Feuille 5 : Systèmes linéaires, algorithme du simplexe

Exercice 1 Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & & & x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & -3x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array}\right.$

Vérifier le résultat avec Scilab.

Exercice 3 Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$.

Exercice 4 Calculer AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Le chiffrement de Hill a été publié en 1929. C'est un chiffre polygraphique, c'est-à-dire qu'on ne chiffre pas les lettres les unes après le autres, mais par paquets. On présente ici un exemple bigraphique, i.e. les lettres sont regroupées deux à deux.

- **Étape 1 :** On regroupe les lettres par 2. Chaque lettre est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

  On obtient des couples d'entiers $(x_1; x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre et x_2 correspond à la deuxième lettre.
- **Étape 2 :** On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det A \wedge 26 = 1$. Chaque couple $(x_1; x_2)$ est transformé en $(y_1; y_2)$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mod 26$.
- **Étape 3 :** Chaque couple $(y_1; y_2)$ est transformé en un couple de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1. On regroupe ensuite les lettres.

Dans la suite on suppose que $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que la condition sur le déterminant est vérifiée.

2) Coder le mot ST puis le mot SE.

3) Soit $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA = I_2 \mod 26$.

4) Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 16y_1 + y_2 \mod 26 \\ x_2 & = & 11y_1 + 5y_2 \mod 26. \end{array} \right.$$

5) Vérifier le résultat en décodant les messages chiffrés de la première question.

6) Écrire un programme permettant de chiffrer un couple de lettres selon cette procédure .
Indication : Pour calculer x modulo 26, on pourra écrire $x - E(x/26)26$ est la fonction partie entière.

7) Proposer une généralisation de cette procédure de chiffrement.

Exercice 6 Un grossiste en fruits et légumes souhaite acheter des tomates et des carottes. On dispose des informations suivantes :

- Le chargement total ne peut pas dépasser 1 tonne.
- Le grossiste fait un bénéfice de 1 euro par kg de tomates et de 0.5 euro par kg de carotte.

Quel choix conseillez-vous au grossiste ? On utilisera trois méthodes :

1) Réponse intuitive.

2) Résolution graphique.

3) Algorithme du simplexe.

Exercice 7 Maximiser la fonction $F(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1) Résoudre le problème avec la méthode graphique.

2) Résoudre le problème avec l'algorithme du simplexe.

3) Vérifier le résultat à l'aide du logiciel PHPSimplex.

Réponse : On trouve $\max F = 127/11$.