Lexique

Version longue

IREM de Lorraine
Groupe “université”

Le présent lexique traite de ce qu'on peut appeler de façon un peu prétentieuse l'écriture des mathématiques. Cependant il faut bien voir qu'on n'écrit pas les mathématiques de la même façon à tous les stades de l'apprentissage et à tous les niveaux de compétence. Nous pouvons distinguer au moins quatre étapes, sachant que leurs limites sont assez floues et dépendent beaucoup du sujet abordé.

D'abord il y a l'école élémentaire à laquelle on peut joindre aujourd'hui le début du collège,

ensuite la fin du même collège et le lycée, en pensant surtout ici aux filières scientifiques,

puis l'université, avec plus principalement la licence de mathématiques et le mastaire, au moins pour sa première année,

et enfin le monde des mathématiciens professionnels, quand il est confronté, plus précisément, non pas à l'enseignement mais à l'écriture d'articles.

Ce que l'on peut conseiller à un niveau peut se révéler peu indiqué à un autre. Nous visons ici les deux niveaux intermédiaires, en pensant, par exemple, à la terminale et au baccalauréat d'un côté et à la première année universitaire de l'autre.

Il nous arrivera de dire un mot de l'enseignement à l'école élémentaire, d'un côté, ou de la pratique courante des mathématiciens, de l'autre. De cette façon on espère que les conseils prodigués n'auront pas une influence néfaste en des lieux pour lesquels ils n'ont pas été conçus. Car, malheureusement, la tendance actuelle est plutôt l'oubli du besoin d'une progression dans les apprentissages. Au moment de la révolution dite des “mathématiques modernes” on a cru que l'on pouvait enseigner, dès l'école maternelle, dans les mêmes termes qu'à l'université. Aujourd'hui on a en principe tourné la page, mais les évolutions récentes des programmes montrent que la doctrine s'enracine au contraire. On parle de plus en plus tôt de fonctions abstraites, emploie les mots de la théorie des ensembles etc. C'est penser qu'il n'y a qu'une façon d'écrire les mathématiques. Or, s'il y a bien une façon moderne de le faire dans le monde savant, il ne faut pas pour autant dénigrer celle de quelques vieux livres de géométrie du lycée.

Malheureusement le fait d'avoir écarté les niveaux extrêmes ne simplifie pas complètement la tâche que nous nous sommes fixés. En effet la charnière constituée par l'utilisation de termes tirés de la théorie des ensembles ou de la logique formelle traverse les niveaux que nous avons retenus. D'une part le discours naïf commence à trouver ses limites. D'autre part le discours ensembliste n'a encore eu le temps d'être digéré; il prend alors une forme abusivement scolaire, loin de sa véritable fonction. Ces constatations débouchent alors sur une interrogation à propos de l'introduction précoce des usages modernes, telle qu'elle est préconisée dans les programmes d'aujourd'hui. Le résultat sur l'écriture des mathématiques, celle des sujets du baccalauréat comprise, n'est pas brillant.

Par ailleurs, nous prodiguons quelques conseils. Nous ne définissons pas une norme. Pour cette raison nous ne produirons pas d'exemples de ce qui serait à nos yeux critiquable, nous contentant de fournir des exemples dont on pourra s'inspirer. En fin de compte, comme le dit très bien Michèle Audin, chaque auteur est responsable de son texte, dont il doit assumer aussi bien le contenu que le style. A certains moments on peut se montrer très précis alors qu'à d'autres on le sera moins. Il faut un peu de variété pour rendre la lecture agréable. Il faut quelques éléments personnels également.

Nous nous efforcerons donc de multiplier les variantes dans les tournures que nous proposerons. Pour autant il nous faut humblement reconnaître que nous ne pourrions pas prendre en exemple bien des manuels, ouvrages ou polycopiés circulant aujourd'hui. Pour notre défense, nous reproduisons ici une réflexion émanant de Jean-Pierre Serre, elle-même tirée d'un texte de conseils rédactionnels, *Some Hints on Mathematical Style*, écrit par David Goss.

"It strikes me that mathematical writing is similar to using a language. To be understood you have to follow some grammatical rules. However, in our case, nobody has taken the trouble of writing down the grammar; we get it as a baby does from parents, by imitation of others. Some mathematicians have a good ear; some not (and some prefer the slangy expressions such as "iff"). That's life."

J'ai été frappé par le fait qu'écrire les mathématiques est semblable à s'exprimer dans une langue. Pour être compris, on doit respecter certaines règles grammaticales. Cependant, dans notre cas, personne n'a fait l'effort d'expliciter la grammaire; nous l'acquérons comme un bébé l'acquiert de ses parents, par imitation. Certains mathématiciens ont une bonne oreille; d'autres non (et certains préfèrent les expressions argotiques comme "ssi") . C'est la vie.

Cela dit, nous rappelons que notre objectif n'est pas exactement le même. Nous ne cherchons pas à imiter les professionnels. Par ailleurs nous ne nous faisons pas trop d'illusions. On attribue à Paul Halmos la réflexion suivante.

"I think I can tell someone how to write but I can't think who would want to listen."

Je crois pouvoir expliquer à quelqu'un la bonne façon d'écrire, mais je ne vois pas qui voudrait écouter.

Il y a, en relation avec ce qui précède, un point important à préciser. A qui ce lexique s'adresse-t-il? Disons qu'il s'adresse d'abord aux collègues des niveaux concernés, mais également, à travers eux, à l'Institution qui encadre leurs pratiques, de façon souvent très étroite aujourd'hui.

Notre réticence vis-à-vis des manuels s'applique ainsi également aux sujets des concours, comme celui de l'Agrégation externe et d'autres moins prestigieux. Nous n'avons pas davantage tenu compte de ce qui peut se lire dans les encyclopédies, en librairie ou sur le réseau.

Pour autant, nous n'avons pas du tout cherché à jouer le rôle qu'ont pu tenir, par le passé et pour la grammaire, quelques noms illustres. Nous nous sommes contentés de dire tout ce que nous avions appris, directement ou par la bande, des "bons usages", en essayant de les mettre en perspective et de les adapter aux niveaux intermédiaires que nous visons.

Ces “bons usages” existent, même s’ils ne sont codifiés nulle part et s’il serait difficile de les cerner avec précision. Il nous a donc semblé que les collègues ont le droit de tout connaître, notamment la petite part que nous avons modestement recueillie, pour en retenir ensuite ce qu’ils jugeront utile, mais alors en toute connaissance de cause.

Indiquons, pour finir, un point sur lequel nous n’avons pas tranché. Certains considèrent qu’un texte mathématique doit pouvoir être lu à voix haute, comme n’importe quel texte. Il n’est pas certain, cependant, que la lecture d’une expression puisse toujours se faire sans un minimum d’interprétation. Ainsi lira-t-on sans souci “$x = 1$” comme “x égale 1”; mais déjà “$x \leq 1$” se lit “x *est* inférieur ou égal à 1”. Quant à “imposons $x \leq 1$”, on peut le lire “imposons x inférieur ou égal à 1”, mais on préfèrera “imposons à x d’être inférieur ou égal à 1”.

Un texte mathématique contient aussi des figures et ces dernières ne peuvent pas être lues. Heureusement, au niveau auquel nous nous plaçons, il n’y a aura pas de diagramme commutatif ou autre joyeuseté, donc de figure considérée comme un objet.

Ces réserves faites, en principe tous les exemples que nous proposons peuvent effectivement être lus.

Nous remercions collectivement tous les collègues avec lesquels nous avons beaucoup échangé sur le sujet, et notamment les plus anciens qui nous ont fait connaître les secrets de leurs propres professeurs.

Adjectifs.

La langue française a coutume de transformer certains adjectifs en substantifs. En mathématiques on le fait également, parlant de "droite" au lieu de "ligne droite", sur le modèle de la "courbe". Cependant il faut résister à la tendance de rendre le procédé systématique. C'est notamment vrai à propos des nombres. On parle ainsi de :

nombres entiers naturels,
nombres entiers rationnels, de préférence à nombres entiers relatifs,
nombres rationnels ou fractionnaires,
nombres réels,
nombres complexes.

Il est sage de respecter cette terminologie en phase d'apprentissage, pour éviter des débordements malheureux[1].

On parle de "nombres entiers rationnels" (*rational integer* en langue anglaise) en pensant aux entiers sur le corps des nombres rationnels; noter qu'à cette occasion, le terme "entier" est pris comme substantif. Cela peut engendrer, chez les débutants, une confusion avec les nombres rationnels. Par ailleurs, parler de "nombres entiers relatifs" n'engendre pas de conflit avec d'autres conventions. Chacun choisira donc en fonction de son public, mais en connaissance de cause.

La consigne vaut dans bien d'autres domaines des mathématiques. Ainsi, en calcul différentiel, veillera-t-on à parler de

matrice jacobienne,
déterminant jacobien,

sans oublier le substantif[2].

En topologie générale, nombreux sont ceux qui utilisent les adjectifs *ouvert*, *fermé*, *compact*, *connexe*, comme substantifs. C'est disgracieux, mais également dommageable. En effet ont définit d'abord les

espaces compacts,
espaces connexes,

avant de définir, corrélativement, les

parties compactes
parties connexes

d'un espace. Il faut savoir insister sur la différence entre des propriétés topologiques (compacité, connexité), lesquelles sont intrinsèques, et des ingrédients d'une topologie (parties ouvertes ou fermées), lesquels sont qualifiés de façon relative (à un espace donné).

L'usage fait souvent cohabiter l'adjectif dans sa fonction primitive et dans sa forme substantive. C'est le cas pour les mots "parallèle", "perpendiculaire", "tangente", "asymptote" etc. On dira par exemple ceci.

Soient D, D' deux droites parallèles (ou perpendiculaires).

Ici mieux vaut parler de droites. En revanche on dira aussi volontiers cela.

---

[1] L'adjectif "entier" est utilisé depuis très longtemps comme substantif chez les grands auteurs en mathématiques; ce n'est pas le cas pour les autres, le mot "complexe" étant utilisé comme substantif dans un autre sens.

[2] Laissant la *jacobienne* aux géomètres.

Soit D' la parallèle (ou la perpendiculaire) à D par A.

