TP1 – Méthodes de Monte Carlo et techniques de réduction de variance, application au pricing d'options

1 Les options

Le but de ce TP est d'estimer le prix des options de type européen par la méthode de Monte Carlo.

Une option européenne est un contrat qui donne le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou d'un actif à un prix convenu à l'avance, appelé prix d'exercice, et à une date fixée, dite échéance de l'option.

En contrepartie l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le prix de l'option.

Il existe essentiellement deux types d'options :

- les options d'achat (call)
- les options de vente (put).

Définition Un *call européen* ou une option d'achat européenne (resp. un *put européen* ou une option de vente européenne) sur un actif est un titre qui donne le droit à son détenteur, et non l'obligation, d'acheter (resp. de vendre) cet actif à une date fixée T, dite échéance, et à un prix K convenu d'avance, appelé prix d'exercice (ou strike).

Nous notons par

(1) C (resp. P) le prix de l'option d'achat (resp. de vente) à $t = 0$, c'est la prime,

(2) K le prix, fixé à l'instant 0 d'achat (resp. de vente) de l'actif à l'instant T; K est appelé prix d'exercice ou strike,

(3) T l'échéance,

(4) C_t (resp. P_t) la valeur de l'option d'achat (resp. de vente), à l'instant t; on a évidemment $C = C_0$ (resp. $P = P_0$),

(5) S_t le prix de l'actif sous-jacent sur le marché, à l'instant t, pour $t \in [0, T]$.

L'objectif de ce qui suit est de calculer la valeur de la prime.

Option d'achat

Comme pour tous les produits financiers il y a deux contreparties : l'acheteur de l'option d'achat et le vendeur de l'option d'achat.

Achat d'un call

Considérons le point de vue de l'acheteur d'une option d'achat européenne. L'option d'achat porte sur une unité d'actif et a un prix d'exercice K et une échéance T. Avec la notation précédente S_T est la valeur à la date T de l'actif support.

À l'échéance T deux situations peuvent se produire :

(1) Si $S_T > K$ alors le détenteur de l'option exerce l'option. Il se procure le titre au prix K (convenu à $t = 0$) et le revend immédiatement sur le marché au prix S_T. Son profit est égal à $S_T - K$.

(2) Si $S_T \leq K$ le détenteur de l'option ne l'exerce pas. Son gain est nul. Sa perte est limitée à la prime.

Dans tous les cas le profit est $(S_T - K)_+$.

L'acheteur de l'option verse à l'instant initial au vendeur le prix C_0 de cette option, c'est la prime. Si on note par r le taux d'intérêt sans risque dans le cas continu, alors le gain à l'échéance T est $(S_T - K)_+ - C_0 e^{rT}$.

En traçant le profil du gain d'un call acheté on remarque que le gain est illimité et que la valeur maximale de la perte est limitée à la prime.

Conclusion : Plus S_T est grand plus le gain est important. On souscrit une option d'achat lorsqu'on anticipe une hausse du prix de l'actif.

Option de vente

Achat d'un put

L'acheteur d'un put réalise un gain égal à $(K - S_T)_+ - P_0 e^{rT}$.

Formule de parité call put

Une hypothèse que nous devons imposer dans l'étude mathématique des options est l'absence d'opportunité d'arbitrage, ce qui équivaut à l'impossibilité de gagner de l'argent sans prise de risque au départ. Cette condition entraîne une relation dite de parité entre le call et le put européens.

Considérons une option d'achat et une option de vente portant sur une unité d'un même actif, avec la même maturité T et le même prix d'exercice K.

Notons par $(C_t)_{t\in[0,T]}$ le prix du call et $(P_t)_{t\in[0,T]}$ le prix du put à l'instant t. Notons par r le taux d'intérêt instantané (annuel).

À l'échéance on a $C_T = (S_T - K)_+$ et $P_T = (K - S_T)_+$, donc $C_T - P_T = S_T - K$.

Proposition Si le marché est sans opportunité d'arbitrage alors, pour tout t, $0 \leq t \leq T$ on a :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{1}$$

Preuve : Supposons que la relation de parité n'est pas satisfaite, supposons qu'à l'instant t avec $0 \leq t \leq T$ on ait par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{2}$$

On va montrer qu'il existe alors une opportunité d'arbitrage.

On construit le portefeuille suivant à l'instant t : on achète l'actif et un put et on vend un call. Cette opération dégage un profit net égal à $C_t - P_t - S_t$. Si $C_t - P_t - S_t > 0$ on place cette somme au taux r jusqu'à T; sinon on emprunte la même somme jusqu'à la date T. Nous avons ainsi constitué un portefeuille de valeur 0 en t.

À la date T deux cas peuvent se produire :

(1) Si $S_T > K$ alors le call est exercé, on n'exerce pas le put et on encaisse donc K, ensuite on solde le prêt (l'emprunt) on se retrouve donc avec une richesse égale à

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

(2) Si $S_T \leq K$ on exerce le put, le call n'est pas exercé. En soldant comme au point (1) on se retrouve avec la même richesse.

