Introduction aux équations d'évolution
Équation des ondes non linéaires

Feuille 1

Exemples d'EDP

Exercice 1 (Minimisation de fonctionelle) Reprendre l'exemple de surface d'aire minimale vu en cours en modifiant la fonctionelle à minimiser : au lieu de l'aire du graphe de u, prendre la norme L^p du gradient de u (sur l'ouvert Ω). Comme en cours, donner pour ce problème la forme variationnelle puis la forme EDP. L'opérateur obtenu s'appelle le p-Laplacien. Pourquoi ?

Exercice 2 (Chaleur) Soit $E(t,x)$ égale à 0 si $t<0$ et à $\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-x^2/4t}$ si $t>0$.

1. Montrer E est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^{1+d}\setminus\{0\}$ en une fonction C^∞ qui vérifie $\partial_t E-\Delta E=0$ sur cet ouvert.
2. Montrer que $E(t)=x\mapsto E(t,x)$ est, pour tout $t>0$, la densité d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, qui tend étroitement quand $t\to 0$ vers la mesure de Dirac δ_0 (sur $\mathbb{R}^d$).
3. Soit u_0 une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $u(t)=E(t)\star u_0$ défini pour $t>0$ une fonction C^∞ bornée, qui de plus vérifie $\partial_t u-\Delta u=0$ et $u(t)\to u_0$ quand $t\to 0$.
4. Montrer que $\inf u_0\leqslant u\leqslant \sup u_0$.
5. Montrer que si $u_0\in L^1$ alors $t\mapsto\int u(t)$ est constante.

Exercice 3 (Schrödinger) Soit $u:\mathbb{R}^{1+d}\to\mathbb{C}$ solution de l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t u+\Delta u=0.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont également solution, et que, comme u, leur norme dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ à chaque instant t est égale à celle de u_0 :

1. $u_1(t,x)=e^{i\theta}u(t,x)$, où θ est fixé.
2. $u_2(t,x)=u(t-t_0,x-x_0)$, où $x_0\in\mathbb{R}^d$ et $t_0\in\mathbb{R}$ sont fixés.
3. $u_3(t,x)=u(t,Ax)$, où $A\in\mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
4. $u_4(t,x)=u(t,x-2v_0t)e^{i(v_0\cdot x-|v_0|^2t)}$, où $v_0\in\mathbb{R}^d$ est fixé. (Invariance Galiléenne)
5. $u_5(t,x)=\lambda^{d/2}u(\lambda^2t,\lambda x)$.

Exercice 4 Soit $E(t,x)$ égale à $\frac{1}{(4i\pi t)^{d/2}}e^{i|x|^2/4t}$ si $t\neq 0$.

1. Montrer E est une fonction C^∞ qui vérifie $i\partial_t E+\Delta E=0$. Que vaut $|E(t,x)|^2$?
2. Soit $\nu>0$, $C\in\mathbb{C}$ et $x_0\in\mathbb{R}^d$. On définit la fonction $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ par $g(x)=Ce^{-|x-x_0|^2/\nu}$. Pour $t\neq 0$, on définit $u(t)=g\star E(t)$. Calculer u.
3. Montrer que u est solution de l'équation de Schrödinger, pour la donnée initiale g.

Exercice 5 (Transport) Soit X le flot associé à un champs de vecteurs $b:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, disons borné et C^1 en la deuxième variable à différentielle bornée.

1. Montrer que que le déterminant Jacobien $m(t,x) = \det \partial_x X(t,x)$ vérifie $\partial_t \ln m(t,x) = \nabla \cdot b(t, X(t,x))$.
2. Soit $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u(t,x) = u_0(X(t)^{-1}(x))$ est une fonction $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ solution de $\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$, avec la condition initiale $u(0) = u_0$.
3. Montrer que pour tout fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$, la fonction $v = g \circ u$ est aussi solution de l'équation de transport homogène.
4. Montrer que si le champs b est à divergence nulle, toutes les normes L^p de $u(t)$ sont préservées (c'est-à-dire indépendantes de t).

Exercice 6 Le système d'Euler incompressible dans $\mathbb{R}^d$ s'écrit

$$\begin{gathered} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{gathered}$$

où les fonctions inconnues sont le champs de vecteurs vitesse $u : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}^d$ et le champs scalaire de pression $p : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ du champs de vitesse ne dépend pas du temps (pour une solution assez régulière et assez décroissante à l'infini ...)
2. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $x^\perp = (-x_2, x_1)$ le vecteur tourné de $\pi/2$.
   Soit $u(t,x)$ égale à $\alpha x^\perp$ si $|x| \leqslant R$ et $\alpha R^2 |x|^{-2} x^\perp$ si $|x| > R$.
   Vérifier qu'il existe bien p tel que (u,p) soit une solution (stationnaire) du système d'Euler en dimension $d = 2$.
3. En dimension 2, quelle est l'équation vérifiée par le tourbillon $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \nabla_\wedge u$ (encore appelé le rotationnel de u) ? En déduire une formulation (u, ω) du problème (à la place de (u,p)).