Evidemment on peut encore s'exprimer, de façon plus soignée, ainsi.

Soit D' la droite parallèle (ou perpendiculaire) à D menée par A.

On noterait que s'il s'agissait de plans, on se garderait d'employer un substantif masculin. On parlera encore de "la tangente en M à la courbe" plus volontiers que de "la droite tangente à la courbe en M". En revanche on ne parle que du "plan tangent" en M à la surface. La transformation de l'adjectif en substantif l'oblige à prendre un genre. En principe il ne prend pas les deux.

Assez curieusement la "dérivée en a" de la fonction f désigne le nombre dérivé en ce point. La raison est que la "fonction dérivée" est aussi désignée comme la "dérivée".

Le mot "sécante" s'emploie, au singulier, plutôt comme substantif, notamment pour préciser la position d'une droite par rapport à un cercle. Sinon c'est, au pluriel, un adjectif : deux droites sont dites "sécantes" si elles se rencontrent exactement en un point. Plutôt que de dire que "D' est sécante à D", ce qui est laid, mieux vaut dire, plus simplement, que "D' coupe D".

Analyse et synthèse (raisonnement par).

Une manière souvent efficace d'établir l'existence et l'unicité pour un problème, est de raisonner par *analyse et synthèse*. On suppose le problème résolu en se donnant une solution; on accumule des propriétés de cette dernière jusqu'à pouvoir affirmer qu'elle ne peut être que tel objet; c'est la phase d'analyse. Ensuite on montre que l'objet en question est bien une solution du problème; c'est la synthèse.

On établit ainsi l'unicité avant l'existence. On trouvera à l'entrée *unicité*¶ un exemple de raisonnement de ce type. Nous en donnerons un autre ici.

On notera bien que l'analyse consiste à se donner une solution, et non pas à supposer qu'il en existe une. La phase d'analyse relève ainsi d'une *fiction*¶. En même temps il faut voir qu'on a posé un quantificateur universel implicite.

Voici un exemple très élémentaire. Etant donnés un nombre entier naturel non nul b et un nombre entier rationnel a, il s'agit de montrer qu'il existe un couple et un seul de nombres entiers rationnels (q, r) tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b \ .$$

Supposons d'abord donnés des nombres q, r vérifiant les propriétés demandées. On aura

$$bq \leq a < b(q + 1) \ .$$

Par conséquent q est nécessairement le plus grand élément de l'ensemble E des nombres entiers rationnels q' qui vérifient $bq' \leq a$.

Ainsi s'achève la phase d'analyse. Passons maintenant à la synthèse. Pour simplifier la discussion, nous allons supposer établie la propriété d'Archimède[3] fournissant un nombre entier naturel k tel que $-bk \leq a \leq bk$.

[3] Si $a = a' - a''$, où a' et a'' sont positifs ou nuls, alors $k = a' + a''$ convient.

Montrons maintenant que E possède bien un plus grand élément. D'abord cet ensemble est non vide; en effet $-k$ en fait partie. Ensuite il est majoré; en effet, si q' est dans E, nécessairement $bq' \leq bk$, donc $q' \leq k$. L'existence est donc assurée et le plus grand élément q de E convient évidemment.

Ainsi s'achève la synthèse. Comme souvent, la méthode donne un peu plus qu'annoncé, à savoir l'existence et l'unicité; elle caractérise la solution.

Anglicismes.

Quand on rédige en langue française, il est bon de savoir éviter certains anglicismes spécifiques aux mathématiques, même si cette règle serait sans doute considérée par certains comme l'expression d'une forme de purisme.

C'est le cas de l'adjectif *trivial*¶, pour lequel on renvoie à l'entrée correspondante.

On peut, dans le même registre, citer l'utilisation abusive du mot "preuve" employé pour parler de *démonstration*¶ .

Il est prudent de ne pas prendre d'initiative en utilisant des mots anglais, même s'ils n'ont pas leur équivalent en français. On évitera ainsi le mot "singleton" pour parler de "l'ensemble réduit à x". D'ailleurs il ne faut pas abuser de la notation $\{x\}$ non plus[4].

Annoncer la couleur. Voir *Pertinence*¶

Application. Voir *Fonction*¶.

AQT.

Les initiales AQT sont pour "âne qui trotte". Elles signifient que la fin de la démonstration s'achève toute seule, sur la lancée. C'est une plaisanterie bourbachique qu'il vaut mieux ne pas reproduire. Il serait dommage qu'elle connaisse le succès du qualificatif *trivial*¶ et d'autres formules prises un peu vite dans le jargon interne des mathématiciens. Au lycée d'aujourd'hui, toutes les démonstrations pourraient être ainsi résumées par AQT.

Article.

En mathématiques plus encore que dans la langue courante, il convient de bien distinguer l'article défini de l'article indéfini.

[4] L'espace vectoriel nul peut être noté 0; d'ailleurs, stricto sensu, ce n'est pas exactement $\{0\}$; mais cette convention est destinée aux mathématiciens confirmés, à cause de la confusion avec l'ensemble vide.

Au singulier, l'article défini "le/la" s'emploie pour un objet dont on connaît l'existence et l'unicité[5]. On écrira par exemple ceci.

Notons D *la* droite joignant les points distincts A et B.

Notons Γ *le* cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit f *la* primitive de g sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0.

Soit f *la* fonction définie sur $\mathbf{R}$ vérifiant l'équation différentielle $f'' + f = 2$ et les conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Au pluriel, l'article défini "les" s'applique à l'ensemble de tous les objets spécifiés. On l'emploie sans avoir besoin d'en connaître ni l'existence, ni la pluralité. Par exemple on peut demander ceci.

Trouver *les* solutions réelles de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

De même, quand on écrit ce qui suit, on ne présuppose pas qu'il y ait plusieurs positions; il peut même n'y en avoir aucune.

Déterminer les positions du point M pour lesquelles ces deux tétraèdres sont égaux[6].

Autrement dit, en mathématiques et contrairement à l'usage courant, le pluriel commence à zéro. Pour autant, l'accord se fera ensuite, quoi qu'il arrive, avec un pluriel.

Maintenant la langue française impose également le pluriel dans des situations où il peut aussi bien y avoir plusieurs réponses qu'une seule ou encore aucune.

Etablir la liste des absents.
Mentionner les enfants à charge, les ascendants handicapés etc.

L'usage du pluriel introduit une forme de neutralité, de la même façon que celui de l'infinitif, qu'on trouve dans les formulaires et recettes. Cela n'épargne pas d'avoir à l'expliquer, même assez tôt dans la formation, en classe de mathématiques.

Au singulier, l'article indéfini "un/une" signifie toujours "un(e) parmi d'autres"[7], ce qui n'interdit pas, pour autant, qu'il n'y ait aucun autre.

Employer l'article "un/une" suppose a priori l'existence d'un objet, toujours parmi d'autres, même si cela relève d'une fiction locale. Voir comment *introduire*¶ un objet; on trouve l'article indéfini quand on a posé un quantificateur universel : "soit n un nombre entier". On écrira par exemple comme suit.

Considérons *une* droite D passant par A.

Considérons *un* cercle passant par les points A et B.

Considérons *une* primitive f de g.

Considérons *une* solution f de l'équation différentielle $x'' + x = 2$.

On utilise aussi l'article indéfini dans un cas d'existence et d'unicité, lorsqu'on ne veut pas faire état de cette propriété.

---

[5] Ainsi "établir l'unicité de la solution" est une formule inadéquate, vu que l'emploi de l'article défini présuppose l'existence et l'unicité.

[6] Il serait effroyable de devoir écrire "le ou les points, s'il en existe"

[7] Ainsi "établir l'unicité de la solution" est aussi une formule inadéquate, vu que la propriété ne peut s'appliquer à une solution particulière, qu'il en existe ou non d'ailleurs.

Soit K *le* sous-corps de $\mathbf{R}$ engendré par $\sqrt{2}$ / *un* sous-corps contenant $\sqrt{2}$ et inclus dans tous ceux qui possèdent cette propriété.

Dans le premier cas, on nomme un objet parfaitement défini; dans le second on ne s'intéresse ni à l'unicité, ni même à l'existence, qui peut aussi bien relever d'une fiction.

Maintenant quand on utilise cet article indéfini pour exprimer une propriété d'existence, "un/une" signifie alors "un(e) au moins". Cela fait également partie, assez tôt, de l'apprentissage que de s'habituer à cet usage, qui n'est pas celui de la langue commune. Quand on dit, comme Alfred de Vigny :

"Il est sur ma montagne une épaisse bruyère"

on fait allusion à une bruyère bien précise. A l'inverse, quand en mathématiques on dit :

"L'équation admet toujours une solution",

on entend qu'elle en admet toujours au moins une. Sinon on dirait "exactement une" ou "une et une seule"; voir *précisions*¶.

Au pluriel, l'article indéfini "des" s'applique à certains éléments, parmi d'autres, dont l'existence et la pluralité ne sont pas exigées a priori.

Par conséquent on évite en général l'emploi du seul pluriel pour exprimer une propriété d'existence vraiment plurielle. Eventuellement on parlera de "plusieurs", voire "d'au moins deux", en ajoutant encore "différent(e)s" ou "distinct(e)s" s'il y a doute.

Articulations.

Dans un texte mathématique, entre les assertions ou les calculs qui se suivent, il est absolument indispensable de placer les articulations adéquates. S'il est exclu d'utiliser un connecteur logique, symbole d'implication ou d'équivalence, à cette fin, on n'y répond pas non plus en distribuant au hasard quelques mots convenus.

Une fois posées les hypothèses avec les quantificateurs éventuels, le raisonnement peut démarrer directement. On ne placera

"alors"

en début de phrase que pour rebondir sur une situation particulièrement remarquable.

On utilisera, bien sûr, toutes les transitions propres au récit, notamment celles qui suivent :

"d'abord",
"puis",
"ensuite",
"encore",
"enfin".

Quand on devra initier un récit parallèle, on le précisera à l'aide d'une expression du genre :

"de plus",
"en outre",
"par ailleurs",

“d’un autre côté”,
“en même temps”;
ou encore, pour marquer une rupture :
“au contraire”,
“en revanche”.

