Université de Nantes Année 2011-2012
Cours EDP, M2

Feuille 1

Inégalité fonctionnelles, espaces de Sobolev

Exercice 1 (Hölder)

1. Vérifier l'inégalité de convexité
$$a^\theta b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta)b, \qquad a, b \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{1}$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder
$$\|fg\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{2}$$

3. En déduire
$$\| \prod_{1\leqslant j\leqslant k} u_j\|_{L^r} \leqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \|u_j\|_{L^{p_j}}, \quad \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}. \tag{3}$$

Exercice 2 (Interpolation)

1. **Lebesgue :** Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $p \in [p_1, p_2]$ de sorte que
$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$
En utilisant (2), montrer que
$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|^\theta_{L^{p_1}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}}. \tag{4}$$
Application de (4) : Soit $f \in \cap_{p\geqslant 1} L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout p,
$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}.$$

2. **Sobolev** : Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $s \in [s_1, s_2]$, de sorte que
$$s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$
Montrer que
$$\|f\|_{H^s} \leqslant \|f\|^\theta_{H^{s_1}} \|f\|^{1-\theta}_{H^{s_2}}.$$

Exercice 3 Trouver exactement les $s \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a $f \in H^s(\mathbb{R})$ pour les distributions f suivantes :
$$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad f_4(x) = \mathbf{1}_{]-1,1[}(x), \quad f_5(x) = \delta_0(x).$$

Exercice 4 Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Pour $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit v par $u(x,y) = v(r,\theta)$ avec $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ les coordonnées polaires. Montrer que
$$|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 = |\partial_r v|^2 + \frac{1}{r^2}|\partial_\theta v|^2.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha(x,y) = \big[\ln(x^2+y^2)\big]^\alpha \mathbf{1}_D(x,y)$. Montrer que $u_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\alpha < 1/2$. (On pourra faire un calcul en polaires.)
3. En déduire que $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5 (L'injection de Sobolev ne voit pas les oscillations)
Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles.

1. Rappeler pourquoi, pour tout $p \geqslant 2$, il existe $C_p > 0$ (indépendante de u) telle que
$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C_p\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_p\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{5}$$
2. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On pose $v(x) = \mathrm{e}^{ix\xi}u(x)$. Calculer $\|v\|_{L^p}$, $\|v\|_{L^2}$ et $\|v'\|_{L^2}$ en fonction de $\|u\|_{L^p}$, $\|u\|_{L^2}$ et $\|u'\|_{L^2}$.
3. Que devient (5) pour v lorsque $\xi \longrightarrow +\infty$?

Exercice 6 (Injection de Sobolev) Dans cet exercice, on suppose que $d \geqslant 2$ et $1 \leqslant p < d$.

1. Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Vérifier que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, $|v| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_j} v|\mathrm{d}x_j$.
2. En déduire
$$|v|^{d/(d-1)} \leqslant \Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant d}\int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_j} v|\mathrm{d}x_j\Big)^{1/(d-1)}.$$
3. En intégrant par rapport à x_1, puis en utilisant (3), puis en intégrant par rapport à x_2, etc., en déduire
$$\|v\|_{L^{d/(d-1)}} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^1}. \tag{6}$$
4. Vérifier que (6) est encore vraie pour $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$.
5. Soit $1 \leqslant p < d$. Appliquer (6) à $v = |u|^\gamma$, avec $\gamma = (d-1)p/(d-p)$, pour en déduire
$$\|u\|_{L^{p^\star}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad 1 = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^\star}). \tag{7}$$
6. En utilisant (4), déduire de (7) l'inclusion $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $q \in [p, p^\star]$.

Exercice 7 (Gagliardo-Nirenberg)
Déduire de (4) et (7) l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg dans $\mathbb{R}^d$
$$\|u\|_{L^r} \leqslant C\|u\|_{L^q}^\theta\|\nabla u\|_{L^p}^{1-\theta},$$
où
$$p < d, \quad q < r < p^\star, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{(1-\theta)}{p^\star}, \quad 1 = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^\star}).$$