Université de Nantes Année 2012-2013

Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaires

Feuille 3

Transport et Conservation

Exercice 1 Lemme typique, à démontrer par densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $a \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On suppose de plus que a ou b est à support compact.

1. Justifier que pour $h \in \mathbb{R}^d$ assez petit,

$$I(h) = \int_\Omega |a(x+h) - a(x)||b(x)| \, \mathrm{d}x$$

est bien définie.

2. Montrer que $I(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Exercice 2 Cauchy-Lipshitz précisé et méthode des caractéristiques

Soit $a \in C^\infty_c((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteur. On note $X : (0,T) \times (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ son flot défini par l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_s X(s,t,x) = a(s, X(s,t,x)), \quad X(t,t,x) = x.$$

Soit $L \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T])$, c'est-à-dire intégrable sur tout (t,T) avec $0 < t \leqslant T$ (mais pas forcément intégrable sur $(0,T)$). On prend comme hypothèse la condition de Lipschitz d'un seul côté :

$$\langle x - y | a(t,x) - a(t,y) \rangle \leqslant L(t)|x-y|^2.$$

On notera aussi $\|a\|_\infty = \sup_{t,x} |a(t,x)|$.

1. Montrer que flot vérifie, quand $0 < t \leqslant s \leqslant T$, l'estimation de Lipschitz :

$$|X(s,t,x) - X(s,t,y)| \leqslant |x-y| \exp\left(\int_t^s L(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma\right)$$

2. Soit b et φ dans $C^\infty_c((0,T) \times \mathbb{R}^d)$, et $\psi_T \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Démontrer que la solution ψ du problème de transport (rétrograde) :

$$\partial_t \psi + a \cdot \nabla \psi = b\psi + \varphi, \quad \psi_{|t=T} = \psi_T$$

est, pour $0 < t \leqslant T$, donnée par

$$\psi(t,x) = \psi_T(X(T,t,x)) \exp\left(\int_T^t b(\sigma, X(\sigma,t,x)) \, \mathrm{d}\sigma\right) + \int_T^t \varphi(s, X(s,t,x)) \exp\left(\int_s^t b(\sigma, X(\sigma,t,x)) \, \mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}s$$

3. Dorénavant $\psi_T = 0$. En déduire que le support de ψ est inclus dans un compact de $[0,T) \times \mathbb{R}^d$ qui ne dépend que de $\|a\|_\infty$ et d'un compact contenant le support de φ.
4. Majorer $\|\psi\|_\infty$ par une expression ne dépendant que de T, $\|b\|_\infty$ et $\|\varphi\|_\infty$
5. Soit $\delta \in (0,T)$. Majorer $\sup_{\delta<t,x}|\nabla\psi(t,x)|$ par une expression ne dépendant que T, $\|b\|_\infty$, $\|\nabla b\|_\infty$, $\|\varphi\|_\infty$, $\|\nabla\varphi\|_\infty$ et de la fonction $E : t \mapsto E(t) = \exp(\int_t^T L(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma)$ sur l'interval $[\delta, T]$.
6. Soit $\delta \in (0,T)$. On suppose que $b(t,x)$ et $\varphi(t,x)$ s'annulent pour $t < \delta$. Montrer que $\psi(t,x) = \psi(\delta, X(\delta,t,x))$ pour $0 < t \leqslant \delta$. En déduire que si $d = 1$ alors $\int_{\mathbb{R}}|\nabla\psi(t,x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}|\nabla\psi(\delta,x)|\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 Unicité par dualité

Soit $a \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ un champ de vecteur borné et vérifiant la condition de Lipschitz d'un seul côté :

$$\langle x-y|a(t,x)-a(t,y)\rangle \leqslant L(t)|x-y|^2$$

où L est localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur tout (t,T) avec $0 < t \leqslant T$ (mais pas forcément intégrable sur $(0,T)$).

Soit $b \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, et $u \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ une solution (faible, au sens des distributions) de l'équation de conservation :

$$\partial_t u + \nabla\cdot(au) + bu = 0, \quad u_{|t=0} = 0. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de démontrer que $u = 0$:

$$\forall\varphi \in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d), \quad \forall\varepsilon > 0, \qquad |\iint u(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x| \leqslant \varepsilon.$$

L'exercice précédent fournira ψ_ε solution du problème de transport rétrograde approché :

$$\partial_t\psi_\varepsilon + a_\varepsilon\cdot\nabla\psi_\varepsilon = b_\varepsilon\psi_\varepsilon + \varphi, \quad \psi_{\varepsilon|t=T} = 0$$

1. Rappeler le sens de l'affirmation : *u est solution faible du problème* (1). Attention à bien prendre en compte la donnée initiale nulle.
2. Quelles estimations sur a_ε, b_ε et ψ_ε permettent de majorer $|\iint u(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x|$ par ε.
3. Indiquer comment construire b_ε puis a_ε.
4. Justifier les estimations requises sur ψ_ε en supposant de plus l'une ou l'autre des deux hypothèses :
   (a) $L(t) \leqslant C/t$ avec $C < 1$.
   (b) $d = 1$.