Pour passer d’une assertion ou d’un calcul à une ou un autre qui s’en déduit directement, on utilise une locution comme :
“donc”,
“par suite”,
“par conséquent”, “en conséquence”,
“d’où” (avec un groupe nominal),
“de sorte que”,
“en particulier” (si c’est le cas),
faisant bien sûr suite, directement ou non, à une ponctuation et complétée le cas échéant par une justification du genre
“d’après …”,
“par application de …”,
qu’on place généralement à la suite de la nouvelle assertation.

Souvent on procède en sens inverse, fondant une assertion sur une autre qui la suit; cette dernière sera en général précédée par
“car”,
“puisque”,
“sachant que”,
“en effet”,
faisant toujours suite, directement ou non suivant le cas, à une ponctuation.

Lorsque le passage d’une ligne à une autre relève essentiellement du niveau de la réécriture, la transition peut se faire avec :
“autrement dit”,
“c’est-à-dire”,
“ou”, “ou encore”,
“soit”, “soit aussi”,
“qui s’écrit”.
Dans d’autres cas, pour indiquer un traitement semblable, on placera :
“de même”,
“de façon analogue”,
“ainsi que”.

Lorsqu’une suite de calculs se déduisent les uns des autres, sans qu’il soit besoin de justification particulière, on peut l’annoncer au début pour éviter la répétition de transitions peu informatives, par exemple comme suit.

Par des calculs simples, on obtient successivement …

Pour conclure un enchaînement logique et en faire apparaître le résultat, on pourra utiliser
“ainsi”,
“en définitive”,
“en conclusion”.

Enfin on peut toujours se souvenir des formules passe-partout un peu fades, comme :

"on obtient",

voire à l'extrême rigueur

"on a"[8],

quand on est absolument à court d'imagination.

Assommer.

S'il est une chose à éviter de façon très générale, c'est d'assommer le lecteur avec des formules indigestes.

Ainsi évitera-t-on les doubles indices ou doubles exposants chaque fois qu'ils ne sont pas absolument nécessaires. A fortiori n'ira-t-on pas au-delà. Par exemple, pour travailler dans l'espace produit $\prod_n X_n$, on pourra se donner une suite (x_k) du produit et on considérera sa projection $p_n(x_k)$ sur le facteur X_n.

De même se passera-t-on de grandes formules bardées de *quantificateurs*¶, comme on en voit souvent fleurir en Analyse. Le langage de la logique formelle ne doit pas envahir le discours.

Voici un exemple, du niveau de la première année universitaire. Si l'on veut introduire l'intégrale de Riemann par le théorème de Darboux, on sera amené à donner le critère d'intégrabilité suivant : pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre $p > 0$ tel que si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des subdivisions de pas inférieur à p, les sommes de Riemann $S_{\mathcal{S}}$ et $S_{\mathcal{T}}$ diffèrent d'au plus ϵ.

On s'y prend rarement ainsi. On préfère en général une présentation essentiellement différente, dans laquelle la difficulté est fractionnée : on définit les intégrales supérieure et inférieure et l'intégrabilité par leur égalité et leur finitude.

Axiomes.

Les *axiomes* sont des relations prises comme vraies pour bâtir une théorie. Il y en a diverses sortes.

Les axiomes de la logique ne sont en général même pas évoqués dans la pratique mathématique. On en trouve exactement cinq, qui sont plutôt des axiomes implicites — des règles produisant des axiomes — dans la présentation de la mathématique formelle de Bourbaki.

On ne parle que rarement des axiomes de la théorie des ensembles, dits de Zermelo-Frenkel, lesquels ont reçu pourtant des noms plus ou moins évocateurs : axiome d'extensionalité, axiome de l'infini etc. On ne parle pas beaucoup plus des axiomes de la géométrie, comme ceux de David Hilbert.

En réalité on ne parle que des axiomes sur lesquels on peut choisir ou non de s'appuyer. C'est l'axiome du choix général en théorie des ensembles, l'axiome des parallèles — le postulatum d'Euclide — en géométrie.

[8] Déjà, si R est une relation, alors "R" et "on a R" ont le même sens; ensuite "on a que R" serait atroce.

On parle encore d'axiomes pour désigner les ingrédients d'une présentation dite *axiomatique*. On parle ainsi des axiomes des groupes, des espaces vectoriels, des espaces topologiques, des espaces mesurés etc. On pourrait aussi bien parler de propriétés.

Brouillon (au).

Utiliser un brouillon est une pratique qui s'est, hélas, perdue. A tel point qu'on peut aujourd'hui s'interroger : à quoi bon un brouillon? Or, sans brouillon, il n'est point de rédaction soignée.

En même temps, la disparition de la distinction entre brouillon et copie est un appauvrissement dommageable pour les candidats aux concours; ou bien les copies sont des brouillons ou les brouillons — alors inutiles — des copies.

ll est vrai que le professeur de lettres doit résoudre un problème analogue, pour expliquer qu'on n'écrit pas comme on parle.

Voici un exemple qui prouve l'utilité du brouillon. Nous sommes en classe de terminale et on nous propose l'exercice que voici. Une rigueur, peut-être un peu excessive, y prévaut.

Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$. Montrer que la suite définie par $v_n = u_n + 3$ est géométrique.

Les élèves savent qu'une suite géométrique est caractérisée par un rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ constant. Ils écriront donc, au brouillon parce que c'est toujours ainsi qu'on commence :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n + 3}{3} . \frac{1}{u_n + 3} = \frac{1}{3} \ .$$

Cependant ils savent bien qu'on ne peut pas diviser par v_n sans avoir vérifié, au préalable, que sa valeur n'était jamais nulle; d'ailleurs partir de $u_0 = -3$ aurait posé un problème. Donc, sur la copie, ils partiront de v_{n+1} et essaieront de faire apparaître v_n avec un facteur qu'ils savent déjà être 1/3. Compte-tenu du brouillon, c'est facile.

A l'université on trouve la même stratégie avec les équations différentielles à variables séparées. Voici un exemple.

Soit à résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -2kxy \ ,$$

où k est un paramètre réel.

Au brouillon on écrira

$$\frac{dy}{y} = -2kxdx \ ,$$

qu'on intègrera en

$$\log y = -kx^2 + c \ ,$$

puis

$$y = Ce^{-2kx^2} \ .$$

On a fait implicitement l'hypothèse qu'on travaillait au voisinage d'un point où la fonction y d'abord n'était pas nulle, puis était positive. On sait qu'on peut se rattraper en admettant d'abord $C = 0$, puis $C \leq 0$. Mais, pour la solution rédigée, on posera simplement

$$z = e^{2kx^2}.y$$

et l'on écrira l'équation pour z.

Dans un problème de physique, où le signe de y serait connu à l'avance, la première stratégie reprendrait ses droits. On écrirait la solution sous une forme semblable à

$$\log y - \log y_0 = -k(x^2 - x_0^2) \ ,$$

où x_0, y_0 sont la donnée initiale.

On peut se permettre au brouillon des stratégies beaucoup plus "sales" que celles dont on vient de parler. Pour établir une égalité $A = B$, on peut commencer par l'écrire, puis la transformer en jouant à la fois sur A et B jusqu'à obtenir la même expression à gauche et à droite. Evidemment ce genre de calcul ne doit pas figurer sur une copie.

Pour finir sur le sujet, nous allons mettre un bémol dans l'opposition entre le brouillon et la rédaction définitive. Il incombe en effet que cette dernière reste aussi spontanée que possible. Dans l'idéal, le lecteur devrait pouvoir comprendre comment elle a été obtenue.

Si toutes les tentatives infructueuses doivent être laissées au brouillon, en revanche la démarche générale n'a pas nécessairement à être complètement repensée. Par exemple, il n'est pas indispensable de toujours respecter l'ordre logique dans le détail. Voir ce qu'on dit à propos du discours *démonstratif*¶.

Calcul (présenter un).

La présentation d'un calcul est probablement l'exercice le plus courant, si ce n'est le plus important, mais ce n'est pas nécessairement le plus simple.

Une première option est la présentation dépouillée. C'est celle qu'en général on exige des élèves du lycée et que le professeur écrit *au tableau* pour corriger l'exercice. Les explications qu'il donne, pour passer d'une ligne à l'autre, sont alors orales.

Cette présentation est adaptée quand les stratégies de calcul font toujours partie d'un même corps de règles codifiées. C'est bien le cas dans les premiers niveaux.

Pour autant, il ne faut pas sous-estimer l'art du calcul. Un calcul bien mené ne multiplie pas à l'infini les intermédiaires inutiles. C'est pourtant ce que l'on trouve sur les copies, par le double jeu de l'absence de *brouillon*¶ et du manque de dextérité de la part des élèves et étudiants.

Un calcul peut être à la fois très sobre et agréable à lire. Voici un exemple de calcul pratiqué *à l'université* pour établir une convergence d'intégrale.

Si a, A sont des nombres réels vérifiant $0 < a \leq A$, une intégration par parties donne successivement :

$$\begin{aligned}\int_a^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_a^A \frac{1}{t} d(1-\cos t) &= \frac{1-\cos t}{t}\Big|_{t=a}^{t=A} - \int_a^A (1-\cos t)d\big(\frac{1}{t}\big) \\ &= \frac{1-\cos t}{t}\Big|_{t=a}^{t=A} + \int_a^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \ .\end{aligned}$$

Il n'est pas toujours nécessaire de donner des noms comme u et v à des fonctions auxiliaires pour présenter le calcul. Si on le fait, il convient d'introduire proprement ces dernières. Dans notre exemple cela donnerait ce qui suit.

Opérons une intégration par parties et définissons des fonctions u, v sur $[a, A]$ par

$$u(t) = 1 - \cos t \quad , \quad v(t) = \frac{1}{t} \ .$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_a^A \frac{\sin t}{t}\ dt = \int_a^A u'(t)v(t)\ dt &= u(t)v(t)\Big|_{t=a}^{t=A} - \int_a^A u(t)v'(t)dt \\ &= \frac{1-\cos t}{t}\Big|_{t=a}^{t=A} + \int_a^A \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt \ .\end{aligned}$$

On peut évidemment faire figurer le calcul

$$u'(t) = \sin t \quad , \quad v'(t) = -1/t^2 \ ,$$

mais ce dernier n'ajoute rien. En revanche, commencer par $v'(t) = \cdots$ est à laisser sur le brouillon.

