours $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$, d'où, si $N_t > 0$,

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Comme N_t tend vers $+\infty$, le point (*i*) assure que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mathbb{E}(X_1),$$

et le point (*iii*) assure que $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{N_t+1}{N_t} = 1$. En mettant ensemble ces résultats nous obtenons la limite souhaitée.

■

3.3 Processus de Renouvellement avec Récompense (PRR)

Soit maintenant une suite $(X_i, Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Définition 3. On appelle *processus de renouvellement avec récompense* le processus

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

où N_t est le processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Reprenons les exemples 1 et 2. Dans ces cas :

1. Dans l'exemple 2, Z_n peut représenter le temps de service du client numéro n dans la file d'attente, et alors R_t représente le temps total de service avant l'instant t.

2. Dans l'exemple 1, Z_1 peut représenter le coût de remplacement d'un composant, et alors R_t représente le coût d'entretien du système jusqu'au temps t.

Remarque 3. *Attention, on suppose que les $(X_i, Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants, mais par contre on ne suppose pas que X_1 et Z_1 sont indépendants.*

Remarque 4. *Si $Z_i = 1$, le processus de récompense coïncide avec le processus de renouvellement.*

Nous pouvons décrire le comportement du processus de renouvellement avec récompense en temps grand, par la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $(X_i, Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$ et que $\mathbb{E}(|Z_1| < +\infty)$. Alors, presque sûrement,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(Z_1)}{\mathbb{E}(X_1)}.$$

Démonstration : On écrit simplement $\frac{R_t}{t} = \frac{R_t}{N_t}\frac{N_t}{t}$. On a déjà vu que, presque sûrement,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)}.$$

Maintenant, $\frac{R_t}{N_t} = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} Z_i$ et comme $N_t \to +\infty$, on peut appliquer encore une fois la loi des grands nombres pour montrer que, p.s.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_t}{N_t} = \mathbb{E}(Z_1),$$

ce qui termine la preuve. ■

3.4 Théorème Central Limite

Nous introduisons dans cette partie un résultat de type théorème central limite pour le processus de renouvellement.

Théorème 3. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ et on note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. On note $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Alors on a la convergence en loi suivante :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mu^{3/2}\sqrt{t}}{\sigma}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu}\right) = G,$$

où G note une v.a. normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\mu^{3/2}\sqrt{t}}{\sigma}\left(\frac{N_t}{t}-\frac{1}{\mu}\right)<x\right) &= \mathbb{P}\left(N_t<\frac{t}{\mu}+\frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_{k_t}>t\right),
\end{aligned}$$

où $k_t = \left[\frac{t}{\mu}+\frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right]$. En utilisant le théorème central limite pour la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on a la convergence en loi suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n}-\mu\right)=G,\ \text{où } G\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Comme k_t tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{k_t}>t\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{S_{k_t}}{k_t}-\mu\right)>\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{t}{k_t}-\mu\right)\right)\\
&\sim 1-\Phi(\alpha_t)=\Phi(-\alpha_t),
\end{aligned}$$

où $\alpha_t=\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{t}{k_t}-\mu\right)$. Il suffit donc de voir que lorsque t tend vers $+\infty$, α_t tend vers $-x$. Pour t assez grand on déduit que

$$\begin{aligned}
k_t &= \frac{t}{\mu}+\frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}+o(\sqrt{t})\\
\frac{k_t}{t} &= \frac{1}{\mu}+\frac{x\sigma}{\mu^{3/2}\sqrt{t}}+o(\frac{1}{\sqrt{t}})\\
\frac{t}{k_t} &= \mu\left(\frac{1}{1+\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}+o(\frac{1}{\sqrt{t}})}\right)=\mu\left(1-\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}+o(\frac{1}{\sqrt{t}})\right).
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons d'une part

$$\frac{t}{k_t}-\mu\sim -x\sigma\sqrt{\frac{\mu}{t}}$$

et d'autre part

$$\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\sim\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{\mu}}.$$

En reprenant la définition de α_t on trouve le résultat. ■

3.5 Fonction de renouvellement

La variable N_t, qui représente le nombre de renouvellements dans l'intervalle de temps $[0,t]$, est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est une indicateur important. Cette espérance est appelée fonction de renouvellement et est notée :

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Définition 4. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On appelle *fonction de renouvellement* et on la note $M(t)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire N_t :

$$t \mapsto M(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Dans la proposition suivante nous donnons une représentation de $M(t)$ en fonction de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Proposition 2. *Soit F_n la fonction de répartition de S_n, date du $n^{\text{ième}}$ événement (instant de renouvellement). Alors, pour tout $t \geq 0$ on a*

$$M(t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) < \infty. \tag{3.1}$$

Démonstration : Par la définition de la fonction de renouvellement on a :

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N_t = n).$$

Calculons la loi de N_t en utilisant les F_n. Nous avons

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1).$$

Nous remarquons que l'événement $\{N_t \geq n\}$ est équivalent avec l'événement

{ à la date t, il y a eu au moins n renouvellements }

qui est lui même équivalent à l'événement

{ la date du $n^{\text{ème}}$ renouvellement est inférieure à t }.

Ou encore, en utilisant les exercices, on déduit :

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = F_n(t), \tag{3.2}$$

d'où $\mathbb{P}(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$. Ce qui nous conduit à :

$$M(t) = \sum_{n\geq 1} n(F_n(t) - F_{n+1}(t)) = \sum_{n\geq 1} F_n(t). \tag{3.3}$$

■

Nous pouvons aussi obtenir ce résultat avec la remarque suivante :

Remarque 5. *En utilisant le résultat général pour une variable aléatoire discrète, si $Y : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ alors son espérance s'écrit :*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n),$$

nous obtenons en l'appliquant à N_t :

$$\mathbb{E}(N_t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N_t \geq n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t).$$

3.6 Âge courant et âge résiduel

Nous abordons ici quelques notions définissant diverses notions concernant le temps.

