Feuille 6 : Graphes et arbres

Exercice 1 Pour chacun des graphes orientés $G = (X, \Gamma)$ définis ci-dessous faire une représentation et établir leur matrice puis dire s'ils sont sans boucle, réflexifs, symétriques, antisymétriques, transitifs.

1) $X = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \Gamma = \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 1), (5, 2), (5, 4)\}$

2) $X = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \Gamma = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 3)\}$

3) $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad \Gamma = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 6)\}$

4) $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad \Gamma = \{(1, 5), (1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 6), (5, 2), (6, 3)\}$

5) $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \quad \Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 7), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (7, 5), (7, 6)\}$

Exercice 2 Une rangée de p allumettes est disposée sur une table. Deux joueurs choisissent chacun à leur tour de retirer 1 ou 2 allumettes. Le perdant est le joueur qui retire la ou les dernières allumettes.

Représenter les mouvements du jeu dans les cas $p = 6$, $p = 7$ et $p = 8$ à l'aide d'un graphe (un sommet représentera le nombre d'allumettes restantes).

Exercice 3 Deux joueurs A et B s'affrontent à pile ou face avec une pièce non truquée et des lancers successifs et indépendants.

1) Le joueur A gagne si la suite pile-pile (notée PP) apparaît en premier et le joueur B si la suite pile-face (notée PF) apparaît en premier. Quelles sont les chances de chacun ?

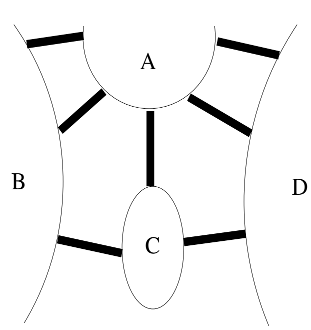
2) Même question avec PP contre FP.

3) Même question avec PPP contre FPP.

Exercice 4 Un tas de n allumettes et un tas de $n + 1$ allumettes sont disposés sur une table. Deux joueurs, A et B choisissent chacun à leur tour soit une allumette dans un des tas, soit une allumette dans chaque tas. Celui qui joue en dernier a gagné. On peut représenter les mouvements du jeu à l'aide d'un graphe orienté dont les sommets représenteront les états des deux tas sous la forme d'une paire $[p; q]$ avec $p \geq q$ où on a p allumettes dans un tas et q dans l'autre.

Faire cette représentation dans le cas $n = 2$.

Exercice 5 On considère la disposition des ponts de la ville de Kœnigsberg (ville qu'Euler visita lors d'un voyage pour aller en Russie) suivante, où A et C sont deux îles et B et D sont les berges :



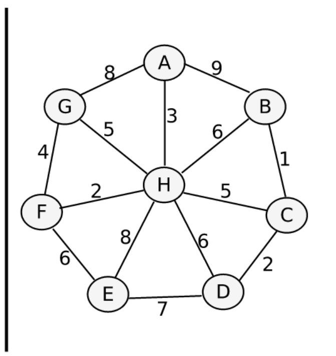
Un piéton peut-il en se promenant traverser chacun des sept ponts de la ville une et une seule fois, et revenir au point de départ ?

Exercice 6 Monsieur Tartampion s'occupe de 7 stagiaires à qui il doit proposer un travail. Il souhaite les répartir en groupes mais il doit tenir compte des contraintes suivantes : Anatole ne peut travailler ni avec Céleste ni avec Gaston, Bruno ne peut travailler ni avec Désiré ni avec Fernand. Céleste ne peut travailler ni avec Eulalie, ni avec Désiré, ni avec Gaston. Désiré ne peut travailler ni avec Fernand ni avec Gaston. Ni Eulalie, ni Fernand ne peuvent travailler avec Gaston.

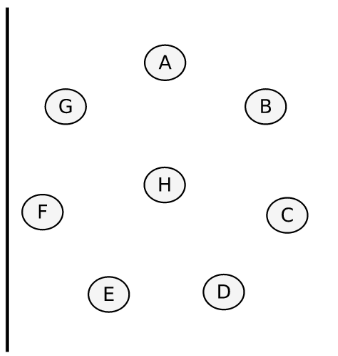
1) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe non orienté G (les sommets étant les stagiaires).

2) Proposer une répartition des stagiaires, en minimisant le nombre de groupes.