Une autre option est la présentation assortie d'explications. On la trouve dans la plupart des ouvrages universitaires sérieux. Elle s'impose quand le calcul fait appel à une très grande variété de propriétés. En même temps elle permet de réduire encore les intermédiaires. A titre d'exemple, on peut ajouter au calcul que nous venons de présenter ce qui suit.

D'abord, à la limite quand $a \to 0$, il vient

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{1-\cos A}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt \ ,$$

sachant que les fonctions apparaissant sous l'intégrale et dans le terme tout intégré se prolongent continûment en 0.

Ensuite, à la limite quand $A \to \infty$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ dt = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt \ ,$$

où l'intégrale de gauche est convergente; en effet le terme tout intégré tend vers 0 et l'intégrale de droite est absolument convergente, vu que

$$\int_0^\infty \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| dt \leq \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\ dt \ ,$$

où le second membre a une valeur finie.

Voici un autre exemple de calcul, qui mêle l'enchaînement simple aux justifications. Il s'agit d'un calcul d'intégrale, précisément de celui de

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{-x}}\ dx \ .$$

Posons le changement de variable

$$e^x = u$$

où u varie dans l'intrevalle $]0, +\infty[$. Alors

$$x = \log u \quad , \quad dx = \frac{du}{u} \ ,$$

l'intégrale devenant

$$\int_1^e \frac{u}{1+u}\, du = \int_1^e du - \int_1^e \frac{du}{1+u} = (e-1) - \log(1+u)\Big|_{u=1}^{u=e} \ .$$

On obtient ainsi

$$(e-1) - \log(1+e) + \log 2 \ .$$

Au lycée et même à *l'université* , une difficulté se présente quand il faut corriger un exercice *au tableau* en se plaçant dans cette perspective, celle d'assortir le calcul d'explications. La tentation d'utiliser des abréviations est très grande. Cependant, sauf dans le cas où les auditeurs sont des mathématiciens confirmés, il convient alors d'écrire la solution en toutes lettres. Elle servira en effet de modèle.

Au lycée, un écueil constaté dans les copies des élèves qui appliquent une formule du cours est la précipitation avec laquelle ils utilisent les notations de ce cours, sans comprendre leur caractère largement arbitraire.

Quand on leur demande de donner l'équation d'une droite passant par deux points du plan, ils sautent sur

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \cdots$$

sans hésiter. Un conseil facile à suivre consiste à dire ceci.

La pente a de la droite est donnée par ...

Canonique (*culturel*).

L'adjectif "canonique" vient du mot grec $\kappa\alpha\nu\omega\nu$, qui désigne la tige de roseau, la règle en bois et par extension le règlement. Le sens qu'on lui donne en mathématique est dérivé du "droit canon" de l'Eglise, comme pour "l'âge canonique" qui était l'âge minimum de quarante ans pour être la servante d'un ecclésiastique.

On qualifie généralement de canonique[9] un objet dont la construction dépend de règles repertoriées quelque part dans le corpus mathématique, règles non ambiguës, ne laissant en particulier aucun choix. Etre canonique n'est pas une qualité de l'objet considéré, si ce n'est celle d'avoir été qualifié comme tel.

[9] Souvent les objets canoniques sont aussi des objets naturels, ce qui signifie qu'ils sont fonctoriels; la décomposition canonique d'une application est aussi fonctorielle en ce sens.

Si l'on ne définit pas ce qui est canonique en général, chaque fois que le terme apparaît dans une *locution*¶, on doit donner une définition précise de cette dernière. Ainsi, à propos des *fonctions**, trouve-t-on l'exemple de l'injection canonique d'une partie F de E dans E, laquelle prend la valeur x en x.

Voici un autre exemple, utilisant le premier et relatif à la donnée d'une application f générale entre deux ensembles E et F. On définit comme suit la *décomposition canonique* de cette application. D'un côté on considère la relation d'équivalence R sur E donnée par $f(x) = f(y)$ et la *projection canonique* p de E sur le quotient E/R. D'autre part on considère l'*injection canonique* i de l'image $f(E)$ dans F. On en déduit *canoniquement* une bijection g de E/R et $f(E)$. Alors $f = i \circ g \circ p$ fournit la *décomposition canonique* cherchée.

Dans cet exemple il ne s'agit pas seulement de dire que f peut s'écrire comme le produit d'une surjection, d'une bijection et d'une injection, mais qu'on peut le faire suivant une règle précise que l'on a répertoriée.

Par extension, après avoir présenté la construction d'un objet, on dit parfois : "c'est canonique". Cela veut dire qu'on pourrait en faire un objet canonique, parce que sa construction obéit à une règle que l'on pourrait consigner.

Cela dit, on connait aussi des exemples plus élémentaires de l'utilisation du qualificatif "canonique".

Ainsi parle-t-on de l'écriture canonique du trinôme pour désigner la transformation suivante.

$$ax^2 + bx + c = a\Big(\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big) \ .$$

De façon semblable, on parle de décomposition canonique d'une fonction homographique non dégénérée pour désigner son écriture sous la forme

$$a + \frac{b}{x - c} \ .$$

En première année universitaire, on introduit la base canonique de l'espace $\mathbf{R}^n$, comme étant

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \text{etc.}$$

Caractéristique (propriété), caractérisation. Voir *Propriété*¶

Centrées (formules).

On a le choix entre placer une formule sur la ligne courante ou lui laisser occuper une ligne à elle seule, sur laquelle on la centrera en général. En langue anglaise, on parle de *displayed formula*.

Il est conseillé de centrer les formules qui atteignent une certaine taille; il est en effet désagréable de couper une formule par la fin de ligne. A quelques exceptions près, on centrera obligatoirement toute formule dont certains éléments ont eux-mêmes besoin de plusieurs lignes, en plaçant des symboles verticaux chaque fois qu'il convient : parenthèse de matrice, trait de déterminant, accolade de système etc. En même temps la typographie des formules placées sur la ligne courante sera resserrée verticalement. On utilisera la notation $1/t$ pour une fraction, on placera les exposants et indices comme dans $\sum_a^b$ etc.

Voici un exemple nécessitant le recours aux formules centrées.

Considérons les deux droites d'équations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \quad ,$$

où t, u parcourent la droite réelle. Elles sont sécantes.

Dans cet exemple, tiré d'un exercice du baccalauréat, on a voulu aidé les étudiants en donnant des noms différents au paramètre; ce serait normalement à éviter.

Sauf dans quelques cas bien précis, il est préférable de ne pas insérer de texte ordinaire sur la ligne d'une formule centrée.

Cohérence.

Autant que possible, on cherche la cohérence dans les notations. L'ennui est que, pour apprécier cette cohérence, il faut avoir une vision large des mathématiques, laquelle dépasse le plus souvent les capacités d'un individu isolé.

A défaut on essaiera de résister à la tentation assimilationiste, consistant à propager une notation rencontrée.

Par exemple on se gardera d'agir comme suit. Ayant découvert la notation $\mathbf{R}^*$ et l'ayant attribuée à tort à l'ensemble des nombres réels non nuls (alors qu'il s'agit du groupe multiplicatif des nombres réels inversibles), sur le même mode on introduirait inutilement $\mathbf{N}^*$ et de façon erronée $\mathbf{Z}^*$ (qui est en réalité le groupe multiplicatif formé par 1 et -1).

Redonner à ces notations le sens qu'elles auraient dû conserver demandera de bouleverser bien des habitudes, dont celles du jury de l'Agrégation. En réalité, cela dépasse le simple conflit avec l'usage savant. A regarder les choses de près, même l'emploi de la notation $\mathbf{R}^*$ pour désigner *l'ensemble* des nombres réels non nuls, qui n'engendre pas de confusion, est non seulement inutile, mais inadéquat. Inutile parce que $x \neq 0$ remplace avantageusement $x \in \mathbf{R}^*$ quand le statut de x est clair[10]. Inadéquat parce qu'on écrit $\mathbf{R}^*$ quand on pense au groupe, pas à l'ensemble brut. A fortiori faut-il nommer $]0, +\infty[$ l'intervalle et n'utiliser $\mathbf{R}_+^*$ que pour le sous-groupe, notation qu'on lit "R étoile plus", dans cet ordre[11].

Autre exemple, on définit, entre autres, des intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ dans un ensemble ordonné[12]. Notamment le segment $[a, b]$ de la droite réelle est

[10] C'est la manie des *quantificateurs*¶ superflus qui y a conduit

[11] Un jour, au séminaire Bourbaki, quelqu'un a écrit $\overline{\mathbf{R}}_+^*$; Henri Cartan lui a fait remarquer "qu'il avait une notation pour cela : $]0, +\infty]$".

[12] Ces intervalles, dits à la française, ont remplacé la notation (a, b), plus ancienne et ambiguë; Bourbaki n'utilise pas les crochets ordinaires, mais il semble le seul.

l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x$ et $x \leq b$; ainsi $[1, 0]$ est-il vide. Cependant, si $a \leq b$, le segment $[a, b]$ est aussi le barycentre des points a, b affectés de coefficients positifs ou nuls. Certains ont étendu cette définition au cas d'un espace vectoriel ou affine réel; or, en l'appliquant à la droite réelle, elle donne $[1, 0] = [0, 1]$.

Ces contradictions ne sont pas rhédibitoires dès lors qu'on en a pris conscience. Il faut savoir, une fois pour toutes, que l'interprétation des *symboles** dépend du contexte. Il faut donc éclairer le lecteur chaque fois que nécessaire; plutôt que de chercher à introduire des différentiations subtiles; il restera toujours une frange d'ambiguïté.

On noterait que la notation $[a, b]$ dont on vient de parler a généré la notation $[AB]$ pour désigner le segment AB dans l'enseignement secondaire. Cette notation cohabite avec la notation $[a, b]$ qui désigne un intervalle de la droite, n'en différant que par l'absence de virgule. Par ailleurs la même notation $[AB]$ désigne, en géométrie, une longueur chez nos voisins.