Définition 5. *L'âge courant* à l'instant t est le temps qui s'écoule depuis le dernier renouvellement, il est égal à :

$$t - S_{N_t}.$$

L'âge résiduel à l'instant t est le temps qui reste avant le prochain renouvellement, il est égal à :

$$S_{N_t+1} - t.$$

La *vie totale* à l'instant t est le temps qui s'écoule entre le $N_t^{\text{ième}}$ et le $(N_t + 1)^{\text{ième}}$ renouvellements. C'est aussi la somme entre l'âge courant et l'âge résiduel, elle est égale à :

$$X_{N_t+1} = S_{N_t+1} - S_{N_t}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, et notons $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Alors :*

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu(M(t) + 1). \tag{3.4}$$

Démonstration : Calculons, en utilisant les définitions

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{N_t+1}) &= \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_{N_t+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{N_t} X_i\right] \\ &= \mu + \mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{+\infty} X_i \mathbb{1}_{\{i\leq N_t+1\}}\right] \\ &= \mu + \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{i\leq N_t+1\}}\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En utilisant l'équivalence des événements $\{N_t \geq i-1\}$ et $\{X_1+\ldots+X_{i-1} \leq t\}$ on peut écrire

$$\mathbb{1}_{\{N_t \geq i-1\}} = \mathbb{1}_{\{S_{i-1} \leq t\}} = \mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1} \leq t\}} \tag{3.6}$$

et en revenant avec ce résultat dans les termes présents dans le calcul (3.5) on obtient, en utilisant l'indépendance et l'égalité en loi des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{i \leq N_t+1\}}\right] &= \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1} \leq t\}}\right] \\ &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1} \leq t\}}\right] \\ &= \mu \mathbb{P}(S_{i-1} \leq t) \\ &= \mu F_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant la proposition 2 et ce résultat on déduit que (3.5) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{N_t+1}) &= \mu + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu F_{i-1}(t) \\ &= \mu\left(1 + \sum_{i=2}^{+\infty} F_{i-1}(t)\right) \\ &= \mu\left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} F_i(t)\right) \\ &= \mu(1 + M(t)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce qui finit la preuve. ■

Nous présentons dans la proposition suivante une formule pour la fonction de renouvellement.

Proposition 4. *Pour tout $t \geq 0$ nous avons $M(t) < \infty$ et :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{3.9}$$

En outre, si les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des v.a. à densité et si on note f leur densité, alors la fonction M est continue et vérifie l'équation de renouvellement :

$$M(t) = \int_0^t (1 + M(t-s)) f(s) ds, \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

Démonstration : On remarque que :

$$\mathbb{P}(S_i \leq t) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}}) \leq \mathbb{E}[e^{t-S_i}] = e^t \left[\mathbb{E}(e^{-X_1})\right]^i. \tag{3.11}$$

Comme X_1 est une v.a. strictement positive on a $\mathbb{E}(e^{-X_1}) < 1$ ce qui conduit à

$$M(t) \leq e^t \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\mathbb{E}(e^{-X_1})\right]^i < \infty.$$

Considérons maintenant la situation $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. à densité f. Pour $i \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_i \leq t) &= \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i \leq t) \\
&= \int_{t_1+\ldots+t_i \leq t} f(t_1)\ldots f(t_i)\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_i \\
&= \int_0^t f(t_i) \left(\int_{t_1+\ldots+t_{i-1} \leq t-t_i} f(t_1)\ldots f(t_{i-1})\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{i-1} \right) \mathrm{d}t_i \\
&= \int_0^t f(s)\mathbb{P}(S_{i-1} \leq t-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de réecrire les choses sous la forme :

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_i \leq t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq t) + \sum_{i\geq 2} \int_0^t f(s)\mathbb{P}(S_{i-1} \leq t-s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s) \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(S_i \leq t-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait avec la proposition 2 que $M(t) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(S_i \leq t)$.

Ceci nous conduit au résultat recherché :

$$M(t) = \int_0^t (1 + M(t-s))f(s)\mathrm{d}s, \forall t \geq 0. \tag{3.12}$$

■

3.7 Exercices

Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_i)_{i\geq 1}$, et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que $N_{S_n} = n$, et que $S_{N_t} \leq t$.

Exercice 2. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_i)_{i\geq 1}$, et $S_n = X_1 + ... + X_n$.
1) A-t-on

(*i*) $N_t = n$ ssi $S_n \leq t < S_{n+1}$?

(*ii*) $N_t < n$ ssi $S_n > t$?

(*iii*) $N_t \leq n$ ssi $S_n \geq t$?

(*iv*) $N_t > n$ ssi $S_n < t$?

2) Le temps vaut t. Exprimer le délai écoulé depuis la dernière arrivée. Exprimer le temps d'attente entre la dernière arrivée et la prochaine arrivée.

Exercice 3. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_n)_{n\geq 1}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_{N_t+1}) \leq \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N_t + 1).$$

Pourquoi n'est-il pas clair que $\mathbb{E}(X_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1)$?

Exercice 4. Donner un exemple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance infinie, et une v.a. à densité à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'espérance infinie.

Exercice 5. Dans un avion, un composant est remplacé à coût c_2 à chaque fois qu'il arrive à l'âge T, sauf s'il tombe en panne avant, auquel cas il est remplacé à coût $c_1 > c_2$. Les durées des vies des composants successifs sont des v.a.i.i.d. $(Y_n)_{n\geq 1}$, de densité f et de fonction de répartition F.

1. A l'aide d'un processus de renouvellement avec récompense associé à une suite de vecteurs i.i.d. (X_n, Z_n), exprimer le coût moyen $C_t(T)$ par unité de temps sur la période d'utilisation $[0, t]$.
2. Donner une valeur approchée de $C_t(T)$ lorsque t est grand.
3. Dans le cas où $Y_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, comment choisir T pour un coût minimal ? Commenter le résultat. [$T = +\infty$]
4. Dans le cas où $Y_1 \sim \mathcal{U}([0, 1])$, comment choisir T pour un coût minimal ? [exprimer T en fonction de c_1 et c_2]

5. Supposons T, c_1, c_2 donnés, et $f(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$. Simuler $C_{100}(T)$. Comment faire un calcul approché de $E[C_{100}(T)]$?

