
Feuille 7 : Introduction aux chaînes de Markov

Exercice 1 On considère une chaîne de Markov à deux états (A et B), dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions.
- 2) La chaîne est-elle irréductible ? Fortement irréductible ?
- 3) Calculer $P(X_3 = B | X_0 = A)$.
- 4) Calculer $P(X_3 = B, X_2 = A, X_1 = B | X_0 = A)$.
- 5) Calculer la probabilité invariante.
- 6) Calculer la limite de $P(X_n = A)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 7) Avec Scilab, calculer les valeurs de $P(X_n = A)$ pour différentes valeurs de $n \geq 1$.

Exercice 2 Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

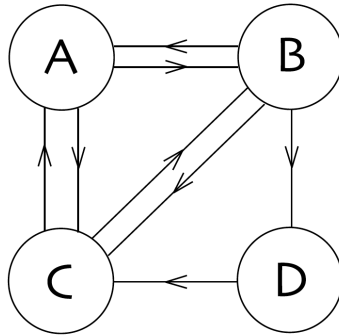
- 1) Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition P .
- 2) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?

Exercice 3 On considère une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Donner une représentation graphique de l'espace d'états et des transitions.
- 2) Vérifier que la chaîne est irréductible.
- 3) Calculer la probabilité invariante.
- 4) Calculer M^2 , M^3 puis M^4 . En déduire M^n pour tout $n \geq 1$. La chaîne possède-t-elle une probabilité limite ?

Exercice 4 Sur Internet, on considère le réseau de pages suivant



- 1) Écrire la matrice de la chaîne de Markov associée.
- 2) Si on est parti de B , quelle est la probabilité de se retrouver en A après deux clics ?
- 3) Si on est parti de B , quelle est la probabilité de se retrouver en D après trois clics ?
- 4) Calculer la distribution stationnaire et le rang de chaque page. Quelle est la page la plus importante ?