A un niveau donné, la prudence suggère de ne pas imaginer une nouvelle notation avant de disposer d'un éventail suffisamment riche de situations pour le faire.

Comparer.

Le verbe *comparer* est formé sur la racine latine *par*, qui signifie égal. A l'origine comparer est apparier, assimiler. On noterait que l'adjectif *impar* signifie inégal, mais aussi inférieur.

Associer le verbe comparer à la notion d'égalité ou d'inégalité correspond bien au sens pris par ce verbe dans les fondements des mathématiques. La comparaison renvoie à une relation d'ordre : deux éléments sont *comparables* si l'un est inférieur (ou égal) à l'autre.

C'est le sens dans lequel on a un peu enfermé la comparaison dans l'enseignement du second degré : comparer deux éléments signifie déterminer le plus grand et le plus petit.

Cela étant, même en mathématiques, on utilise volontiers le verbe comparer dans un contexte beaucoup plus large.

En sciences expérimentales, donc à l'occasion du traitement mathématique d'un problème de physique par exemple, la comparaison entre deux valeurs prend un sens beaucoup plus riche. Comparer 10^3 à $10^3 - 10^{-3}$ d'une part et à 10^{-3} d'autre part, n'attend pas les mêmes réponses.

Conclusion.

Le verbe *conclure* vient du latin *concludere*, qui signifie *enfermer* ou *clore*, verbe français construit sur la même racine. On l'employait, à propos d'une phrase, pour dire qu'on lui donnait une fin harmonieuse.

En mathématiques, comme c'était déjà le cas en latin également, conclure veut dire conclure logiquement. Cependant la conclusion doit toujours fournir une fin harmonieuse au discours.

Connecteurs logiques, comme abréviations.

Avant tout il faut insister sur un point. En aucune façon il ne faut considérer les connecteurs logiques comme des abréviations pour les articulations du raisonnement. Au point qu'il serait prudent de ne jamais les employer au *tableau*¶ à cette fin. C'est malheureusement là qu'on les rencontre le plus souvent, notamment dans les copies d'étudiants[13].

Ce n'est pas par coquetterie qu'il faut s'opposer à un usage qui relève du contresens grave, du solécisme caractérisé.. En effet le symbole "$\Rightarrow$" n'a pas le sens de "donc" et le symbole " $\Longleftrightarrow$ " n'a pas celui de "ce qui équivaut à".

En particulier "$A \Rightarrow B$" ne signifie pas "j'ai A, donc j'ai B", mais "si j'ai A, alors j'ai B".

Maintenant, de façon plus fondamentale, il faut faire un usage modéré des implications ou équivalences logiques en général. On les trouvera souvent dans un énoncé, dans l'annonce ou la conclusion d'un raisonnement.

En revanche on ne doit pas les rencontrer dans le corps du raisonnement luimême. Pour raisonner, il convient notamment de *poser* les implications, comme on pose les quantificateurs. Voici un exemple.

Nous allons montrer que A implique B.
Supposons donc A.
...
Nous avons obtenu B. QED.

Connecteurs logiques, comme symboles.

Comme c'est le cas pour les *quantificateurs*, dans une rédaction soignée, l'usage des connecteurs est plutôt à réserver aux textes consacrés à la logique formelle. La raison est qu'en dehors de ce cadre on ne va pas calculer avec ces signes[14]; voir l'entrée *verbe et symboles**.

Pour autant, dans l'enseignement universitaire, on se sert assez souvent des connecteurs logiques pour présenter schématiquement une démonstration conduisant à l'équivalence logique entre diverses assertions. On écrira par exemple ceci.

La démonstration consistera à établir les implications

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}\ .$$

Il arrive aussi, de façon très exceptionnelle, que l'on mette des connecteurs logiques dans un énoncé pour mettre en évidence une séquence d'implications à retenir.

Cette tolérance commode ne s'étend pas au cœur même du discours démonstratif, à une exception près dont on parlera.

Maintenant si l'on veut exprimer, à un moment quelconque, une implication ou une équivalence logique, on préfèrera ne pas faire usage des symboles que sont les

[13] Mais aussi dans certains ouvrages appréciés, quand ce n'est pas sous la plume d'un membre de l'Inspection générale.

[14] Passer de "non($A \Rightarrow B$)" à "A et non$B$" est calculer, comme nier une expression quantifiée; mais on ne le fait pas au lycée; plus tard on se réserve au brouillon.

connecteurs logiques. Surtout lorsqu'il s'agirait d'enchaîner ces symboles. Pourquoi cette intransigeance, alors qu'on se permet évidemment l'écriture d'égalités, et même leur enchaînement?

D'abord par souci d'homogénéité. L'emploi des symboles logiques ne peut être généralisé sous peine d'appauvrir le discours : rappelons qu'on peut insérer des formules dans le *texte*¶, mais pas l'inverse. Autant donc ne pas y recourir[15].

Ensuite par risque de confusion. L'égalité relie des termes pour former une relation. Un connecteur logique relie des relations pour en faire une nouvelle. Si $A = B = C$ ne peut être interprété que d'une seule façon, en revanche $A \iff B \iff C$ peut se comprendre comme $(A \iff B) \iff C$ ou $A \iff (B \iff C)$, qui n'ont pas la même signification, pas plus que celle de $(A \iff B)$ et $(B \iff C)$, qui correspond à l'interprétation courante.

Il reste que l'on a souvent besoin de mentionner que les calculs que l'on effectue peuvent être remontés. Le mieux sera encore de le dire très simplement. Voici un exemple.

Considérons le système

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy^2 = 1 \end{cases} .$$

Nous allons le transformer de proche en proche en des systèmes équivalents comme suit. D'abord

...

puis

...

Pour autant, dès lors que l'on ne s'expose pas aux écueils signalés précédemment, on peut raisonnablement tolérer l'usage d'un connecteur comme " $\iff$ ".

Cela veut dire d'abord que le passage d'une ligne à l'autre ne nécessitera pas l'appel à un argument quelconque.

Ensuite, pour éviter les confusions dues à des regroupements intempestifs, on ne placera qu'un symbole par ligne et on alignera les symboles les uns sous les autres.

Ainsi, paradoxalement, c'est dans la situation où le raisonnement est remplacé par des automatismes et où la logique est finalement largement absente, qu'on peut tolérer le symbole et qu'on le rencontre assez couramment, du moins au lycée[16].

La pratique présente alors une fonction pédagogique indéniable, celle de forcer l'élève à prendre conscience de ce qu'il fait, en déclarant quel statut il accorde au passage d'une ligne à la suivante; il travaillera "par équivalences", comme on dit; si le contrat didactique a été clairement formulé, cela l'obligera à s'assurer de la validité du passage dans les deux sens.

---

[15] Il est intéressant de regarder, dans le cours d'algèbre pour la classe de seconde de C. Lebossé et C. Hemery, l'apparition de quelques symboles entre les éditions de 1947 et 1961; ils ne font que retirer à la précision du discours, laquelle était auparavant remarquable.

[16] Mais faire utiliser ce symbole ne peut avoir pour prétexte l'apprentissage du raisonnement.

Cet usage, qui se défend parfaitement au *brouillon*¶, témoigne d'un certain relâchement et n'est certainement pas à prendre pour modèle, mais il n'est pas vraiment gênant pour le lecteur conciliant. En fait on ne le rencontre plus quand le niveau s'élève, d'une part parce qu'on écrit moins d'intermédiaires, d'autre part parce qu'il faut argumenter plus systématiquement.

Voici un premier exemple. Il s'agit de caractériser les nombres complexes z tels que $(z-i)^2(z-1)^{-2}$ soit imaginaire pur. On souhaite travailler avec les arguments. Le début du raisonnement gagne à être décrit comme suit.

D'abord on a écarté le cas $z=1$; ensuite $z=i$ convient évidemment; écartons encore ce cas. La propriété considérée se traduit alors par

$$\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2 = \pm\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \ .$$

Un premier choix consiste à écrire ceci.

Cette équation se transforme de proche en proche comme suit.

...

C'est l'idéal, mais on peut encore tolérer sans grand risque cela.

$$\begin{aligned} &\iff 2\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \\ &\iff \text{etc.} \end{aligned}$$

Voici deux autres exemples, où une transformation demande à être justifiée et où l'on ne tire alors pas avantage à l'usage des symboles.

Déjà, pour dire "$x^2=24$, d'où $x=2\sqrt{6}$ sachant $x>0$", il ne serait guère probant d'utiliser un connecteur logique affublé d'un commentaire.

Ensuite, considérons la résolution, un peu plus substantielle, de l'équation

$$\sin x = \tan x \ ,$$

où x est un nombre réel qui n'est pas du type $\pi/2+k\pi$. On écrira volontiers ce qui suit.

Multiplions les deux membres de l'équation $\cos x$, sachant qu'il n'est pas nul. Il vient

$$\sin x \cos x = \sin x$$

soit

$$\sin x(1-\cos x) = 0 \ .$$

Cette relation équivaut à la nullité de l'un des facteurs. Mais si $\cos x = 1$, alors déjà $\sin x = 0$; l'annulation du second facteur n'apporte donc rien de nouveau par rapport à celle du premier. On résout donc par

$$\sin x = 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$x = k\pi$$

où k est un nombre entier relatif.

Ici procéder par équivalences conduira probablement à expliciter les cas où chaque facteur est nul, avant de grouper les réponses; ce serait maladroit. Ou alors on produira une solution comme celle-ci.

... La relation équivaut successivement à

$$\sin x(1 - \cos x) = 0 \ ;$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \cos x = 0;$$

$$x \in \{k\pi \ / \ k \in \mathbf{Z}\} \ .$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi \ / \ k \in \mathbf{Z}\}$.

Cette solution est correcte, mais elle passe à côté du point essentiel. En plus elle se répète. Enfin elle utilise une notation, pour définir un ensemble en compréhension, qui n'est pas bien codifiée.

Ce qu'on vient de dire pourrait, a priori, s'appliquer de la même façon au connecteur $\Rightarrow$. On ferait précéder les lignes de ce signe quand on pourrait écrire en préalable que "de la relation, on tire de proche en proche ce qui suit".

