Cours de mathématiques — Formation continue — ADSIO

Feuille 3 : Probabilités et applications

Exercice 1 En France, une plaque d'immatriculation est formée de 2 lettres, 3 chiffres puis 2 lettres. Combien de plaques différentes peut-on ainsi former ?

Exercice 2 Lors d'une connection en ligne, une banque demande à ses clients de saisir leur mot de passe sans clavier à l'aide de la fenêtre ci-dessous (chaque chiffre de 0 à 9 apparaît une unique fois).

1) Combien y-a-t-il de grilles possibles ?

2) On suppose qu'il doit y avoir au moins un chiffre par ligne et colonne. Combien y-a-t-il de telles grilles possibles ?

Exercice 3 Compter les anagrammes du mot « lac », puis les anagrammes des mots « banane » et « trotter ».

Exercice 4 On dispose de 10 billes que l'on veut aligner, combien de figures peut-on former dans les cas suivants (les billes de même couleur ne sont pas discernables).

1) Les billes sont de couleurs différentes.

2) Il y a 3 billes rouges, 4 vertes et 3 noires.

3) Il y a 3 billes rouges, 4 vertes et 3 noires, mais les rouges doivent être regroupées.

Exercice 5 Soient A_1, A_2, A_3 trois événements. Exprimer en fonction de A_1, A_2, A_3 et des opérations ensemblistes les événements ci-dessous et décrire leurs événements complémentaires :

1) Les trois événements se produisent.

2) A_1 et A_3 se produisent, mais non A_2.

3) L'événement A_1 ou l'événement A_2 se produit.

4) A_1 seul se produit.

5) On suppose que les événements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants et que $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = 1/4$, $P(A_3) = 1/8$. Calculer les probabilités des événements considérés dans les questions précédentes.

Exercice 6 **1)** Jeter une pièce 100 fois et compter le nombre de piles et de faces. Commentaires ?

2) Quelle est la loi du nombre de faces ?

3) Pour différentes valeurs de n, simuler avec le logiciel Scilab, un tirage $u = (x_1, \ldots, x_n)$ de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ indépendantes. Vérifier que $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ se rapproche de 1/2 lorsque $n \to +\infty$.

On pourra utiliser la commande suivante :

```
n=100
u = grand(n,1,"bin",1,0.5)
v=sum(u)/n
```

4) Même question avec des lois $\mathcal{B}(n, 0.1)$.

5) Effectuer plusieurs tirages de 100-échantillons de loi $\mathcal{B}(1/2)$ et compter pour chacun le nombre de 1 obtenus. Commentaires ?

Exercice 7 **1)** Avec le logiciel Scilab, simuler un tirage $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. (On pourra utiliser la commande `u = rand(100,1,"nor")`.)

2) On suppose que la taille X d'un français suit une loi normale $\mathcal{N}(1.70, 0.1)$. À l'aide de la question précédente, simuler un échantillon de cette loi. (On pourra utiliser la commande u = grand(100,1,"nor",m,σ).)

Exercice 8 On considère trois v.a. X, Y et Z ainsi que 20 observations indépendantes de chacune de ces lois. Retrouver les lois, sachant qu'il y a une loi binomiale $\mathcal{B}(6, 0.5)$, une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$ et une loi uniforme sur $\{0, \ldots, 6\}$:

2; 2; 1; 0; 0; 2; 3; 1; 0; 1; 1; 2; 3; 1; 0; 2; 1; 2; 0; 0

1; 4; 0; 5; 2; 3; 1; 4; 0; 0; 0; 0; 1; 5; 5; 3; 6; 6; 5; 2

3; 4; 1; 3; 4; 2; 5; 4; 4; 3; 2; 5; 4; 3; 2; 4; 3; 3; 2; 2.

Faites à votre tour des simulations en utilisant les commandes :
`grand(n,1,"bin",1,0.5)`, `grand(n,1,"poi",1)`, `grand(n,1,"uin",0,6)`

Exercice 9 On considère trois v.a. X, Y et Z ainsi que 10 observations indépendantes de chacune de ces lois. Retrouver les lois, sachant qu'il y a une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, une loi uniforme continue $\mathcal{U}([0,1])$ et une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$:

1.684; 0.302; 0.938; 0.366; 1.711; 2.407; 0.745; 1.054; 0.308; 0.060

0.904; −0.355; 0.775; 0.020; 1.675; −1.443; −0.749; 2.848; −0.431; −0.594

0.625; 0.134; 0.448; 0.538; 0.812; 0.443; 0.001; 0.659; 0.175; 0.450

Faites à votre tour des simulations en utilisant les commandes :
`grand(n,1,"nor",0,1)`, `grand(n,1,"exp",1)`, `grand(n,1,"unf",0,1)`

Exercice 10 On transmet des messages de 4 bits $b_1b_2b_3b_4$, où les trois premiers bits contiennent l'information du message et $b_4 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$ est bit de contrôle, appelé bit de parité. On suppose que chacun des 4 bits est transmis de façon indépendante et a une probabilité p d'être mal transmis. On note X la v.a. donnant le nombre d'erreurs lors de la transmission.

1) Quels sont les messages corrects possibles ?

2) Que vérifie la relation $b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4$?

3) Quelle est la loi de X ?

4) Calculer la probabilité de pouvoir détecter qu'une erreur de transmission soit détectée. Faire une application numérique pour $p = 0.05$.

Exercice 11 Une compagnie aérienne a mis en place un système de surréservation (en anglais *surbooking*) : à chaque vol, elle vend plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion. Si un voyageur se présente et n'obtient pas sa place, il prendra le vol suivant et reçoit une indemnisation financière. Les données sont les suivantes :

- Un avion a 100 places et la compagnie vend 102 billets (on supposera que les 102 billets sont vendus).
- Le prix d'une place est de 100 euros.
- Chaque voyageur a une probabilité $p = 0.95$ de se présenter au vol.
- La compensation financière pour un voyageur ne pouvant pas prendre l'avion est de 400 euros (montant minimum légal).

On note X la v.a. donnant le nombre de voyageurs se présentant à un vol et D la v.a. donnant le montant de la compensation financière.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Calculer les valeurs de $P(X = 101)$ et de $P(X = 102)$.

3) Calculer $E(D)$. En déduire le bénéfice moyen de faire de la surréservation.

4) Refaire les calculs précédents avec une compensation de 4000 euros.

Exercice 12 On lance un dé deux fois. On note X la v.a. donnant le résultat du premier lancer et Y la v.a. donnant le résultat du deuxième. On définit $Z = X + Y$.

1) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

2) Donner la loi de Z.

Exercice 13 Combien de colliers différents peut-on faire avec 4 perles de couleurs différentes ? Même question avec n couleurs différentes.