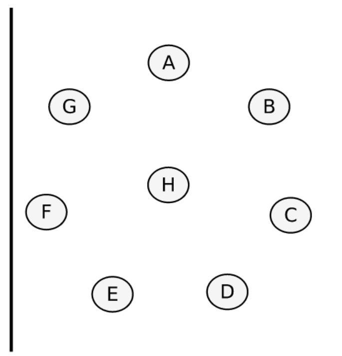
Exercice 7 Appliquez l'algorithme de Kruskal en dessinant le graphe des diverses étapes pour le graphe suivant. Le graphe de l'itération 1 ne doit contenir qu'une seule arête, puis deux sur l'itération 2, trois sur l'itération 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin de l'algorithme. Quel est le poids de l'arbre de recouvrement minimal ? *Réponse : 23*



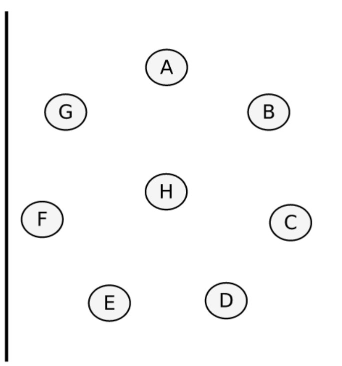
(a) Graphe (unité : k euros)