Dans les deux cas on se retrouve avec *un gain strictement positif à l'instant* T avec une mise de fond nulle à l'instant t, c'est un exemple d'arbitrage.

Formule de Black-Scholes

Revenons au cas d'un call européen. Soit $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ le prix (aléatoire) du sous-jacent à l'instant t.

Nous admettons qu'en moyenne le gain de l'acheteur d'un call est donc égal à $\mathbb{E}[(S_T - K)_+] - C$. Pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage (pour que le jeu soit équitable) on doit donc imposer $C = \mathbb{E}[(S_T - K)_+]$.

Nous considérons que le prix de l'actif sous-jacent est modélisé par un processus stochastique appelé mouvement brownien géométrique qui a la forme :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

où $(B_t, t \in [0, T])$ est un mouvement brownien, en particulier, à t fixé B_t est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance t.

Une modélisation couramment utilisée pour décrire le cours d'un sous-jacent est la suivante, entre les instants t_k et t_{k+1}, le prix de l'actif évolue selon la loi

$$S_{t_{k+1}} - S_{t_k} = \xi_{k+1} S_{t_k},$$

où les ξ_k sont des *v.a.i.i.d.* centrées. On déduit que

$$\begin{aligned} S_{t_k} &= \prod_{i=1}^{k}(1+\xi_i)S_0 \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{k}\log(1+\xi_i)\right)S_0. \end{aligned}$$

Lorsque le pas d'échantillonnage en temps est petit, S_T est l'exponentielle de la somme d'un grand nombre de *v.a.i.i.d.* En effectuant une renormalisation convenable, on peut appliquer le TCL et en déduire que $S_T \to e^{\beta G}$ en loi, où G est une normale centrée et réduite et $\beta > 0$.

On a alors

$$C = \mathbb{E}[(\exp(\beta G) - K)_+],$$

où G est une variable gaussienne centrée et réduite.

Cette formule célèbre a été obtenue par Black et Scholes (1973), et leur a valu le prix Nobel d'économie.

Pour les mêmes raisons on peut montrer que $P = \mathbb{E}[(K - \exp(\beta G))_+]$ où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Les valeurs pratiques utilisées pour β sont de l'ordre de l'unité.

Dans la suite nous allons présenter différentes méthodes de Monte-Carlo pour estimer le call et le put.

2 Pricing des options européennes

Exercice 1 : Formule de Black-Scholes

Calcul exact du call et du put.

Montrer que

$$C = \mathrm{e}^{\frac{\beta^2}{2}} N\left(\beta - \frac{\log(K)}{\beta}\right) - KN\left(-\frac{\log(K)}{\beta}\right),$$

avec

$$N(x) = \mathbb{P}(G \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y.$$

En déduire aussi la formule pour le put

$$P = KN\left(\frac{\log(K)}{\beta}\right) - \mathrm{e}^{\frac{\beta^2}{2}} N\left(\frac{\log(K)}{\beta} - \beta\right).$$

Notons $\phi(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y$. Exprimer les formules précédentes en fonction de ϕ.

Pour la suite nous allons considérer $\beta = 1$ et $K = 1$.

Exercice 2 : Méthode de Monte Carlo

1. Écrire une méthode de Monte Carlo pour le calcul de C. Tracer sur un même graphe la valeur de C donnée par la formule exacte, la valeur approchée de C par la méthode de Monte Carlo, et les bornes des intervalles de confiance, en fonction du nombre de simulations.

2. Traiter la même question pour le put P.

3. Commenter.

Exercice 3 : Échantillonnage préférentiel

1. Pour x petit on a $e^x - 1 \approx x$. En utilisant cette remarque exprimer C sous la forme :

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}\left(\frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}}\right) \tag{3}$$

   où Y est une *v.a.* exponentielle de paramètre 1.

2. Estimez ensuite C par une méthode de Monte Carlo basée sur cette expression (3).

3. Comparez avec la méthode de l'exercice 2, en terme de précision et en terme de temps de calcul.

Exercice 4 : Variables de contrôle

1. En utilisant la formule de parité, approchez C en utilisant une valeur approchée de P.

2. Estimez le call par une méthode de Monte Carlo basée sur le calcul approché de P. Comparez aux méthodes précédentes, en terme de précision et en terme de temps de calcul.

Exercice 5 : Variables antithétiques

Soit G une gaussienne centrée et réduite. Comme G et $-G$ ont la même loi, on peut approcher C par

$$C \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} [(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+],$$

où $(G_i)_{i \geq 1}$ note une suite de *v.a.i.i.d.* de loi gaussienne centrée et réduite.

Justifiez l'application de la méthode et comparez cette méthode aux méthodes précédentes.

Exercice 6 : Comparaison

Conclure en comparant l'ensemble des méthodes.