Exercice 6. La production d'une centrale électrique (en Mwh) sur l'intervalle $[0, t]$ est donnée par

$$P_t = \int_0^t \phi(Y_s)ds$$

où Y_s est l'âge d'un composant primordial, et où ϕ est une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Les durées de vie des composants successifs sont données par des v.a. positives $(X_n)_n$ i.i.d. de densité f.
Le remplacement d'un composant coûte c \$, et chaque Mwh produit rapporte p \$.
Afin d'optimiser le profit, on décide de remplacer le composant à chaque fois qu'il dépasse l'âge A.

1. Soit Z_n la durée d'utilisation du composant numéro n. Exprimer P_n, la production de Mwh lors de l'utilisation du composant numéro n.
2. Exprimer le profit moyen par unité de temps $\pi_t(A)$ réalisé sur la période $[0, t]$.
3. Donner une valeur approchée de $\pi_t(A)$ lorsque t est grand.
4. Dans le cas d'un composant de très mauvaise qualité, on a $\phi(\alpha) = e^{-\alpha}$ et $X_1 \sim \mathcal{E}(1)$. Comment choisir A ?
5. Dans un cas plus favorable on a $\phi(\alpha) = 1$ et $X_1 - 10 \sim \mathcal{E}(1)$. Comment choisir A ?
6. On suppose que $\phi(\alpha) = e^{-\alpha}$ et $X_1 \sim \mathcal{E}(1)$. Simuler $\pi_{1000}(10)$.

Chapitre 4

Rappels sur les chaînes de Markov à espace d'état fini

Les chaînes de Markov sont des modèles probabilistes simples qui permettent de modéliser des phénomènes aléatoire dont l'évolution future de la quantité étudiée ne dépend du passé qu'à travers de sa valeur présente.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appelle *processus* (en temps discret) une collection de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un même espace S, appelé espace d'état. On interprète $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme l'évolution au cours du temps d'une certaine grandeur aléatoire.

Exemple 1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des v.a.i.i.d. : ce cas n'est pas passionnant en tant que processus, puisqu'il n'y a aucune dépendance entre ce qui se passe au temps n et ce qui se passe au temps $n+1$.

Exemple 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur une grille : à chaque pas, on choisit la direction dans laquelle on avance de façon équiprobable. Dans cette situation, X_{n+1} dépend à la fois de la position précédente X_n et d'un certain aléa : c'est un cas typique de chaîne de Markov.

4.1 Définitions

Soit S un ensemble *fini*, de cardinal $N \geq 2$, dont les éléments sont notés $s_1, \ldots, s_N$.

4.1.1 Chaîne de Markov (homogène)

Définition 1. On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov homogène* à valeurs dans S si et seulement si

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus à valeurs dans S.
2. *(Propriété de Markov)* La position X_{n+1} à l'instant $n+1$ ne dépend des positions passées $X_0, \ldots, X_n$ que par la dernière position X_n. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(i_0, \ldots, i_{n+1}) \in S^{n+2}$, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

3. *(Homogénéité)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $i, j \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = p_{i,j}.$$

La matrice $P = (p_{i,j})_{1\le i\le N, 1\le j\le N}$ est la *matrice de transition* de la chaîne. On voit facilement que P est une *matrice stochastique*, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que les sommes des coefficients sur chacune des lignes vaut 1. Autrement dit, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall i \in [1..N],\ \forall j \in [1..N],\ p_{i,j} \ge 0.$
2. $\forall i \in [1..N],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1.$

Dans toute la suite, une chaîne de Markov sera toujours implicitement *homogène* et à valeurs dans un ensemble S *fini*. Pour simplifier, on pourra, quitte à renommer les éléments de S, supposer que $S = [1..N]$.

Exemple 3. Un marcheur se déplace au hasard sur les sommets d'un pentagone. A chaque pas, il lance une pièce équilibrée et va au sommet suivant dans le sens trigonométrique si pile sort, et dans le sens anti-trigonométrique sinon. La suite des positions du marcheur est une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble des sommets du pentagone.

Exercice 1. Écrire la matrice de transition de la marche aléatoire sur les sommets du pentagone.

4.1.2 Définition algorithmique et fonction de mise à jour

Soit P une matrice de transition sur $S = [1..N]$. On définit, pour tous $i, j \in S$, pour tout $u \in]0,1[$, la *fonction de mise à jour associée* :

$$\Phi(i,u) = j \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{j-1} p_{i,l} \le u < \sum_{l=1}^{j} p_{i,l}.$$

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tous $i, j \in S$,

$$\mathbb{P}(\Phi(i,U) = j) = \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{j-1} p_{i,l} \leq U < \sum_{l=1}^{j} p_{i,l}\right) = \sum_{l=1}^{j} p_{i,l} - \sum_{l=1}^{j-1} p_{i,l} = p_{i,j}.$$

Remarque 1. *Soit $i \in S$ fixé. Par définition de la matrice de transition, $\sum_{j\in S} p_{i,j}\delta_j$ est une probabilité sur S, qui donne la loi de la position de la chaîne de Markov partant de i après un pas. Ainsi, $\Phi(i,U)$, quand U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, n'est rien d'autre que la simulation standard de cette loi.*

Proposition 1. *Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans S et $(U_n)_{n\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendantes de X_0. On définit par récurrence un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, U_{n+1}).$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P.

Démonstration :

1. Comme P est une matrice de transition sur S, le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans S.
2. On constate que pour construire X_n, on utilise X_0 et les U_i pour $1 \leq i \leq n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(i_0, \dots, i_{n+1}) \in S^{n+2}$. Comme U_{n+1} est indépendant de $X_0, \dots, X_n$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n,\ X_{n+1} = i_{n+1}) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n,\ \Phi(i_n, U_{n+1}) = i_{n+1}) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n)\mathbb{P}(\Phi(i_n, U_{n+1}) = i_{n+1}) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n)p_{i_n,i_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que

$$\mathbb{P}(X_n = i_n,\ X_{n+1} = i_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n)p_{i_n,i_{n+1}}.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots,\ X_n = i_n)& \\
= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)& \\
= p_{i_n,i_{n+1}},&
\end{aligned}$$

ce qui donne à la fois la propriété de Markov, l'homogénéité et la matrice de transition P.