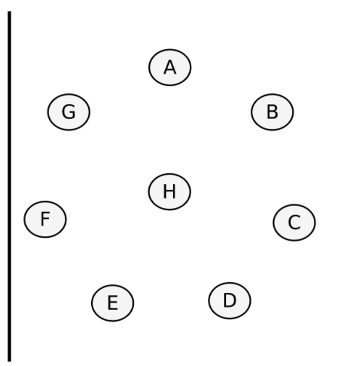
(b) Itération 1



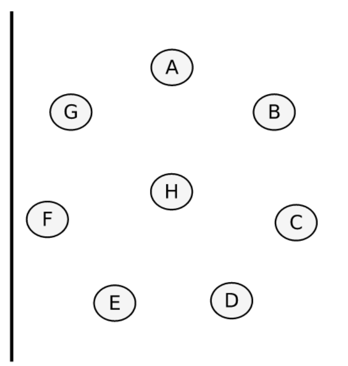
(c) Itération 2



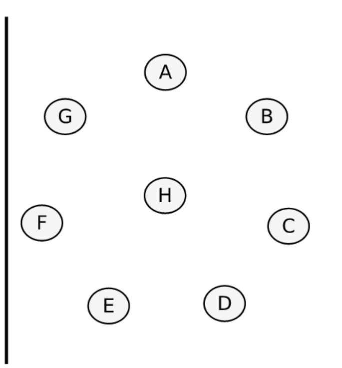
(d) Itération 3



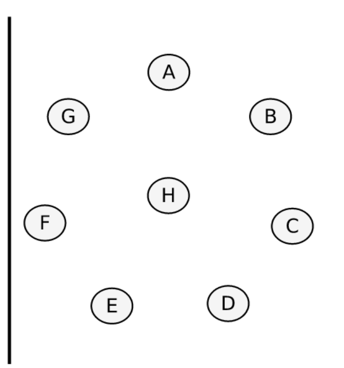
(e) Itération 4



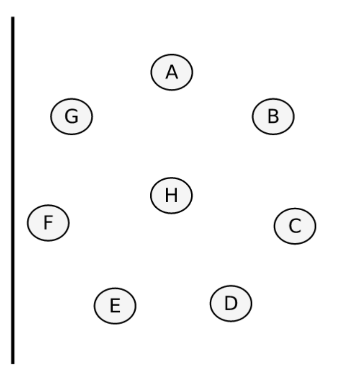
(f) Itération 5



(g) Itération 6

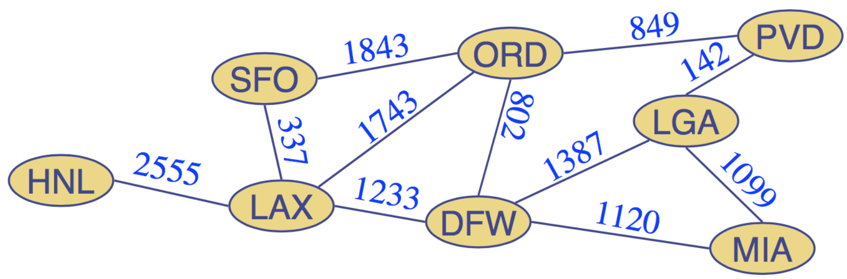


(h) Itération 7

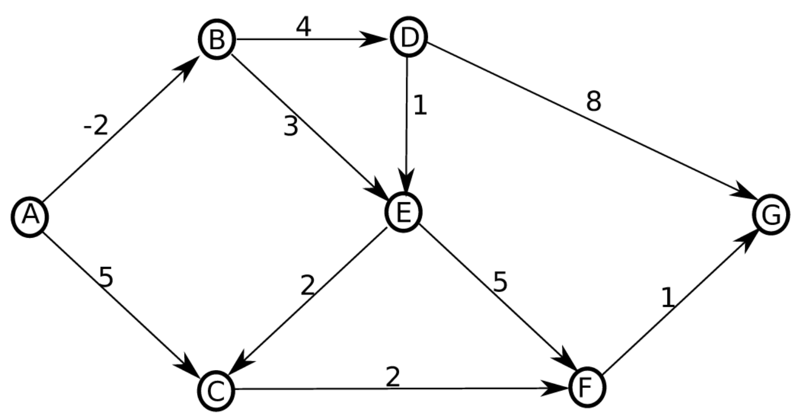


(i) Itération 8

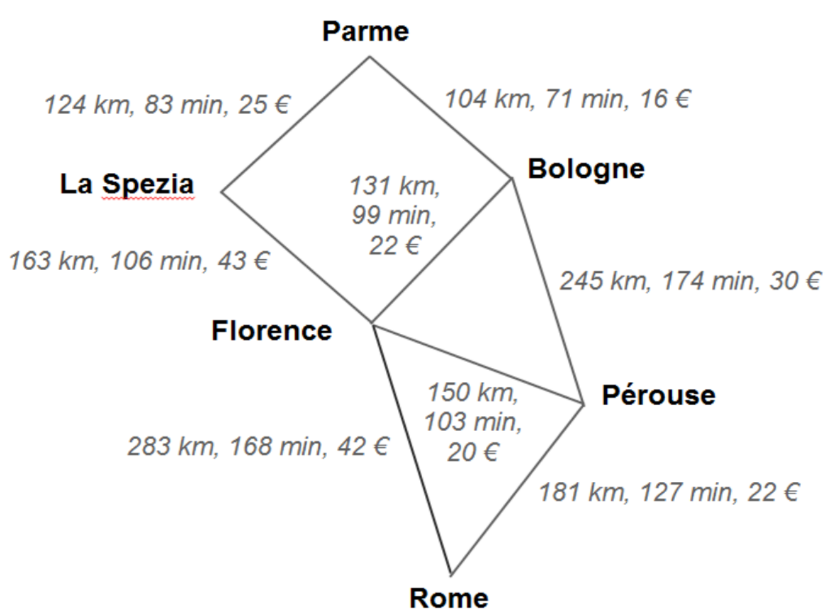
Exercice 8 On considère un réseau d'aéroports reliés par une compagnie aérienne et la distance (en miles) entre eux. Optimiser ce réseau.



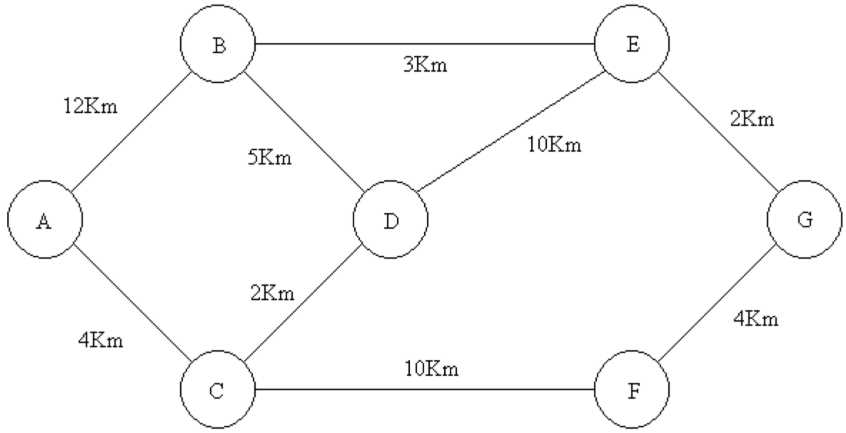
Exercice 9 En appliquant l'algorithme de Bellman-Ford-Moore, trouver le plus court chemin allant de A à G. *Réponse : 6*



Exercice 10 Trouver le chemin le moins coûteux de Parme à Rome. Trouver le chemin le plus court en temps de Parme à Rome.



Exercice 11 Trouver le chemin le plus court entre A et G.



Remarque : En fait on pourrait résoudre cet exercice avec une méthode du simplexe (avec solutions entières). Voir sur le site :

`http://www.phpsimplex.com/fr/probleme_plus_court_chemin.htm`

Exercice 12 Une entreprise possède deux usines et deux magasins pour vendre ses produits :

- Son usine d'Amiens produit chaque mois 100 containers de marchandise. Ils sont transportés par camion par l'autoroute A16 jusqu'au magasin de Paris où toute la marchandise est vendue.
- Son usine de Rouen produit chaque mois 120 containers de marchandise. Ils sont transportés par péniche par la Seine jusqu'au magasin du Havre où toute la marchandise est vendue.

Tout allait pour le mieux jusqu'au jour où des travaux ont débuté sur l'autoroute A16 provoquant des bouchons réguliers. L'entreprise s'aperçoit qu'elle n'arrivera plus à faire passer que 50 containers par mois entre Amiens et Paris. Son service de logistique a fait une étude et a calculé qu'elle pouvait faire circuler jusqu'à 80 containers entre Amiens et le Havre par l'autoroute A29. De plus en utilisant la Seine elle sait transporter autant de containers qu'elle veut depuis Rouen vers Paris ou le Havre.

Modéliser le réseau de transport à l'aide d'un graphe. Puis avec l'algorithme de Ford-Fulkerson, optimiser le transport pour maximiser les ventes. *Réponse : On peut vendre 220 containers par mois.*