

Introduction aux équations d'évolution
Équation de Schrödinger non linéaire

Feuille 4

Équation de Schrödinger non-linéaire, Solitons

On rappelle que $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Exercice 1 Soit $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont également solution.

1. $u_1(t, x) = e^{i\theta}u(t, x)$, où θ est fixé.
2. $u_2(t, x) = u(t - t_0, x - x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
3. $u_3(t, x) = u(t, Ax)$, où $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
4. $u_4(t, x) = u(t, x - 2v_0t)e^{i(v_0 \cdot x - |v_0|^2t)}$, où $v_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés. (Invariance Galiléenne)
5. $u_5(t, x) = \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda^2t, \lambda x)$.

Exercice 2 On considère l'équation de Schrödinger cubique focalisante

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = -|u|^2u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que $u(t, x) = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(x)}e^{it}$ est solution de (1).

2. (a) Montrer que

$$u(t, x) = e^{it} \left(1 - \frac{4(1 + 2it)}{1 + 2x^2 + 4t^2} \right)$$

est solution de (1).

(b) Calculer $|u|^2$ est montrer que $x \mapsto |u|^2(t, x)$ admet au moins trois maxima sur \mathbb{R} si $|t|$ est assez petit.

3. (a) Montrer que

$$u(t, x) = 2e^{it/2} \text{ch}^3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{4 \text{ch}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 3(e^{i4t} - 1)}{4 \text{ch}^4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 3 \sin^2(2t)}$$

est solution de (1).

(b) Calculer $|u|^2$ est montrer que $x \mapsto |u|^2(\frac{\pi}{4}, x)$ admet au moins trois maxima sur \mathbb{R} .

Exercice 3 On considère l'équation de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (2)$$

1. Soit u une solution de (2) de la forme $u(t, x) = \varphi(x - ct)$ avec $c \in \mathbb{R}$ (On dit que u est une onde solitaire). Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que φ soit solution de l'équation différentielle

$$-c\varphi(x) + \varphi''(x) + 3\varphi^2(x) = A, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{c}{2 \operatorname{ch}^2(\frac{\sqrt{c}}{2}x + \alpha)}$ est solution de (3).

Exercice 4 On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) + \partial_x^3(u^2) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (4)$$

Soit $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction u sur \mathbb{R}^2 par

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{4c}{3} \cos^2\left(\frac{x-ct}{4}\right) & \text{si } |x-ct| \leq 2\pi, \\ 0 & \text{si } |x-ct| \geq 2\pi. \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto u(t, x)$ est à support compact.
2. Montrer que u est solution de (4). Une telle solution est appelée compacton.