Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaire

Feuille 2

Distributions

Exercice 1 Équivalences de $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes sur T forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$:

1. Si $\lim_n \varphi_n = \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ alors $\lim_n \langle T|\varphi_n\rangle = \langle T|\varphi\rangle$.
2. Pour tout $K \subset_c \Omega$ il existe C_K et j_K tel que $|\langle T|\varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_{x,|\alpha|\leqslant j_K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$.

Pour le sens délicat, on pourra procéder par contradiction.

Exercice 2 Distributions à support compact

1. Rappeler la définition du support $\operatorname{spp}\varphi$ d'une fonction définie sur un ouvert Ω. Étendre la définition à une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
2. Montrer que $\mathscr{E}'(\Omega) = \{T \in \mathscr{D}'(\Omega), \operatorname{spp} T \subset_c \Omega\}$. *Indication :* on pensera à démontrer et utiliser, $K \subset_c \Omega$ étant donné, l'existence de fonctions $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ valant 1 sur un voisinage de K.
3. Montrer que la suite de distributions définie par $\langle T_j|\varphi\rangle = \sum_{m=1}^{j} \varphi(m^{-1}) - j\varphi(0) - \ln(j)\varphi'(0)$ converge dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, vers une limite notée T. Quels sont les supports des T_j, et de T ?
4. Montrer qu'il existe une suite de fonctions test vérifiant
   (a) $0 \leqslant \varphi_j \leqslant j^{-1/2}$
   (b) $\operatorname{spp}\varphi_j \subset [(j+1)^{-1}, 2]$
   (c) $\varphi_j = j^{-1/2}$ sur $[j^{-1}, 1]$

   Montrer que par conséquent
   (a) cette suite converge uniformément vers 0
   (b) les dérivées d'ordre supérieur de ces fonctions s'annulent sur $\operatorname{spp} T$.
   (c) $\lim_j \langle T|\varphi_j\rangle = +\infty$
5. En tirer une remarque sur la caractérisation de $T \in \mathscr{E}'$.

Exercice 3 Distributions dépendant du temps. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que $C^0(I; \mathscr{D}'(\Omega))$ s'injecte continûment dans $\mathscr{D}'(I \times \Omega)$. (On commencera par l'injection continue de $\mathscr{D}(I \times \Omega)$ dans $C^0_c(I; \mathscr{D}(\Omega))$.)

2. Montrer que si $u \in C^1(I;\mathscr{D}'(\Omega))$ alors $\partial_t u = v$ dans $C^0(I;\mathscr{D}'(\Omega))$ si et seulement si $\partial_t u = v$ dans $\mathscr{D}'(I \times \Omega)$.

3. Soit $E \in \mathscr{E}(I;\mathscr{E}'(\Omega))$ et $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On définit $u(t)$ pour tout $t \in I$ par $u(t) = E(t) * f$. Montrer que $u \in \mathscr{E}(I;\mathscr{D}'(\Omega))$ et que $f \mapsto u$ est séquentiellement continue à valeur dans $\mathscr{D}'(I \times \Omega)$.