Cependant la tolérance serait ici sans intérêt, voire dommageable. En effet, on peut toujours poser la première prémisse et enchaîner par "donc". D'ailleurs, c'est ce que ceux qui s'accordent la permission pensent exprimer, tombant sous le coup de la pratique dénoncée des *connecteurs logiques comme abréviations*¶.

Par ailleurs, on trouvera à l'entrée correspondante des exemples et compléments sur l'*équivalence logique*¶. On y explique notamment que, pour résoudre une équation ou un système, l'on ne se place pas toujours mentalement dans le cadre de la logique. On se contente souvent d'opérer des transformations qui respectent l'ensemble des solutions, quand ce n'est pas davantage.

Considérer.

Le verbe *considérer*, d'origine latine, signifie au départ *examiner attentivement.* Cependant, dans le cas des mathématiques comme c'est aussi le cas en latin, il peut s'agir d'examiner par la pensée.

Autrement dit, considérer un objet consiste souvent à le créer par la pensée pour l'examiner. Cela nous renvoie à la *fiction*¶.

En pratique,

"considérons le ..."

consiste à examiner un objet existant. En revanche,

"considérons un ..."

s'emploie pour imaginer un objet.

Construire.

Le verbe *construire* est formé comme son homologue latin, sur le verbe *struere* qui signifie *disposer par couches*; construire est d'abord entasser.

Cette idée est présente dans l'utilisation du verbe en mathématiques. La construction d'une figure géométrique se fait en ajoutant, l'un après l'autre, des éléments.

Les démonstrations elles-mêmes sont des constructions. L'ordre d'exposition y est essentiel.

Contexte (expérimental ou pratique).

En principe un texte mathématique traite d'un sujet abstrait, indépendamment de tout contexte. Cependant il arrive, dans l'enseignement du lycée mais pas seulement, que l'on demande d'étudier une question de sciences physiques, naturelles ou économiques, voire de la vie pratique. A priori on ne peut que s'en féliciter.

A cette occasion, on utilisera des outils et des méthodes mathématiques. Leur application se fera dans le cadre du discours mathématique usuel. Cependant les hypothèses devront être traduites en termes abstraits, tout en conservant, si possible, des notations suggestives. En général cela se fera tout seul; en physique, par exemple, les lois sont souvent données comme des formules mathématiques. A l'inverse les résultats devront être formulés, ou plutôt reformulés, dans des termes correspondant au contexte. Là il y a souvent à faire. Le travail d'adaptation n'est pas très facile, car il suppose la familiarité avec deux mondes différents.

Voici juste un exemple, montrant déjà que les mathématiciens ne sont pas tous nécessairement rompus à l'exercice. A propos d'un problème portant sur une tension ou une intensité électriques dépendant du temps, ayant constaté que la fonction considérée était la somme d'une fonction périodique et d'une autre tendant vers zéro à l'infini, on dira ceci.

Le signal est composé d'une part établie et d'une part transitoire, données respectivement par

$$s_e = \cdots \quad , \quad s_t = \cdots \ .$$

Cet exercice d'aller-retour suppose évidemment que le traitement mathématique ne soit pas nul. Se contenter de traduire une information pour passer du discours abstrait au discours contextualisé ou l'inverse, ne présenterait aucun intérêt. S'il n'y a pas de traitement mathématique, il convient de s'exprimer simplement dans les termes adaptés au contexte. Pourquoi s'imposer un exercice à la fois difficile et non pertinent, dans pareil cas?

Malheureusement on trouve certains exemples de ce genre dans l'enseignement d'aujourd'hui. C'est le cas lorsqu'on demande de lire un graphique en déterminant des "images" ou des "antécédents", termes qui relèvent de la vision la plus abstraite qui soit de la notion de fonction, au point de ne même pas figurer dans Bourbaki.

Imaginons donné un graphique représentant la pression p en fonction de l'altitude h; c'est une fonction strictement décroissante. On ne demandera pas "l'antécédent h_1 de p_1" mais "à quelle altitude h_1 correspond la pression p_1".

Lorsqu'on travaille avec des grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques, en principe il n'est pas nécessaire de fixer tout de suite des unités. Cependant il faudra alors donner un nom aux constantes, posant par exemple

$$C = 1,5\mu\mathrm{F} \ ,$$

pour assurer l'homogénéité dimensionnelle dans les formules. Voici un exemple de petit problème rédigé de cette façon.

Un train prend le temps $t_0 = 3\mathrm{s}$ pour défiler devant un panneau et le temps $t_1 = 9\mathrm{s}$ pour traverser complètement un tunnel de longueur $l_1 = 200\mathrm{m}$. Quelle est sa longueur l et sa vitesse v?

Solution. On écrit les équations $l = vt_0$ et $l_1 + l = vt_1$. On en tire notamment $v = l_1/(t_1 - t_0)$, d'où $v = 33\mathrm{m/s}$ ...

La résolution, qui fournit la réponse dans un cas général, est un peu plus difficile qu'avec des valeurs chiffrées simples. Cependant elle présente trois avantages.

D'abord on bénéficie du contrôle par l'homogénéité dimensionnelle. Ensuite on peut toujours revenir sur le calcul, par exemple pour exprimer le résultat avec d'autres unités, comme la vitesse en km/h, ou pour améliorer sa précision. Surtout on peut effectuer un "calcul d'erreur". Si la longueur du tunnel est appréciée au mètre près et les temps au dixième de seconde, l'incertitude relative sur le dénominateur est $0,2/6$, celle sur le numérateur est $0,1/200$, celle sur le quotient est environ 4% et l'incertitude sur la vitesse de $1,5\mathrm{m/s}$. Dans un problème pratique, la notion de valeur exacte n'existe pas; d'ailleurs, si l'on avait considéré que les données fournissaient les chiffres significatifs, c'est une incertitude de 17% qu'il aurait fallu admettre.

En choisissant des unités pour les grandeurs considérées, on peut travailler avec des nombres réels et écrire des équations sans dimension. Il est malheureusement délicat de choisir un nom pour les variables. Les appeler x ou y n'est pas très suggestif. Inversement il est délicat de choisir une notation rappelant une grandeur physique[17]. Voici comment réécrire le petit problème ci-dessus.

Un train prend 3s pour défiler devant un panneau et 9s pour traverser un tunnel long de 200m (de l'entrée de la motrice à la sortie du dernier wagon). Quelle est sa longueur et sa vitesse?

Solution. On mesure les temps en s et les longueurs en m, donc les vitesses en m/s. Désignons par x la mesure de la longueur du train et y celle de sa vitesse ...

Noter que l'énoncé n'a pas nécessairement à imposer les unités[18]. En revanche, il faut faire des choix cohérents pour les unités composées.

Une question délicate concerne la géométrie. Faut-il se placer dans un cadre géométrique concret, où, par exemple, la magnitude d'un vecteur est une longueur? Faut-il, au contraire, se placer dans un espace abstrait, comme on le fait à l'université, où l'on considère volontiers un espace vectoriel muni d'un produit scalaire à valeurs réelles, dans lequel la norme d'un vecteur est un nombre réel positif?

La question se complique encore quand on pense à la mécanique ou à la physique. On peut, en effet, faire de la géométrie vectorielle dans d'autres espaces que celui de la géométrie pure, considérant des vitesses, accélérations, forces, champs électriques

[17] Il est choquant de lire $l = 3v$, où l correspond à une longueur et v à une vitesse.

[18] C'est souvent le cas au baccalauréat, où l'on oublie d'ailleurs régulièrement de parler de l'unité de temps.

ou magnétiques. La physique utilise l'espace abstrait, qui est commun à toutes les grandeurs vectorielles. On l'adapte en le tensorisant par une droite vectorielle portant la dimension physique. C'est ainsi qu'un physicien écrira

$$v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z \ .$$

Dans cette formule, les vecteurs e_x, e_y, e_z composent une base (orthonormée) de l'espace abstrait et les coefficients v_x, v_y, v_z portent la dimension physique.

Ainsi la géométrie vectorielle peut-elle être pratiquée dans un espace abstrait, muni, comme on l'a dit, d'un produit scalaire et d'une norme à valeurs réelles. On passe d'un espace physique à un espace abstrait en choisissant une unité adéquate.

On peut donc s'exprimer de l'une ou l'autre des façons qui suivent.

Les longueurs seront exprimées en mètres.

Ayant choisi une unité de longueur une fois pour toutes, les longueurs seront exprimées dans cette unité.

On ajoutera éventuellement ce complément.

Les surfaces et les volumes seront exprimés dans les unités associées.

Cela fait, on ne mentionnera plus les unités[19]. Aussi peut-on très bien écrire ceci dans un exercice de géométrie.

Un carré a pour côté $x + 5$, où x est un nombre réel positif.

Si l'on veut représenter un repère sur un cahier, on précisera alors l'unité choisie, qui sera le plus souvent le cm. Un vecteur de norme 1 aura, sur le cahier, une longueur de 1cm. En toute rigueur le repère serait à distinguer de sa représentation sur le cahier.

Continuité, limite (propriété de).

Nous avons vu, à propos de l'usage des *quantificateurs*¶, qu'au moins au niveau des premières années universitaires, pour exprimer une propriété de continuité ou de limite, il était préférable de tenir un discours plus opérationnel que strictement logique. Nous allons préciser ici la manière de s'y prendre.

On souhaite, au niveau du *lycée*, introduire la définition formalisée d'une limite infinie pour une suite quelconque, alors que rien de semblable n'aura été préalablement tenté. Faisons ici abstraction du fait qu'il vaudrait peut-être mieux commencer avec les suites monotones.

Voici ce qu'on pourrait prendre comme définition pour une suite (x_n) tendant vers $+\infty$.

Etant donné un nombre réel A, on peut trouver un rang n à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A.

Voici une variante, respectant la même exigence, en version concise et en version plus littéraire.

[19] Si l'on parle d'unité il faut toujours préciser de quelque type il s'agit. Ce peut être une longueur, une surface, un volume etc.

Etant donné un nombre réel A, on peut trouver un nombre entier n tel que $x_k \geq A$ pour $k \geq n$ (pour tout nombre entier k supérieur ou égal à n).

