

Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaire

Feuille 3

Inégalités fonctionnelles, espaces de Sobolev

Exercice 1 (Hölder)

1. Vérifier l'inégalité de convexité

$$a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b, \quad a, b \geq 0, 0 \leq \theta \leq 1. \quad (1)$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (2)$$

3. En déduire

$$\left\| \prod_{1 \leq j \leq k} u_j \right\|_{L^r} \leq \prod_{1 \leq j \leq k} \|u_j\|_{L^{p_j}}, \quad \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Exercice 2 (Interpolation)

1. **Lebesgue** : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $p \in [p_1, p_2]$ de sorte que

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

En utilisant (2), montrer que

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}. \quad (4)$$

Application de (4) : Soit $f \in \cap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout p ,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}.$$

2. **Sobolev** : Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $s \in [s_1, s_2]$, de sorte que

$$s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Montrer que

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^\theta \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Exercice 3 Trouver exactement les $s \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a $f \in H^s(\mathbb{R})$ pour les distributions f suivantes :

$$f_1(x) = e^{-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f_3(x) = e^{-|x|}, \quad f_4(x) = \mathbf{1}_{]-1,1[}(x), \quad f_5(x) = \delta_0(x).$$

Exercice 4 1. Pour $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit v par $u(x, y) = v(r, \theta)$ avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ les coordonnées polaires. Montrer que

$$|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 = |\partial_r v|^2 + \frac{1}{r^2} |\partial_\theta v|^2.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\chi(x, y) = 1$ si $x^2 + y^2 \leq 1/4$ et $\chi(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 \geq 3/4$. On pose $u_\alpha(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]^\alpha \chi(x, y)$. Montrer que $u_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\alpha < 1/2$. (On pourra faire un calcul en polaires.)

3. En déduire que $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5 (L'injection de Sobolev ne voit pas les oscillations)

Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles.

1. Rappeler pourquoi, pour tout $p \geq 2$, il existe $C_p > 0$ (indépendante de u) telle que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}. \quad (5)$$

2. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On pose $v(x) = e^{ix\xi} u(x)$. Calculer $\|v\|_{L^p}$, $\|v\|_{L^2}$ et $\|v'\|_{L^2}$ en fonction de $\|u\|_{L^p}$, $\|u\|_{L^2}$ et $\|u'\|_{L^2}$.

3. Que devient (5) pour v lorsque $\xi \longrightarrow +\infty$?

Exercice 6 (Injection de Sobolev) Dans cet exercice, on suppose que $d \geq 2$ et $1 \leq p < d$.

1. Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Vérifier que pour tout $1 \leq j \leq d$, $|v| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_j} v| dx_j$.

2. En déduire

$$|v|^{d/(d-1)} \leq \left(\prod_{1 \leq j \leq d} \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_j} v| dx_j \right)^{1/(d-1)}.$$

3. En intégrant par rapport à x_1 , puis en utilisant (3), puis en intégrant par rapport à x_2 , etc., en déduire

$$\|v\|_{L^{d/(d-1)}} \leq C \|\nabla v\|_{L^1}. \quad (6)$$

4. Vérifier que (6) est encore vraie pour $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$.

5. Soit $1 \leq p < d$. Appliquer (6) à $v = |u|^\gamma$, avec $\gamma = (d-1)p/(d-p)$, pour en déduire

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad 1 = d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right). \quad (7)$$

6. En utilisant (4), déduire de (7) l'inclusion $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $q \in [p, p^*]$.

Exercice 7 (Gagliardo-Nirenberg)

Déduire de (4) et (7) l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg dans \mathbb{R}^d

$$\|u\|_{L^r} \leq C \|u\|_{L^q}^\theta \|\nabla u\|_{L^p}^{1-\theta},$$

où

$$p < d, \quad q < r < p^*, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{(1-\theta)}{p^*}, \quad 1 = d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right).$$

Exercice 8 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), & X(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $t \rightarrow A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est continue.

1. (a) Rappeler la solution de ce système lorsque A ne dépend pas de t .

(b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution s'écrit $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0$.

2. On suppose que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Montrer que la solution s'écrit $X(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)X_0$.

3. (a) On suppose que $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la solution du système est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} X_0.$$

(b) Montrer que : $\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) = e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Commentaire ?