Université de Nantes Année 2012-2013

Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaire

Feuille 5

Équations non-linéaires, Solitons

On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ et $\mathrm{sh}(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.

Exercice 1 Soit $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont également solution.

1. $u_1(t,x) = \mathrm{e}^{i\theta}u(t,x)$, où θ est fixé.
2. $u_2(t,x) = u(t-t_0, x-x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
3. $u_3(t,x) = u(t, Ax)$, où $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
4. $u_4(t,x) = u(t, x-2v_0t)\mathrm{e}^{i(v_0\cdot x - |v_0|^2 t)}$, où $v_0 \in \mathbb{R}^d$ est fixé. (Invariance Galiléenne)
5. $u_5(t,x) = \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda^2 t, \lambda x)$.

Exercice 2 On considère l'équation de Schrödinger cubique focalisante

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = -|u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que $u(t,x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{e}^{it}$ est solution de (1).
2. (a) Montrer que
$$u(t,x) = \mathrm{e}^{it}\big(1 - \frac{4(1+2it)}{1+2x^2+4t^2}\big)$$
est solution de (1).
   (b) Calculer $|u|^2$ est montrer que $x \longmapsto |u|^2(t,x)$ admet au moins trois maximas sur $\mathbb{R}$ si $|t|$ est assez petit.
3. (a) Montrer que
$$u(t,x) = 2\mathrm{e}^{it/2}\,\mathrm{ch}^3\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)\frac{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 3(\mathrm{e}^{i4t}-1)}{4\,\mathrm{ch}^4(\frac{x}{\sqrt{2}}) - 3\sin^2(2t)}$$
est solution de (1). *(À faire à l'ordinateur...)*
   (b) Calculer $|u|^2$ est montrer que $x \longmapsto |u|^2(\frac{\pi}{4}, x)$ admet au moins trois maximas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère l'équation de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Soit u une solution de (2) de la forme $u(t,x) = \varphi(x - ct)$ avec $c \in \mathbb{R}$ (On dit que u est une onde solitaire). Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que φ soit solution de l'équation différentielle
$$-c\varphi(x) + \varphi''(x) + 3\varphi^2(x) = A, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{c}{2\operatorname{ch}^2(\frac{\sqrt{c}}{2}x + \alpha)}$ est solution de (3).

Exercice 4 On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) + \partial_x^3(u^2) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{4}$$

Soit $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction u sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4c}{3}\cos^2\big(\dfrac{x-ct}{4}\big) & \text{si} \quad |x - ct| \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{si} \quad |x - ct| \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto u(t,x)$ est à support compact.

2. Montrer que u est solution de (4). Une telle solution est appelée compacton.

Exercice 5 Soient $d \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ un entier impair. On se propose de montrer que si $s > d/2$, l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{5}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}\big([0,T];H^s(\mathbb{R}^d)\big)$ si $T = T(\|u_0\|_{H^s}, d, s) > 0$ est assez petit. On se fixe $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et pour $T > 0$ on définit l'espace complet

$$E(T) = \big\{v \in \mathcal{C}\big([0,T];H^s(\mathbb{R}^d)\big) \quad t.q. \ \|v\|_T \leqslant 2\|u_0\|_{H^s}\big\}, \quad \text{avec} \quad \|v\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

On pose

$$\Phi(u)(t) = \mathrm{e}^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\mathrm{d}s.$$

On rappelle que si $s > d/2$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, f,g \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|f\,g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{6}$$

1. Montrer, formellement, que si u est un point fixe de Φ, alors u est solution de (5).

2. Montrer qu'il existe des polynômes homogènes P_p et Q_p de degrés $p-1$ tels que
$$|z_1|^{p-1}z_1 - |z_2|^{p-1}z_2 = (z_1 - z_2)P_p(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2}) + (\overline{z_1} - \overline{z_2})Q_p(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2}). \tag{7}$$

3. (a) Rappeler pourquoi pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\|\mathrm{e}^{i\tau\Delta}f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

(b) Montrer, à l'aide de (6) et (7) qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|\Phi(u)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + C \int_0^t \|u(s)\|^p_{H^s(\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}s.$$

(c) En déduire que $\Phi : E(T) \longrightarrow E(T)$ pour $T > 0$ assez petit.

4. De manière analogue, montrer que si $T > 0$ est assez petit,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X_T} \leqslant \frac{1}{2} \|u - v\|_{X_T}.$$

5. Conclure.