Rien n'interdit de discuter en préalable le sens de cette définition, disant par exemple ceci : si A est une valeur quelconque donnée à l'avance, le terme général x_n dépasse A dès que n est assez grand.

Introduire ici des intervalles serait artificiel. On pourra le faire plus tard, bien sûr, en liaison avec la considération d'une topologie sur la droite achevée.

Demander que x_n dépasse A non pas pour n assez grand, mais sauf pour un nombre fini de valeurs de n, est peut-être plus facile à manier; cependant ce n'est pas conforme à l'idée primitive de limite et à éviter[20].

Pour une limite finie l en un point a d'une fonction f, on écrirait de même ceci.

Etant donné un nombre réel $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre réel $\eta > 0$ tel que $|x - a| \leq \eta$ implique $|f(x) - l| \leq \epsilon$.

Cette fois l'idée, à discuter éventuellement au préalable, serait la suivante : si ϵ est une précision quelconque donnée à l'avance pour les valeurs de f, on peut trouver une précision η pour les valeurs de x de façon qu'un écart d'au plus η entre x et a n'entraîne qu'un écart d'au plus ϵ entre $f(x)$ et l.

Si l'on se place dans le cas de la continuité en a, cela veut dire qu'une erreur d'au plus α sur a entraîne une erreur d'au plus ϵ sur $f(a)$. En d'autre termes, la continuité est une propriété de stabilité : "petite cause, petit effet"; mais c'est à prendre dans le sens : je peux être assuré d'un petit effet en imposant une cause suffisamment petite. L'adjectif "petit" n'a pas de sens tout seul en mathématiques.

Ici encore, la traduction avec des intervalles pourra attendre le besoin d'introduire une topologie sur la droite.

Voici, à titre d'exemple, comment les manuels du lycée définissaient une limite d'une fonction en un point, lorsque la définition formalisée était explicitement au programme.

La fonction $y = f(x)$ admet la limite b lorsque x tend vers a, si à tout nombre (strictement) positif arbitraire ϵ on peut faire correspondre un nombre (strictement) positif α tel que la relation $|x - a| < \alpha$ entraîne $|f(x) - b| < \epsilon$ [21].

Nous avons ajouté "strictement" pour plus de clarté. Sinon l'expression est parfaitement correcte. On a retenu l'idée de faire correspondre α à ϵ, ce qui est plus facile à comprendre que la succession de deux quantificateurs explicites. Cependant il restera à poser ϵ, aussi bien pour établir la propriété que pour l'utiliser.

Voici, maintenant, comment le mathématicien Godfrey Harold Hardy présente la notion de limite infinie d'une suite, dans son ouvrage *Pure Mathematics* dont la première édition date de 1908, après une discussion préparatoire longue d'une douzaine de pages. C'est une version complètement opérationnelle qu'il privilégie.

The function $\phi(n)$ is said to tend to $+\infty$ (positive infinity) with n if, when any number Δ, however large, is assigned, we can détermine $n_0(\Delta)$ so that $\phi(n) > \Delta$ when $n \geq n_0(\Delta)$; that is to say if, however large Δ may be, $\phi(n) > \Delta$ for sufficiently large values of n.

[20] C'est déjà la limite suivant un filtre, celui de Fréchet.

[21] C. Lebossé et C. Hemery, algébre de la classe de première, 1961.

Ce discours est insurpassable; on pourra juste en modifier les notations, préférant ϕ_n au lieu de $\phi(n)$ par exemple : voir les *familles**.

On y trouve tous les choix pertinents. On parle de tendre vers $+\infty$ plutôt que d'admettre une limite infinie, ce qui est juste moins pédant. On se donne Δ et on détermine n_0, donnant bien aux *quantificateurs** un sens pratique, opérationnel. On ajoute des *précisions**, en théorie superflues mais éclairantes : Δ peut être aussi grand que l'on veut et le choix de n_0 dépend de Δ. Pour finir on se garde bien d'ajouter un quantificateur portant sur n avant l'inégalité finale, parce que cela alourdirait inutilement la phrase; on se contente d'en restreindre a posteriori le domaine de *validité**, ce qui revient au même et donne de la fluidité. Noter que "when" pourrait être remplacé par "as soon as", dans le même esprit.

Ce n'est qu'en liaison avec la définition complète qu'on se permet de donner une version moins formalisée. Croire, comme les promoteurs des programmes de la classe de première, que l'on puisse poser cette version indépendamment de l'autre, en étant compris, est tout simplement montrueux.

Hardy avait donné auparavant la définition d'une limite finie. Il avait procédé dans l'autre sens, son objectif des pages d'introduction étant celui d'une formalisation progressive. La formulation est un peu différente, mais de la même qualité.

The function $\phi(n)$ is said to tend to the limit l as n tends to ∞, if, however small the positive number δ, $\phi(n)$ differs from l by less than δ for sufficiently large values of n; that is to say, if, however small be the positive number δ, we can determine a positive number $n(\delta)$ corresponding to δ, such that $\phi(n)$ differs from l by less than δ for all values of n greater than or equal to $n_0(\delta)$.

Indiquons seulement au lecteur français d'aujourd'hui que "positif" y veut dire "strictement positif", conformément à la tradition anglo-saxonne.

Conventions.

Le verbe français *convenir* est tiré du latin *convenire*, qui veut dire mot à mot venir ensemble, plus précisément *s'adapter*, *s'accorder*. Même si elle y prend un sens un peu particulier, cette idée d'accord est également très présente en mathématiques.

Ainsi, en théorie, chacun peut-il choisir librement ses conventions et définir à sa manière les termes qu'il utilise. Cependant, comme il s'agit d'être compris par le lecteur sans exiger trop d'efforts de sa part, mieux vaut s'en tenir à des usages raisonnablement répandus, sur lesquels un accord a pu se faire.

Certaines conventions ne sont peut-être pas très judicieuses, mais elles ont été consacrées par un usage ancien et adoptées sur tous les continents. En principe on les respectera. On écrira ainsi $g \circ f$ la composée des fonctions f et g, ce qui fait opérer la composition de la droite vers la gauche; c'est une conséquence de la notation $f(x)$, à laquelle il aurait peut-être fallu préférer xf, mais sur laquelle on ne reviendra pas.

D'autres conventions sont spécifiques à une communauté particulière, souvent géographiquement circonscrite. C'est le cas de certaines conventions qui circulent dans le monde enseignant hexagonal. Il n'y a aucune raison d'y souscrire si l'on en connaît de meilleures, surtout si ces dernières sont mieux partagées.

Comme exemple de convention hexagonale, on peut citer les notations (AB) pour une droite et $[AB]$ pour un segment. On peut très bien s'en passer sans produire de confusion, sachant d'ailleurs que des conventions contradictoires et aussi peu légitimes sont prises chez nos voisins, où $[AB]$ désigne par exemple une longueur. Pour être clair, il suffit de parler de la "droite AB" ou du "segment AB". On peut également adopter une position intermédiaire évitant les foudres de l'Institution, parlant de la "droite (AB)" ou du "segment $[AB]$".

Maintenant, face à deux possibilités contradictoires, comment choisir? On peut faire appel à son goût personnel. Sinon, si l'on a la sagesse de la modestie, comment savoir à qui accorder sa confiance? Il n'y a pas de règle simple. Il faut demander autour de soi quels sont les "bons" auteurs[22]. Dans certaines limites, Bourbaki en est un, comme Cartan, Godement, Dixmier, Serre et quelques autres. Disons que les anciens n'étaient pas tous mauvais.

De façon générale, il n'y a aucune honte à expliciter les conventions adoptées. On dira, par exemple, que l'on n'exclut pas les parallélogrammes ou les triangles aplatis, sachant que ce n'est pas l'usage le plus répandu. Par exemple on dira qu'on considérera les médianes du triangle comme des segments, ou au contraire comme des droites, en fonction des nécessités du moment, même si l'on pense que ce sont des usages installés; nous en reparlerons.

Au collège,

à propos des droites concourantes dont nous avons parlé à propos de *pertinence*¶, on dira que le qualificatif s'adresse a priori à des droites distinctes les unes des autres. Si l'on veut l'employer dans un cadre plus général, mieux vaut l'indiquer à l'avance.

Pour les droites du triangle, il y a beaucoup de souplesse dans les conventions.

Ainsi les médianes et les hauteurs sont-elles soit des droites, soit des segments, soit même des longueurs.

Il y a une incertitude à propos des bissectrices, lesquelles sont attachées à des angles. En principe, il y a deux façons de couper un angle en deux : dans le groupe des angles, l'équation $x + x = a$ admet deux solutions. La bissectrice est ainsi composée de deux demi-droites opposées, ce qui en fait une droite. Cependant, au niveau le plus élémentaire, on ne considère que les angles saillants et on pense plutôt à la bissectrice comme une demi-droite.

En revanche les médiatrices sont a priori des droites; la médiatrice est attachée à un segment.

Dans le même ordre d'idées, à la frontière entre le collège et le lycée, il est tout-à-fait normal d'écrire ceci, à l'appui d'une figure qui précise l'ordonnancement des sommets.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 10 cm. Soit encore M est un point mobile sur l'arête [AB] ...

Ici le mot "arête" a été pris d'abord comme une longueur, ensuite comme un segment. La même souplesse vaut pour le rayon d'un cercle, les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère. Dans les deux derniers cas, on peut même considérer les côtés comme des droites.

Au lycée,

[22] La frontière entre les usages bienséants et les autres est ténue; on ne parle pas, du moins en langue française, de sous-groupes disjoints, mais on se permet de parler d'un anneau sans éléments nilpotents, alors que 0 est nilpotent.

la position relative des droites et des plans dans l'espace pose des problèmes de convention assez difficiles à trancher. Voici ce qu'on pourrait faire.

Pour le parallélisme, on aura d'abord inclus les cas limites, contrairement à ce qui est préconisé pour le collège; des droites ou plans confondus seront donc considérés comme parallèles. Au lycée ou plus tard, on adaptera les conventions à une interprétation savante qui ne sera probablement pas donnée : *le parallélisme traduit une inclusion des directions.* Ainsi une droite est-elle parallèle à un plan si elle y est incluse ou ne le rencontre pas; en revanche on ne dira jamais qu'un plan est parallèle à une droite. De cette façon la relation de parallélisme est toujours transitive, mais pas toujours symétrique.

