**Université de Nantes** Année 2012-2013

**Introduction aux équations d'évolution**
**Équation des ondes non linéaire**

---

# Feuille 6

---

*Divers*

**Exercice 1** Soit $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1}$$

On donne les définitions suivantes :

- On appelle solution classique sur $[0,T]$ de (1) une fonction $y \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ qui vérifie (1) ponctuellement.
- On appelle solution forte sur $[0,T]$ de (1) une fonction $y \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ qui vérifie l'équation intégrale
$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(y(s))\mathrm{d}s,$$
pout tout $t \in [0,T]$.
- On appelle solution faible sur $[0,T]$ de (1) une fonction $y \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^d)$ qui vérifie (1) au sens des distributions : pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0,T])$
$$\int_0^T y(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = y_0 \int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(t)\Big(\int_0^t F(y(s))\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t.$$

Montrer que ces trois notions de solutions sont équivalentes.

**Exercice 2** Soit $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g_\varepsilon(x) = (\pi\varepsilon)^{-d/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/\varepsilon}$. Pour $t \geqslant 0$, on définit $u_\varepsilon(t) = \mathrm{e}^{it\Delta}g_\varepsilon$.

1. Montrer que $g_\varepsilon \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.
2. Calculer $u_\varepsilon$ et en déduire que
$$u(t,x) = \mathrm{e}^{it\Delta}\delta_0(x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)} = \frac{\mathrm{e}^{-id\pi/4}}{(4\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}.$$
3. Vérifier que $u(t) \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, lorsque $t \longrightarrow 0$.

**Exercice 3** Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, on définit les opérateurs $\Gamma_j = x_j + 2it\partial_{x_j}$.

1. Montrer que $\Gamma_j$ commute avec $\Gamma_k$. Ainsi, pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on peut noter $\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots \Gamma_j^{\alpha_j}$.

2. Montrer que $\Gamma_j$ commute avec $i\partial_t + \Delta$.

3. Montrer que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
$$\Gamma^\alpha f = \mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}(2it\partial_x)^\alpha \mathrm{e}^{-i|x|^2/(4t)} f.$$

4. Montrer que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
$$\Gamma^\alpha f = \mathrm{e}^{it\Delta} x^\alpha \mathrm{e}^{-it\Delta} f.$$
(*Indication : On pourra utiliser la transformée de Fourier.*)

5. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $x^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\Gamma^\alpha \mathrm{e}^{it\Delta} u_0 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d)\big)$. En déduire que
$$\partial_x^\alpha\big(\mathrm{e}^{i|x|^2/(4t)}\mathrm{e}^{it\Delta}u_0\big) \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^*; L^2(\mathbb{R}^d)\big),$$
puis que $\partial_x^\alpha\big(\mathrm{e}^{it\Delta}u_0\big) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ pour $t \neq 0$.

6. Soit $u_0 \in H^s$ avec $s \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que $x^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour $|\alpha| \leqslant s$. Montrer que
$$\mathrm{e}^{it\Delta}u_0 \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}; H^s \cap L^2(|x|^s \mathrm{d}x)\big).$$

**Exercice 4** Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Le but de l'exercice est de montrer que
$$\lim_{t\longrightarrow\pm\infty} \big\|\mathrm{e}^{it\Delta}f - U(t)f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \tag{2}$$
où $U(t)f$ est défini par
$$U(t)f(x) = \frac{1}{(2it)^{d/2}}\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}\widehat{f}(\frac{x}{2t}).$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur unitaire.

2. Déduire de la question précédente qu'il suffit de montrer (2) pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On suppose donc désormais que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3. Montrer que
$$\mathrm{e}^{it\Delta}f(x) - U(t)f(x) = \frac{1}{(2it)^{d/2}}\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}\widehat{F}_t(\frac{x}{2t}) = U(t)F_t(x),$$
où $F_t(y) = \big(\mathrm{e}^{i|y|^2/(4t)} - 1\big)f(y)$.
*Indication : On utilisera la formule avec la convolution pour représenter* $\mathrm{e}^{it\Delta}$.

4. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$
$$\big|\mathrm{e}^{is} - 1\big| \leqslant C|s|,$$
et conclure.