■

Remarque 2. *De la même manière, on montre que*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) p_{i_0,i_1} \dots p_{i_n,i_{n+1}}.$$

Remarque 3. *La fonction de mise à jour n'est pas unique !*

En pratique : Cette proposition fournit une définition alternative d'une chaîne de Markov, et donne aussi le moyen de la simuler. Si on se donne une matrice de transition P, on construit une fonction Φ de mise à jour associée, on simule une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour simuler X_n :

(1) on simule X_0,

(2) pour $i \in [0..n-1]$, on pose $X_{i+1} = \Phi(X_i, U_{i+1})$,

(3) on affiche X_n.

Cette méthode marche toujours. Mais souvent, les particularités de la chaîne de Markov à simuler permettent de trouver un algorithme bien plus simple.

Exercice 2. Écrire une fonction `y=suivant(x,u)`, fonction de mise à jour pour la marche aléatoire sur les sommets du pentagone. Simuler alors et représenter graphiquement plusieurs trajectoires de la chaîne de Markov partant du sommet 1.

4.1.3 Graphe associé et classes communicantes

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov à valeurs dans S. On lui associe un graphe orienté de la façon suivante : les sommets du graphe sont les points de S, et on met une arête orientée de s_i vers s_j si et seulement si $p_{i,j} > 0$. Si $i = j$ ou si on peut trouver un chemin orienté de s_i vers s_j, on note $s_i \to s_j$.

On munit alors S de la relation d'équivalence suivante : $s_i \sim s_j$ si et seulement si $s_i \to s_j$ et $s_j \to s_i$. Les *classes communicantes* sont les classes d'équivalence de cette relation. La relation $\to$ sur les sommets du graphe induit une relation d'ordre partiel sur les classes.

Définition 2.
— On dit qu'une classe est *fermée* si et seulement si il n'existe aucune arête orientée allant d'un point de la classe vers un point à l'extérieur de la classe (autrement dit, c'est une classe minimale pour la relation d'ordre partiel).
— Un point de S qui est une classe fermée à lui tout seul est appelé un *état absorbant*.

- Une chaîne de Markov qui ne comporte qu'une seule classe communicante est dite *irréductible.*
- Les classes qui ne sont pas fermées sont dites *transitoires.*

Remarque 4. — *Un état s est absorbant si $p_{s,s} = 1$.*

— *Une chaîne de Markov, ou sa matrice de transition P est irréductible si pour tout $x, y \in S$, il existe un nombre entier $n = n_{x,y} \geq 1$ tel que $P^n(x, y) > 0$, autrement dit si la probabilité partant d'un point quelconque x de S d'atteindre un point quelconque y de S en un nombre fini de pas est strictement positive.*

Exercice 3. Tracer le graphe et classifier les états de la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. La marche aléatoire sur les sommets du pentagone est irréductible.

Exercice 4. Donner un exemple de chaîne de Markov avec deux classes fermées et trois classes transitoires.

Exercice 5. Problème de l'ivrogne. Dans une rue, les maison sont numérotées dans l'ordre de 0 à n : la maison de l'ivrogne est au numéro 0 et le bar au numéro n. L'ivrogne fait des pas aléatoires vers la droite ou la gauche avec probabilité 1/2, et s'arrête dès qu'il atteint sa maison ou le bar. Tracer le graphe de cette chaîne de Markov et donner ses classes.

4.1.4 Loi initiale et loi à l'instant n

On a vu que la matrice de transition caractérise le passage de la chaîne de Markov d'un état à un autre. Pour connaître entièrement le comportement de la chaîne, il faut en plus se donner la position initiale $X_0 \in S$, ou, si la position de départ est aléatoire, la loi μ_0 de la position de X_0. Ainsi, μ_0 est une probabilité sur S, qu'on peut coder par un vecteur ligne de longueur N :

$$\mu_0 = (\mu_0(s_1), \ldots, \mu_0(s_N)),$$

satisfaisant $\mu_0(s_i) \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mu_0(s_i) = 1$. Le nombre $\mu_0(s_i)$ est la probabilité $\mathbb{P}(X_0 = s_i)$ que la chaîne démarre en s_i. On note alors $\mathbb{P}_{\mu_0}$ la loi de la chaîne de Markov ayant pour loi initiale μ_0.

Notons μ_1 la loi de X_1, position de la chaîne après 1 pas. Soit $j \in [1..N]$. Comme les $\{X_0 = s_i\}$, pour $i \in [1..N]$, forment un système complet, la formule des probabilités totales assure que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu_0}(X_1 = s_j) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_1 = s_j | X_0 = s_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mu_0(s_i) p_{i,j},\end{aligned}$$

et l'on reconnaît le j-ème coefficient du vecteur ligne obtenue par la multiplication matricielle $\mu_0 P$. Finalement,

$$\mu_1 = \mu_0 P.$$

En notant μ_n la loi de la chaîne de Markov après n pas, on montre de même que

$$\mu_{n+1} = \mu_n P \text{ et, par récurrence, } \mu_n = \mu_0 P^n.$$

Lemme 1. *$i \to j$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$.*

Démonstration : On a vu que

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) \in S^{n-1}} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{n-1},j}.$$

Si $i \to j$, alors soit $i = j$ et alors $p_{i,j}^{(0)} = 1 > 0$, soit $i \neq j$ et alors il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ et un chemin $(i, i_1, i_2, ..., i_{n-1}, j)$ orienté dans le graphe. Dans ce cas, $p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{n-1},j} > 0$, ce qui implique $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Réciproquement, si $p_{i,j}^{(0)} > 0$ alors (comme $P^0 = Id$) $i = j$; si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$, alors comme c'est une somme de termes, l'un de ces termes au moins est strictement positif : il existe $(i_1, i_2, ..., i_{n-1}) \in S^{n-1}$ tel que $p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{n-1},j} > 0$, ce qui est exactement la définition de $i \to j$. ■

Exercice 6. On reprend la marche aléatoire sur les sommets du pentagone, on numérote les sommets de 1 à 5, et on fait partir le marcheur de 1, c'est-à-dire qu'on prend $\mu_0 = \delta_0$. Calculer μ_1, μ_2 et μ_3.

