Université de Nantes Année 2011-2012

Introduction aux équations d'évolution
Équation de Schrödinger non linéaire

Feuille 3

Équation de Schrödinger linéaire

Notations : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$. Si A, B sont deux opérateurs on définit le commutateur $[A, B] = AB - BA$.
Convention : $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$. Alors $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int_{\xi\in\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$

Exercice 1 Soit $(f_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{it\Delta} f_n \longrightarrow \mathrm{e}^{it\Delta} f \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Exercice 2 On suppose que $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution des ondes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = f(x), \\ \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Montrer que

$$\widehat{u}(t,\xi) = \cos(|\xi|t)\widehat{f}(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\widehat{g}(\xi).$$

Notation : On écrit

$$u(t,\cdot) = \cos(\sqrt{-\Delta}t)f + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{-\Delta}}g.$$

Exercice 3 **(Formule de Duhamel)**
Soit $F \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$.

1. On suppose que $u \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution de l'équation de Schrödinger inhomogène

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

   Montrer que

$$u(t,\cdot) = \mathrm{e}^{it\Delta} f - i \int_0^t \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta} F(s,\cdot)\mathrm{d}s.$$

2. On suppose que $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution de l'équation des ondes inhomogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = f(x), \\ \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Montrer que

$$u(t,\cdot) = \cos(\sqrt{-\Delta}t)f + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{-\Delta}}g - \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}(t-s))}{\sqrt{-\Delta}}F(s,\cdot)\mathrm{d}s.$$

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\Delta u(A\cdot) = (\Delta u)(A\cdot)$
2. Montrer que si u est solution de Schrödinger linéaire, alors $(t,x) \longmapsto u(t,Ax)$ aussi.
3. Soit u une solution de Schrödinger linéaire, et on suppose que $u(0,\cdot)$ est radiale. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t,\cdot)$ est radiale.

Exercice 5 Soit $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont également solution, et que leur norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ est égale à celle de u :

1. $u_1(t,x) = \mathrm{e}^{i\theta}u(t,x)$, où θ est fixé.
2. $u_2(t,x) = u(t-t_0, x-x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
3. $u_3(t,x) = u(t,Ax)$, où $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
4. $u_4(t,x) = u(t, x-2v_0t)\mathrm{e}^{i(v_0\cdot x - |v_0|^2 t)}$, où $v_0 \in \mathbb{R}^d$ est fixé. (Invariance Galiléenne)
5. $u_5(t,x) = \lambda^{d/2}u(\lambda^2 t, \lambda x)$.

Exercice 6

1. Soit $a \in]0,+\infty[$, on définit f_a par $f_a(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f_a}(\xi) = a^{-1/2}\widehat{f_1}(a^{-1/2}\xi)$.
2. Établir une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f_1}$. En déduire $\widehat{f_1}$, puis que

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{(2a)^{1/2}}\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)}.$$

3. On suppose maintenant que $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit g_a par $g_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|^2}$. Montrer que

$$\widehat{g_a}(\xi) = \frac{1}{(2a)^{d/2}}\mathrm{e}^{-|\xi|^2/(4a)}. \tag{1}$$

4. Grâce à un argument de prolongement analytique, montrer que la formule (1) reste valable pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ tel que Re $a > 0$. (Ici $a^{1/2}$ désigne la racine carrée de partie réelle positive pour Re $a > 0$.)
5. Donner un sens à la formule (1) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour a tel que Re $a \geqslant 0$, $a \neq 0$.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $u_0(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$. Montrer que $u(t) = \mathrm{e}^{it\Delta}u_0$ est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{(1+4it\pi)^{d/2}} \exp\big(-\frac{\pi|x|^2}{1+16\pi^2t^2}\big) \exp\big(\frac{4i\pi^2|x|^2t}{1+16\pi^2t^2}\big) = \frac{1}{(1+4it\pi)^{d/2}} \exp\big(-\frac{\pi|x|^2}{1+4i\pi t}\big).$$

Exercice 8 Soit $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g_\varepsilon(x) = (\pi\varepsilon)^{-d/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/\varepsilon}$. Pour $t \geqslant 0$, on définit $u_\varepsilon(t) = \mathrm{e}^{it\Delta}g_\varepsilon$.

1. Montrer que $g_\varepsilon \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.
2. Calculer u_ε et en déduire que
$$u(t,x) = \mathrm{e}^{it\Delta}\delta_0(x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)} = \frac{\mathrm{e}^{-id\pi/2}}{(4\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}.$$
3. Vérifier que $u(t) \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, lorsque $t \longrightarrow 0$.

