Introduction aux équations d'évolution
Équation de Schrödinger non linéaire

Feuille 2

Semi-groupes

Notation : Si A, B sont deux opérateur on définit le commutateur $[A, B] = AB - BA$.

Exercice 1 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $t \longrightarrow A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Rappeler la solution de ce système lorsque A ne dépend pas de t.
   (b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution s'écrit $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0$.
2. On suppose que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Montrer que la solution s'écrit $X(t) = \exp\big(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\big) X_0$.
3. (a) On suppose que $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution du système est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + (t-1)\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} X_0.$$

   (b) Montrer que : $\exp\big(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\big) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Commentaire ?

Exercice 2 Dans $E = L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit l'opérateur $A = \Delta$.

1. On suppose que $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que A est fermé.
2. On suppose que $D(A) = H^4(\mathbb{R}^d)$. Montrer que A n'est pas fermé.

Exercice 3 (Groupe des translations)
Soit $E = \mathcal{C}_{\to 0}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini). On définit la famille d'opérateurs $T_t : E \longrightarrow E$ par $T_t f(x) = f(x+t)$.

1. Montrer que T_t est un groupe fortement continu.

2. Montrer que son générateur infinitésimal est donné par

$$D(A) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R});\ f' \in E\}, \quad A = \partial_x.$$

Exercice 4 (Groupe des translations, bis)
Sur $L^2(\mathbb{R})$ on définit la famille d'opérateurs $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ par $T_t f(x) = f(x+t)$.

1. (a) Montrer que T_t est un groupe fortement continu.
   (b) Montrer que son générateur infinitésimal est donné par

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}), \quad A = \partial_x.$$

2. Soit u_t la fonction indicatrice de $[t, 2t]$.
   (a) Calculer $\|u_t\|_2$ et $\|T_t u_t - u_t\|_2$.
   (b) En déduire que l'application $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $t \longmapsto T_t$ n'est pas continue en 0.

Exercice 5 Sur $L^2(\mathbb{R})$, on définit la famille d'opérateur $S(t)$ par $S(0) = Id$ et

$$S(t)f(x) = \frac{t}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y^2+t^2}\mathrm{d}y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $S(t)$ est un groupe fortement continu. *Indication : On pourra appliquer la transformée de Fourier.*
2. Décrire à l'aide de la transformée de Fourier la restriction de son générateur infinitésimal sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (Semi-groupe de la chaleur)
Sur $L^2(\mathbb{R})$, on définit la famille d'opérateur $S(t)$ par $S(0) = Id$ et

$$S(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathrm{e}^{-y^2/t}\mathrm{d}y, \quad t \geqslant 0.$$

1. Montrer que $S(t)$ est un semi-groupe fortement continu. *Indication : On pourra appliquer la transformée de Fourier.*
2. Montrer que son générateur infinitésimal A est donné par

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}), \quad A = -\partial_x^2.$$

Exercice 7 (Groupe de Galilée)
On note $P = i\partial_t + \partial_x^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $G_\lambda : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$G_\lambda u(t,x) = u(t, x - 2\lambda t)\mathrm{e}^{i(\lambda x - \lambda^2 t)}.$$

1. Vérifier que G_λ est bien défini.
2. Montrer que G_λ est un groupe unitaire.
3. Montrer que G_λ est fortement continu.
   Indication : Introduire $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.
4. Montrer que la restriction de son générateur infinitésimal sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est $i\Gamma$, avec $\Gamma = x + 2it\partial_x$.

5. Vérifier que $[\Gamma, P] = 0$.

6. (Facultatif) Soit u la solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ de $Pu = 0$ avec donnée $u(t = 0) = u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrer que $v = \Gamma u$ est la solution de $Pv = 0$ avec donnée $v(t = 0) = xu_0$.

Exercice 8 (Groupe des dilatations)
On note $P = i\partial_t + \partial_x^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $L_\lambda : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$L_\lambda u(t, x) = u(\mathrm{e}^{2\lambda} t, \mathrm{e}^{\lambda} x).$$

1. Vérifier que L_λ est bien défini.

2. Montrer que L_λ est un groupe.

3. Montrer que L_λ est fortement continu. *Indication : S'inspirer du 3. de l'exercice précédent.*

4. Montrer que la restriction de son générateur infinitésimal sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est $\Lambda = 2t\partial_t + x\partial_x$.

5. Vérifier que $[\Lambda, P] = -2P$ et que $[\Lambda, \Gamma] = \Gamma$, où $\Gamma = x + 2it\partial_x$.

6. (Facultatif) Soit u la solution de $Pu = 0$ avec donnée $u(t = 0) = u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrer que $v = \Lambda u$ est la solution de $Pv = 0$ avec donnée $v(t = 0) = x\partial_x u_0$.

Exercice 9 (Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck)
Soit $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}$ et $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$. Pour $f \in H$ et $t \geqslant 0$, on définit

$$N_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\big(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\, y\big) \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y.$$

1. Le but de cette question est de montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $N_t : H \longrightarrow H$.

   (a) Montrer que

   $$|N_t f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f^2\big(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\, y\big) \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y.$$

   (b) Montrer que pour tout $f \in H$, $\|N_t f\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$. *Indication : On pourra faire le changement de variables* $u = e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y$, $v = -\sqrt{1 - e^{-2t}}x + e^{-t}y$.

2. Montrer que $N_0 = Id$ et que pour $t, s \geqslant 0$, $N_t \circ N_s = N_{t+s}$. *Indication : On pourra faire un changement de variables dans l'esprit du précédent.*

3. Montrer que $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est fortement continu.

4. Soit A le générateur infinitésimal de N. Montrer que la restriction de A sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est

$$A = \partial_x^2 - x\partial_x.$$