4.2 Lois invariantes

4.2.1 Définition

Définition 3. On dit qu'une probabilité ν sur S est une *loi invariante* (ou probabilité invariante) de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrice de transition P si et seulement si

$$\nu P = \nu,$$

autrement dit si et seulement si ν est un vecteur propre à droite de P associé à la valeur propre 1.

Exercice 7. Montrer que la loi uniforme sur les sommets est invariante pour la marche aléatoire sur les sommets du pentagone.

Exercice 8. Quelles sont les lois invariantes pour la marche de l'ivrogne (on pourra commencer par le cas $n = 3$) ?

Si ν est une loi invariante pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qu'on prend comme loi initiale $\mu_0 = \nu$, alors on voit que pour tout n, la loi de X_n est encore ν. Ceci ne veut pas dire que X_n ne bouge pas, mais que la loi de X_n ne bouge pas : on parle d'équilibre dynamique.

4.2.2 Existence de lois invariantes

Théorème 1. *Soit S un ensemble fini et P une matrice de transition sur S. Alors P admet au moins une loi invariante.*

Démonstration : Remarquons qu'il est facile de voir que le vecteur ${}^t(1, \ldots, 1)$ est vecteur propre à droite pour P, associé à la valeur propre 1, et, les valeurs propres à droite et à gauche d'une matrice étant les mêmes, on en déduit que 1 est valeur propre à gauche. Mais ceci n'assure pas qu'on puisse trouver un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Il faut donc procéder autrement.

Soit μ une probabilité quelconque sur S. L'ensemble K des probabilités sur S (identifiées à des vecteurs lignes) est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$, donc il est compact. On considère la suites des moyennes de Césaro :

$$\nu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \mu P^m.$$

C'est une suite de probabilités sur S, donc une suite d'éléments du compact K : on peut donc trouver une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ν dans K. On va montrer que ν est une loi stationnaire pour P.

Il est clair que ν est une probabilité sur S puisque c'est un point de K. Maintenant, montrons que $\nu P = \nu$. Regardons $\nu_n P - \nu_n$:

$$\begin{aligned} \nu_n P - \nu_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} \mu P^{m+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} \mu P^{m} \\ &= \frac{1}{n+1}(\mu P^{n+1} - \mu). \end{aligned}$$

En particulier, comme $\mu \mathbb{P}^{n+1}$ et μ sont des probabilités, on voit que

$$\|\nu_n P - \nu_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}(\|\mu P^{n+1}\|_\infty + \|\mu\|_\infty) \leq \frac{2}{n+1} \to_{n\to\infty} 0.$$

On en déduit que $\lim_{n_k\to\infty}(\nu_{n_k}P - \nu_{n_k}) = 0$, et comme $\lim_{n_k\to\infty} \nu_{n_k} = \nu$, que

$$\nu P = (\lim_{n_k\to\infty} \nu_{n_k})P = \lim_{n_k\to\infty}(\nu_{n_k}P) = \lim_{n_k\to\infty}(\nu_{n_k}P - \nu_{n_k}) + \lim_{n_k\to\infty} \nu_{n_k} = \nu,$$

ce qui conclut la preuve. ■

4.2.3 Chaîne de Markov réversible

Définition 4. On dit qu'une chaîne de Markov à valeur dans un ensemble $S = \{s_1, \ldots, s_N\}$ fini et de matrice de transition P est *réversible* si et seulement si il existe une famille $(q_i)_{1\leq i\leq N}$ de nombres strictement positifs tels que pour tous $i, j \in [1..N]$:

$$q_i p_{i,j} = q_j p_{j,i}.$$

Dans ce cas, on voit que

$$\sum_{i=1}^{N} q_i p_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} q_j p_{j,i} = q_j \sum_{i=1}^{N} p_{j,i} = q_j.$$

Donc si on note $q = (q_1, \ldots, q_N)$, on a $qP = q$, et on obtient alors une loi stationnaire en normalisant q pour que la somme des coefficients soit égale à 1.

Remarque 5. *Le calcul d'une loi stationnaire nécessite en général la résolution d'un système linéaire de taille le cardinal de S, ce qui peut être coûteux quand ce cardinal est grand. L'avantage de la réversibilité est qu'elle donne gratuitement une loi stationnaire. Cependant, toutes les chaîne de Markov ne sont pas réversibles.*

4.2.4 Lois invariantes et classes transitoires

Lemme 2. *Soit P une matrice de transition sur un ensemble S fini ; on note $\mathcal{T}$ la réunion des classes transitoires, et $\mathcal{F}$ la réunion des classes fermées. On note T le temps d'entrée dans $\mathcal{F}$ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à P :*

$$T = \inf\{n \geq 0 : \ X_n \in \mathcal{F}\}.$$

Alors pour tout $i \in S$, $\mathbb{P}_i(T < +\infty) = 1$. Autrement dit, la chaîne de Markov finit toujours par entrer dans l'union des classes fermées.

Remarque 6. *T est aussi le temps de première sortie de $\mathcal{T}$, et aussi le temps de sortie définitive de $\mathcal{T}$. Pourquoi ?*

Démonstration : Remarquons que si $i \in \mathcal{F}$, alors $T = 0$ presque sûrement, et donc $\mathbb{P}_i(T = +\infty) = 0$. Soit maintenant $i \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(T = +\infty) &= \sum_{j\in S:\, i\to j} \mathbb{P}_i(X_1 = j, T = +\infty) \\
&= \sum_{j\in \mathcal{T}:\, i\to j} p_{i,j}\mathbb{P}_j(T = +\infty) + \sum_{j\in \mathcal{F}:\, i\to j} p_{i,j}\mathbb{P}_j(T = +\infty) \\
&= \sum_{j\in \mathcal{T}:\, i\to j} p_{i,j}\mathbb{P}_j(T = +\infty).
\end{aligned}$$