Exercice 9 (Invariance pseudoconforme)
Soit $u \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$. On définit $v : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$v(t,x) = \frac{1}{t^{d/2}}u(-\frac{1}{t},\frac{x}{t})\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Montrer que pour $t > 0$

$$\big(i\partial_t v + \Delta v\big)(t,x) = \frac{1}{t^{d/2+2}}\big(i\partial_t u + \Delta u\big)(-\frac{1}{t},\frac{x}{t})\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}.$$

En particulier, si u est solution de Schrödinger, alors v aussi.

Exercice 10 Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, on définit les opérateurs $\Gamma_j = x_j + 2it\partial_{x_j}$.

1. Montrer que Γ_j commute avec Γ_k. Ainsi, pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on peut noter $\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1}\dots\Gamma_j^{\alpha_j}$.
2. Montrer que Γ_j commute avec $i\partial_t + \Delta$.
3. Montrer que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
$$\Gamma^\alpha f = \mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}(2it\partial_x)^\alpha \mathrm{e}^{-i|x|^2/(4t)}f.$$
4. Montrer que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
$$\Gamma^\alpha f = \mathrm{e}^{it\Delta}x^\alpha\mathrm{e}^{-it\Delta}f.$$
(*Indication : On pourra utiliser la transformée de Fourier.*)
5. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $x^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\Gamma^\alpha\mathrm{e}^{it\Delta}u_0 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^d)\big)$. En déduire que
$$\partial_x^\alpha\big(\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}\mathrm{e}^{it\Delta}u_0\big) \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^*;L^2(\mathbb{R}^d)\big),$$
puis que $\partial_x^\alpha\big(\mathrm{e}^{it\Delta}u_0\big) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ pour $t \neq 0$.
6. Soit $u_0 \in H^s$ avec $s \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que $x^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour $|\alpha| \leqslant s$. Montrer que
$$\mathrm{e}^{it\Delta}u_0 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R};H^s \cap L^2(|x|^s\mathrm{d}x)\big).$$

Exercice 11 Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \left\| \mathrm{e}^{it\Delta} f - U(t)f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \tag{2}$$

où $U(t)f$ est défini par

$$U(t)f(x) = \frac{1}{(2it)^{d/2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \widehat{f}(\frac{x}{2t})$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur unitaire.
2. Déduire de la question précédente qu'il suffit de montrer (2) pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On suppose donc désormais que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. Montrer que

$$\mathrm{e}^{it\Delta} f(x) - U(t)f(x) = \frac{1}{(2it)^{d/2}} \mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}} \widehat{F}_t(\frac{x}{2t}) = U(t)F_t(x),$$

où $F_t(y) = \big(\mathrm{e}^{i|y|^2/(4t)} - 1\big) f(y)$.
Indication : On utilisera la formule avec la convolution pour représenter $\mathrm{e}^{it\Delta}$.

4. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathrm{e}^{is} - 1 \right| \leqslant C|s|,$$

et conclure.

Exercice 12 Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$, et on pose $u(t) = \mathrm{e}^{it\Delta} f$. On se propose de montrer que pour tout $2 < p \leqslant 6$,

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ qui converge vers f dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. On pose $u_n(t, \cdot) = \mathrm{e}^{it\Delta} f_n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant \mathbb{N}$,

$$\|u_n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

2. Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty$$

3. Conclure.

Exercice 13 Montrer que les estimations de Strichartz sont invariantes par les transformations données à l'exercice 5, autrement dit, pour tout $1 \leqslant j \leqslant 6$ on a

$$\|u_j\|_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))},$$

si p et q sont admissibles.

Exercice 14 Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $S(t) : L^2(\mathbb{R}) \longmapsto L^2(\mathbb{R})$ par $S(t)u(x) = u(t + x)$. Pour quelles valeurs de $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ a-t-on

$$\|S(t)u\|_{L^p([0,1];L^q(\mathbb{R}))} \leqslant C\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Exercice 15 (Transformation de Lorentz)
Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on note $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$. Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Pour $u \in E$ et $\beta \in]-1,1[$, on définit la fonction $L_\beta u$ par

$$L_\beta u(t,x) = u\big(\frac{t-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{x-\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\big).$$

1. Montrer que $[L_\beta, \Box]$. En déduire que si u est solution de $\Box u = 0$, alors $L_\beta u$ aussi.

2. Montrer que les L_β, $|\beta| < 1$ forment un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$. On montrera en particulier que $L_\beta \circ L_\gamma = L_{\beta\star\gamma}$ où $\beta \star \gamma$ est à déterminer.

3. On définit $\Gamma(t) = L_{\mathrm{th}(t)}$. Montrer que $(\Gamma(t)_{t\in\mathbb{R}}, \circ)$ est un groupe.