Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaire

Feuille 4

Équation des Ondes linéaires

Notations : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$. Si A, B sont deux opérateurs on définit le commutateur $[A, B] = AB - BA$.
Convention : $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int_{x \in \mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$. Alors $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int_{\xi \in \mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$

Exercice 1 On suppose que $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution des ondes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t u(0, x) = g(x). \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que
$$\widehat{u}(t, \xi) = \cos(|\xi|t)\widehat{f}(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\widehat{g}(\xi).$$
Notation : On écrit
$$u(t, \cdot) = \cos(\sqrt{-\Delta}t)f + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{-\Delta}}g.$$

2. On définit $x \longmapsto W(t, x)$ par $\widehat{W(t)}(\xi) = \dfrac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$. Montrer que la solution de (1) peut s'écrire
$$u(t, x) = W(t) \star f(x) + W'(t) \star g(x).$$

Exercice 2 **(Formule de Duhamel)**
Soit $F \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$.

1. On suppose que $u \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution de l'équation de Schrödinger inhomogène
$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$
Montrer que
$$u(t, \cdot) = \mathrm{e}^{it\Delta} f - i \int_0^t \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta} F(s, \cdot)\mathrm{d}s.$$

2. On suppose que $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big)$ est solution de l'équation des ondes inhomogènes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = f(x), \\ \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

   Montrer que

$$u(t,\cdot) = \cos(\sqrt{-\Delta} t) f + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta} t)}{\sqrt{-\Delta}} g - \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}(t-s))}{\sqrt{-\Delta}} F(s,\cdot) \mathrm{d}s.$$

Exercice 3 Soit $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ solution de l'équation des ondes linéaires

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont également solution :

1. $u_1(t,x) = u(t - t_0, x - x_0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés.
2. $u_2(t,x) = u(\lambda t, \lambda x)$, où $\lambda > 0$ est fixé.

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\Delta u(A\cdot) = (\Delta u)(A\cdot)$
2. Montrer que si u est solution de Schrödinger linéaire, alors $(t,x) \longmapsto u(t,Ax)$ aussi.
3. Soit u une solution de Schrödinger linéaire, et on suppose que $u(0,\cdot)$ est radiale. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t,\cdot)$ est radiale.

Exercice 5 (Vitesse finie de propagation)
Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > R.$$

Montrer que pour $t > 0$ la solution de (1) vérifie

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > t + R.$$

Exercice 6 (Estimations L^2)
Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|W'(t) \star f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|W(t) \star g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |t|)\|g\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2}$$

   On pourra utiliser la formule de Parseval et découper selon $|\xi| \leqslant 1$ et $|\xi| \geqslant 1$.

3. En utilisant la suite $(g_N)_{N \geqslant 1}$ définie par $\widehat{g}_N(\xi) = N^{d/2} \mathbf{1}_{\{|\xi| \leqslant 1/N\}}$, montrer que (2) est optimale.

Exercice 7 (Champs de vecteurs invariants)
Dans $\mathbb{R}^d$ on considère les champs
$$\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d},$$
$$\Omega_{ij} = x_j\partial_{x_i} - x_j\partial_{x_i}, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d,$$
$$\Omega_{0j} = t\partial_{x_i} + x_j\partial_t, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant d,$$
$$L_0 = t\partial_t + \sum_{j=1}^{d} x_j\partial_{x_j},$$
que l'on note $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$.

1. Montrer que
$$[\Box, \partial_t] = 0, \quad [\Box, \partial_{x_j}] = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant d.$$
2. Montrer que
$$[\Box, \Omega_{ij}] = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant d.$$
3. Montrer que
$$[\Box, L_0] = 2\Box.$$
4. Montrer que pour $0 \leqslant j \leqslant m$, si $\Box u = 0$ alors $\Box(\Gamma_j u) = 0$.
5. On note $x_0 = t$. Montrer que pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$ et $0 \leqslant j \leqslant d$, il existe des réels (a_{ijk}) tels que
$$[\Gamma_i, \partial_{x_j}] = \sum_{k=0}^{d} a_{ijk}\partial_{x_k}.$$

Exercice 8 (Transformation de Lorentz)
Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, on note $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$. Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Pour $u \in E$ et $\beta \in]-1, 1[$, on définit la fonction $L_\beta u$ par
$$L_\beta u(t, x) = u\left(\frac{t - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right).$$

1. Montrer que $[L_\beta, \Box] = 0$. En déduire que si u est solution de $\Box u = 0$, alors $L_\beta u$ aussi.
2. Montrer que les L_β, $|\beta| < 1$ forment un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$. On montrera en particulier que $L_\beta \circ L_\gamma = L_{\beta\star\gamma}$ où $\beta \star \gamma$ est à déterminer.
3. On définit $\Gamma(t) = L_{\mathrm{th}(t)}$. Montrer que $(\Gamma(t)_{t\in\mathbb{R}}, \circ)$ est un groupe.