Soit maintenant $i_0 \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}_{i_0}(T = +\infty) = \max\{\mathbb{P}_i(T = +\infty) : \ i \in \mathcal{T}\} = m$, et supposons que $m > 0$. La formule précédente assure que pour tous les $\{j \in \mathcal{T} : \ i_0 \to j\}$, $\mathbb{P}_j(T = +\infty) = m$. Comme i_0 est dans une classe transitoire, il existe $n \in N^*$ et $i_1, \ldots, i_n$ tels que $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ soit un chemin orienté dans le graphe de la chaîne de Markov et i_n soit dans $\mathcal{F}$ (on avance le long d'une suite décroissante de classes pour l'ordre $\to$, jusqu'à tomber dans une classe fermée). De proche en proche, on voit que $\mathbb{P}_{i_j}(T = +\infty) = m$ pour tous les i_j dans le chemin, ce qui aboutit à une contradiction pour $i_n \in \mathcal{F}$. ■

Proposition 2. *Soit P une matrice de transition sur un ensemble S fini, soit μ une loi stationnaire pour P et on note $\mathcal{T}$ la réunion des classes transitoires, que l'on suppose non vide. Alors*

$$\mu(\mathcal{T}) = 0 \ \textit{et} \ \mu(\mathcal{F}) = 1.$$

Autrement dit, une loi stationnaire a son support inclus dans l'union des classes fermées.

Démonstration : On note T le temps de sortie de $\mathcal{F}$, le lemme précédent assure que T est fini presque sûrement. Remarquons qu'une fois qu'on sort de $\mathcal{T}$, c'est pour rentrer dans $\mathcal{F}$, dont on ne peut plus ressortir. Comme μ est une loi stationnaire, pour tout n on a :

$$\mu(\mathcal{T}) = \mathbb{P}_\mu(X_0 \in \mathcal{T}) = \mathbb{P}_\mu(X_n \in \mathcal{T}) = \mathbb{P}_\mu(T > n) = \sum_{i \in S} \mu(i)\mathbb{P}_i(T > n).$$

Pour un i fixé, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_i(T > n) = \mathbb{P}_i(T = +\infty) = 0$, et comme S est fini, on en déduit $\mu(\mathcal{T}) = 0$. ■

4.2.5 Unicité de la loi invariante

Théorème 2. *Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace S fini. On suppose que la chaîne de Markov est irréductible. Alors il existe une unique loi invariante pour P.*

Démonstration : On a déjà vu l'existence d'une loi stationnaire μ, reste à voir l'unicité. On rappelle que les lois stationnaires sont des vecteurs propres à gauche de P, associés à la valeur propre 1.

On renumérote les éléments de S en $1, 2, \ldots, N$. Montrons que 1 est valeur propre (à droite) simple de P. Soit $v = (v_i)_{1\leq i\leq N}$ un vecteur propre (à droite) non nul de P. Ses coordonnées satisfont le système

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} p_{i,j} v_j.$$

Soit i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max\{|v_i| : 1 \leq i \leq N\} > 0$. On remarque que quitte à prendre $-v$, on peut supposer que $v_{i_0} > 0$. Comme v_{i_0} est une combinaison convexe des $\{v_j : p_{i_0,j} > 0\}$, on en déduit que pour tout j tel que $p_{i_0,j} > 0$, $v_j = v_{i_0}$. De proche en proche, on va ainsi montrer que pour tout j dans la classe de i_0, $v_j = v_{i_0}$. Comme P est irréductible, on en déduit que pour tout j dans S, $v_j = v_{i_0}$, ce qui signifie que tous les vecteurs propres à droite de P, associés à la valeur propre 1, sont proportionnels à $(1, 1, \ldots, 1)$. Donc 1 est valeur propre simple (à droite) de P.

Comme les valeurs propres à droite et à gauche sont les mêmes, on en déduit que 1 est valeur propre (à gauche) simple de P. Donc toutes les lois stationnaires sont proportionnelles à μ, et comme deux probabilités proportionnelles sont égales, ceci prouve l'unicité de la loi stationnaire. ■

Lemme 3. *Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace S fini. On suppose que la chaîne de Markov est irréductible, et on note π son unique loi invariante. Alors pour tout $s \in S$, $\pi(s) > 0$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe $s \in S$ tel que $\pi(s) = 0$, et soit $t \in S\backslash\{s\}$. Par irréductibilité, il existe $n > 0$ tel que $p_{t,s}^{(n)} > 0$. Mais alors

$$0 = \pi(s) = \sum_{u \in S} \pi(u) p_{u,s}^{(n)} \geq \pi(t) p_{t,s}^{(n)},$$

ce qui implique $\pi(t) = 0$, et on aboutit à une contradiction. ■

Proposition 3. *Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un espace S fini. On suppose que P admet m classes fermées C_1, ..., C_m. Alors, pour chacune des classes fermées C_i, il existe une unique loi stationnaire μ_i pour P telle que $\mu_i(C_i) = 1$, et l'ensemble des lois stationnaires pour P est l'ensemble des combinaisons convexes des μ_i.*

Démonstration : Remarquons qu'une classe fermée est stable pour P : si $X_0 \in C_i$, alors pour tout n, $X_n \in C_i$. On est alors ramené au cas irréductible : il existe donc une unique loi stationnaire μ_i pour P telle que $\mu_i(C_i) = 1$, c'est la loi stationnaire associée au bloc de la matrice P correspondant à C_i.

Soit maintenant ν une loi stationnaire pour P. Soit C_i telle que $\nu(C_i) > 0$. On note

$$\nu_i = \frac{1}{\nu(C_i)} \sum_{s \in C_i} \nu(s) \delta_s.$$

C'est la restriction de ν à C_i, renormalisée pour faire une probabilité sur C_i.

$$(\nu_i P)(s) \quad = \quad \sum_{t \in C_i} \frac{1}{\nu(C_i)} \nu(t) p_{t,s} = \frac{1}{\nu(C_i)} \sum_{t \in S} \nu(t) p_{t,s}.$$

En effet, si $t \in S\backslash C_i$, alors soit t est dans une classe transitoire et comme ν est stationnaire, $\nu(t) = 0$, soit t est dans une autre classe fermée C_j, avec $j \neq i$, mais alors $p_{t,s} = 0$. Donc $(\nu_i P)(s) = \frac{1}{\nu(C_i)} \nu(s) = \nu_i(s)$. Donc ν_i est une loi stationnaire pour P restreinte à la classe fermée C_i, donc $\nu_i = \mu_i$. Mais on remarque que

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \nu(C_i) \nu_i = \sum_{i=1}^{m} \nu(C_i) \mu_i,$$

ce qui est bien une combinaison convexe des μ_i.

Finalement, il est clair qu'une combinaison convexe des μ_i est encore une loi stationnaire. ■

Exercice 9. chaîne de Markov à deux états. Soit $a, b \in]0, 1]$. On considère sur l'ensemble $S = \{1, 2\}$ la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire π pour P et la calculer.
2. On suppose que $ab < 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $\lambda = 1 - a - b$,

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}\lambda^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\lambda^n \end{pmatrix}.$$

   Quelle est la limite de P ? Soit μ une probabilité quelconque sur S. Quelle est la limite de μP^n ?
3. On suppose maintenant que $a = b = 1$. Calculer P^n et commenter.

Chapitre 5

Propriétés aymptotiques des chaînes de Markov

5.1 Quelques problèmes liés aux chaînes de Markov

Dans le chapitre précédent nous avons distingué les classes transitoires et les classes fermées. On a aussi vu qu'on finissait toujours par sortir définitivement de l'union des classes transitoires, pour aller dans l'union des classes fermées.

Question On peut se demander combien de temps met-on pour sortir des classes transitoires ? Et, lorsqu'il y a plusieurs classes fermées, dans quelle classe fermée tombe-t-on en sortant des classes transitoires ?

Quand on étudie le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov, on regarde déjà dans quelle classe fermée on arrive, puis, cette classe étant stable pour la matrice de transition, on peut restreindre la matrice de transition et se ramener au cas d'une chaîne de Markov irréductible.

5.2 Un exemple avec états absorbants

On considère la marche aléatoire de l'ivrogne, sur $[0..N]$, de paramètre $p \in]0,1[$ et de probabilités de transition

$$\begin{aligned}&\text{si } 1 \leq i \leq N-1, \text{ alors } p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1};\\ &p_{0,0} = p_{N,N} = 1.\end{aligned}$$

Considérons le problème suivant : si la chaîne part de l'état $k \in [1..N-1]$, quelle est la probabilité u_k que la chaîne s'arrête en 0.

Exercice 1. — Trouver une relation de récurrence sur les u_k, et en déduire leur expression. On pourra étudier séparément les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$.

— En procédant de la même manière, calculer l'espérance du nombre de pas, partant de k, que fait le marcheur avant de s'arrêter.

Dans le cas général, on doit résoudre des systèmes linéaires, pas toujours simples. On peut aussi opter pour une approche de type Monte Carlo : on simule un grand nombre d'expériences (marches de l'ivrogne jusqu'à l'état absorbant), et on compte la proportion des scénarios qui ont terminé en 0.

5.3 Théorème ergodique

Le théorème ergodique est une version de la loi forte des grands nombres adaptées aux chaînes de Markov.

Pour toute la suite nous allons noter $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'états fini S de matrice de transition P.

Commençons par introduire quelques notations.

Notations

- Premier temps de passage en $i \in S$

$$T_i(\omega) = \inf\{n \geq 1;\ X_n(\omega) = i\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

- Le $m^{\text{ième}}$ passage en i on peut le définir de façon récursive

$$T_i^{(0)}(\omega) = 0,\ T_i^{(1)}(\omega) = T_i(\omega)$$

et pour $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_i^{(m+1)}(\omega) = \inf\{n \geq T_i^{(m)}(\omega) + 1;\ X_n(\omega) = i\}.$$

- La longueur de la $m^{\text{ième}}$ excursion de i est donnée par

$$L_i^{(m)} = \begin{cases} T_i^{(m)} - T_i^{(m-1)} & \text{si } T_i^{(m-1)} < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1. Un état $i \in S$ est dit récurrent si

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour une infinité de } n) = 1.$$

L'état $i \in S$ est dit transient si

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour une infinité de } n) = 0.$$

Un état récurrent est un état où l'on revient toujours, tandis qu'un état transient est un état qu'on quitte éventuellement pour ne jamais y revenir.

Nous allons nous intéresser à la loi jointe des longueurs des excursions.

Lemme 1. *Pour $m = 2, 3, \ldots$, conditionnellement à $\{T_i^{(m-1)} < +\infty\}$, $L_i^{(m)}$ est indépendant de $\{X_j;\ j \leq T_i^{(m-1)}\}$ et*

$$\mathbb{P}\{L_i^{(m)} = n / T_i^{(m-1)} < \infty\} = \mathbb{P}_i(T_i = n).$$

Idée de la démonstration : On peut montrer que $X_{T_i^{(m-1)}} = i$ sur $\{T_i^{(m-1)} < +\infty\}$. Donc, conditionnellement à $\{T_i^{(m-1)} < +\infty\}$, le processus $(X_{T_i^{(m-1)}+n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov partant de i de matrice de transition P et indépendante de $X_0, \ldots, X_{T_i^{(m-1)}}$.

Or

$$L_i^{(m)} = \inf\{n \geq 1;\ X_{T_i^{(m-1)}+n} = i\},$$

donc $L_i^{(m)}$ est le premier temps de passage de $(X_{T_I^{(m-1)}+n})_{n\geq 0}$ par l'état i.

Notations (suite) On introduit les notations suivantes

- Nombre de visites en i

$$V_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}.$$

- Nombre de visite en i avant n

$$V_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = i\}}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(V_i) &= \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{X_n=i\}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_i(X_n = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)}. \end{aligned}$$

Théorème 1.

(i) Si $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ alors l'état i est récurrent et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.

(ii) Si $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ alors l'état i est transient et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$.

En particulier un état de S est soit récurrent soit transient. On peut montrer que la récurrence ou la transience sont des propriétés communes à une classe communiquante. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2. *Soit C une classe communiquante. Alors soit tous les états de C sont transients, soit tous les états de C sont récurrents.*

Démonstration : Soit i et j deux états de C.

Supposons que i est un état transient. Il existe alors $l, k \geq 0$ tels que

$$p_{ij}^{(l)} > 0 \text{ et } p_{ji}^{(k)} > 0.$$

Pour tout $r \geq 0$ on a

$$p_{ii}^{(l+r+k)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(k)}.$$

En faisant la somme sur r on déduit que

$$\sum_{r=0}^{+\infty} p_{jj}^{(r)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(l)} p_{ji}^{(k)}} \sum_{r=0}^{+\infty} p_{ii}^{(l+r+k)} < +\infty,$$

avec le théorème 5.3.4 appliqué pour l'état i.

Par le même théorème on déduit que l'état j est aussi transient.

■

Théorème 3. *Supposons que la chaîne de Markov est irréductible et récurrente. Alors pour tout $i \in S$, $\mathbb{P}(T_i < +\infty) = 1$.*

Démonstration : Par la propriété de Markov on a :

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_0 = j) \mathbb{P}_j(T_i < +\infty),$$

il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}_j(T_i < +\infty) = 1$, pour tout $j \in S$. Soit m tel que $p_{ij}^{(m)} > 0$. On a alors avec le théorème 5.3.3

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour une infinité de } n) \\
&= \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour } n \geq m+1) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ pour } n \geq m+1 / X_m = k) \mathbb{P}_i(X_m = k) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_k(T_i < +\infty) p_{ik}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} = 1$. On déduit alors que $\mathbb{P}_j(T_i < +\infty) = 1$, d'où le résultat.

■

Nous allons maintenant énoncer le théorème ergodique correspondant aux chaînes de Markov. Nous nous intéressons au comportement limite des moyennes dans le temps.

Avec les notations précédentes $\frac{V_i(n)}{n}$ peut être interprétée comme la proportion de temps passée dans l'état i avant l'instant n.

Théorème 4. *Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ irréductible, à valeurs dans un espace d'état fini S. Soit μ_0 la loi initiale de cette chaîne de Markov et π son unique loi stationnaire. Alors :*

(i) Nous avons la convergence presque sure :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{m_i},$$

où $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$, est l'espérance du temps de retour en i.

(ii) Pour toute fonction bornée $f : S \to \mathbb{R}$ on a, p.s.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{s\in S} f(s)\pi(s).$$

Démonstration : Commençons par une remarque préliminaire.

Si $m_i = \mathbb{E}_i(T_i) < +\infty$ on dit que l'état i est *récurrent positif*. On a alors équivalence entre les propriétés suivantes, lorsque la chaîne est irréductible :

(1) tous les états sont récurrents positifs

(2) un état i est récurrent positif

(3) il existe une probabilité invariante π.

Lorsque (3) est vrai on a $m_i = \frac{1}{\pi(i)}$ où $\pi = (\pi(i);\, i \in S)$.

Si une chaîne de Markov est irréductible et si son espace d'états est fini, tous ses états sont récurrents positifs.

Montrons (i). Dans ce cas les états sont récurrents. Soit $i \in S$, alors $\overline{\mathbb{P}(T_i < +\infty) = 1}$ avec le théorème 5.3.3.

On peut montrer que $(X_{T_i+n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale δ_i, qui est de plus indépendante de $X_0, \dots, X_{T_i+n}$ (avec la propriété forte de Markov).

La proportion de temps passée dans l'état i, lorsque $n \to +\infty$ est la même pour $(X_{T_i+n})_{n\geq 0}$ qui part de δ_i et pour $(X_n)_{n\geq 0}$ qui part de μ_0. Il suffit donc de considérer le cas $\mu_0 = \delta_i$.

Notons par $L_i^{(m)}$ la longueur de la $m^{\text{ième}}$ excursion pour i. Par le Lemme 5.3.1 on peut montrer que $L_i^{(1)}, L_i^{(2)}, \dots$ sont des variables aléatoires *i.i.d.* avec

$$\mathbb{E}_i(L_i^{(m)}) = m_i.$$

Remarquons aussi que

$$L_i^{(1)} + \ldots + L_i^{(V_i(n)-1)} \leq n-1,$$

la partie de gauche représentant l'instant de la dernière visite de l'état i avant $n-1$. On a par ailleurs :

$$L_i^{(1)} + \ldots + L_i^{(V_i(n))} \geq n,$$

car la partie de gauche représente le temps de la première visite en i après l'instant $n-1$. On déduit ainsi

$$\frac{L_i^{(1)} + \ldots + L_i^{(V_i(n)-1)}}{V_i(n)} \leq \frac{n}{V_i(n)} \leq \frac{L_i^{(1)} + \ldots + L_i^{(V_i(n))}}{V_i(n)}. \tag{5.1}$$

En appliquant maintenant la loi forte de grands nombres à la suite de *v.a.* $(L_i^{(j)})_{j\geq 1}$ on a la convergence *p.s.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L_i^{(1)} + \ldots + L_i^{(n)}}{n} = m_i.$$

La chaîne étant récurrente on déduit que, *p.s.* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_i(n) = +\infty$.

En faisant $n \to +\infty$ dans (5.1) on a que, *p.s.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{V_i(n)} = m_i,$$

ce qui implique que ($m_i \neq 0$), *p.s.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{m_i},$$

et donc le résultat annoncé.

Montrons *(ii)*. Soit $(\pi(i);\, i \in S)$ la loi stationnaire de $(X_n)_{n\geq 0}$ et $f\,:\,S \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Admettons, sans perte de généralité que $|f| \leq 1$. On peut alors évaluer la différence

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \sum_{i\in S} f(i)\pi(i)\right| &= \left|\sum_{i\in S}\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi(i)\right) f(i)\right| \\
&\leq \sum_{i\in S}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi(i)\right| \\
&\leq
\end{aligned}$$

On a vu précédemment que, $p.s.$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \pi(i).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $\omega \in \Omega$, il existe alors un rang $N(\omega)$ tel que pour tout $n \geq N(\omega)$

$$\sum_{i \in S} \left| \frac{V_i(n)}{n} - \pi(i) \right| < \varepsilon.$$

Ce qui conduit à la convergence souhaitée. ■