Il est prudent de ne jamais parler d'orthogonalité au collège. Au lycée ou plus tard, on fondera, comme pour le parallélisme, l'orthogonalité sur une interprétation savante, probablement non révélée : elle concernera toujours des *directions.* Ainsi deux variétés affines sont-elles orthogonales si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Ce peuvent être deux droites sans point commun; ce ne sera jamais, en dimension 3, deux plans.

La perpendicularité est équivalente à l'orthogonalité entre des droites d'un même plan ou entre une droite et un plan de l'espace. En revanche, dans l'espace, deux droites perpendiculaires devront se rencontrer, donc être coplanaires; deux plans seront perpendiculaires si l'un contient une perpendiculaire à l'autre; cela signifie que leurs directions orthogonales sont orthogonales.

A l'université,

la *convergence absolue* s'applique aux séries d'un espace normé : elle traduit la convergence de la série des normes, laquelle, dans un espace complet, entraîne la convergence en norme; pour une série de fonctions, il y a un risque de confusion avec la convergence absolue en chaque point, risque dont il faut bien avoir conscience; là encore, expliciter la convention adoptée ne nuit pas.

Mieux vaut réserver la *convergence normale* au cas particulier de la *norme uniforme* $\sup_{x\in X}|f(x)|$, souvent notée $\|f\|_X$ ou $\|f\|_\infty$. Pour cette dernière, d'ailleurs, d'autres dénominations plus scolaires sont moins indiquées[23] : il est souhaitable de relier la norme uniforme à la *convergence uniforme.* Dans tout cela, on pense plus particulièrement au cas des fonctions continues; pour des fonctions mesurables, on préfère parler de norme L^∞, la borne supérieure étant alors la borne supérieure essentielle.

En général,

les mathématiques utilisent les mots de la langue courante en leur attribuant, par convention, un sens qui n'a parfois aucun rapport avec leur sens primitif. Cependant cette particularité ne doit pas être cultivée par plaisir. Chaque fois que le sens pris en mathématiques peut se rapprocher du sens courant, on doit en profiter. L'idée est plutôt qu'au départ de l'apprentissage le sens mathématique est le sens courant, quand ce n'est pas le sens courant qui est le sens mathématique. Ensuite, peu à peu, le sens mathématique se précise, devenant de plus en plus abstrait et s'écartant donc du sens commun.

Il y a des cas où il faudrait peut-être innover. Cependant il faut alors attendre que l'innovation devienne l'usage, pas seulement pour l'enseignement secondaire

[23] Comme parler de norme "sup" ou de norme "infinie".

hexagonal, avant d'en faire un conseil. C'est ainsi qu'il serait heureux de parler des vecteurs d'une droite, les notant $\overline{AB}$ ou $\vec{AB}$; dans le premier cas on changerait l'usage pour les valeurs algébriques, lesquelles sont des valeurs réelles et supposent un repère choisi (au moins un sens et une unité); dans le second, qui semble être le choix du lycée d'autrefois, on prend aussi un risque, celui de modifier l'image mentale du vecteur.

Maintenant aucune convention ne peut être prise sans référence à toutes les autres. En effet, ce qui importe avant tout, en matière de conventions, est la cohérence. Cela fait que la plupart des conventions particulières sont extrêmement contraintes. Bien souvent on parle de convention de façon diplomatique, pour ne pas avoir à expliciter les raisons, aussi bonnes qu'impératives, d'un choix. Par exemple, il est traditionnel de poser $0! = 1$. En fait, on n'a guère de marge. En effet la factorielle est liée à la fonction Γ[24]. Par ailleurs, sans être aussi savant, on sait que $n!$ est l'ordre (le cardinal) du groupe des permutations d'un ensemble à n éléments; or l'ensemble *vide*¶ admet exactement une permutation, l'application vide. En liaison avec cela, on constate encore que définir $n!$ comme le produit des nombres entiers de 0 à 1 vaut également pour $n = 0$; c'est un produit indexé par la famille vide. Cela fait donc beaucoup de bonnes raisons, pour ce qu'on présente comme une convention.

Ce qu'on vient de dire à propos de certains points de terminologie vaut également pour l'écriture des mathématiques en général. Dans notre lexique, nous essayons d'indiquer quelques conventions qui président à cet exercice. En même temps, nous cherchons à donner les raisons de leur adoption, à expliquer en quoi elles sont légitimes. Car, là aussi, la liberté est beaucoup moins grande qu'on pourrait le penser. En parlant du *niveau de langue*¶, nous expliquons, par exemple, la nécessité de respecter, au plus près qu'il est possible, d'une part la langue littéraire et d'autre part les usages millénaires de la communauté savante.

Courbe représentative.

Au lycée notamment, l'usage scolaire a consacré "la courbe représentative d'une fonction dans un repère". Un puriste verrait deux incongruités dans cette expression. En effet le contexte n'est absolument pas géométrique. Or il vaudrait mieux réserver les mots "courbe" et "repère" à la géométrie. Par exemple, on pourra parler sans souci comme suit.

Donner l'équation cartésienne de la courbe γ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Il semblerait déjà que l'on préfère parler aujourd'hui, pour une fonction, de *représentation graphique*. Il suffirait, pour être en cohérence avec cette précaution, de s'exprimer alors comme suit.

Donner la représentation graphique de la fonction f dans des axes où l'on a pris le cm comme unité (ou bien dans des axes Oxy où l'on a pris 1cm sur l'axe Ox et 10cm sur l'axe Oy).

ou

[24] Tout simplement $n!$ est $\Gamma(n+1)$; $\Gamma(z)$ est défini pour z complexe non entier négatif ou nul et $\Gamma(1) = 1$.

Donner la représentation graphique de la pression p en fonction du volume v, dans des axes où l'on a choisi 1cm pour respectivement 1Pa et 1dm^3.

Bien sûr on peut faire encore plus simple, comme ceci.

Donner la représentation graphique de la fonction f, en prenant le cm comme unité (ou bien en prenant comme unité 1cm sur l'axe des x et 10cm sur celui des y).

ou

Donner la représentation graphique de la pression p en fonction du volume v, où 1cm représentera respectivement 1Pa et 1dm^3.

Tout cela n'est pas très important. On retiendra juste qu'il n'est vraiment pas nécessaire de parler, en cette occasion, de repère. D'ailleurs l'écran d'un calculateur graphique, dont l'usage est à la mode, n'est pas a priori un plan géométrique. C'est une fenêtre dont on règle séparément les paramètres horizontaux et verticaux.

En particulier, il y a une différence entre l'équation d'une droite dans un repère et la représentation graphique d'une fonction affine. Cependant il ne faut pas insister là-dessus. On doit pouvoir dire que la représentation est une droite, comme, dans d'autres cas, ce serait une parabole ou une branche d'hyperbole. En revanche, parler du foyer ou du paramètre de la parabole serait saugrenu pour la représentation d'une fonction.

Contrairement à une idée répandue, la *pente* d'une droite (ou d'une courbe en un point) relève davantage du registre fonctionnel que du registre géométrique[25]. Une fonction affine a une pente; il n'est pas nécessaire que la variable et la fonction aient la même dimension physique. Ainsi la dérivée est-elle une pente, la vitesse en particulier, le coût marginal également.

Maintenant, dans un repère quel qu'il soit, une droite géométrique admet une équation $y = ax + b$ ou $x = b$; dans le premier cas, on peut parler de pente, celle de y en fonction de x; dans le second on convient que la pente est infinie.

Critère.

Un critère attaché à une *propriété*¶ est fondamentalement une condition suffisante. Cependant on parle de critère, ou de critère pratique, pour une condition relativement aisée à vérifier. On y pensera donc chaque fois qu'on aura la propriété à établir.

Par exemple, on pourra énoncer ceci à propos des séries.

Proposition (critère d'Alembert). Soit (u_n) une série à termes strictement positifs. Si le rapport u_n/u_{n+1} a une limite $l < 1$, la série est convergente.

D'abord on ne peut rien conclure si le critère ne s'applique pas. Ensuite c'est un critère parmi d'autres, pas toujours le plus judicieux.

Autrement dit, l'utilisation d'un critère est assortie de deux limitations. D'une part y recourir n'est pas une garantie de succès; d'autre part rien n'oblige à en passer par là. Un critère ouvre une faculté pour l'action; ce n'est pas un principe incontournable d'action.

[25] La pente d'une route ou d'un toit est une pente fonctionnelle.

De façon générale, toute *caractérisation*¶, à savoir toute condition nécessaire et suffisante, peut être éventuellement transformée en critère. Dans ce cas on ne retiendra que la partie suffisante de la condition. Voici un exemple. Quand on écrit

"un parallélogramme est un rectangle si et seulement s'il possède un angle droit",

on pense à la caractérisation. Quand on écrit en revanche

"un parallélogramme est un rectangle dès qu'il possède un angle droit",

on ne retient que ce qui en fera un éventuel critère.

Pour une caractérisation la première limitation saute. Il reviendra au même, sur le plan logique, de considérer la propriété initiale et celle fournie par la caractérisation. En revanche, passer par cette dernière restera une option parmi d'autres.

Avant l'entrée à l'université, pratiquement tous les critères rencontrés sont des caractérisations. Il en est ainsi des critères de divisibilité : un nombre écrit dans le système décimal est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5; c'est à la fois nécessaire et suffisant.

Un tel critère est, par ailleurs, éminemment pratique. Pour autant, on ne l'utilisera pas pour montrer que $6^{128} - 1$ est divisible par 5.

Déduire.

Le verbe *déduire* vient du latin *deducere*; il s'agit, au sens primitif, de faire descendre; par extension, c'est tirer de quelque chose.

En mathématiques on déduit une propriété, égalité ou inégalité par exemple, d'une autre ou d'autres au moyen d'arguments logiques.

En principe, écrire une démonstration consiste à déduire ce qu'on écrit à chaque étape d'une partie de ce qui a été écrit précédemment. Aussi n'a-t-on pas besoin de le préciser en permanence. Lorsque on écrit

"on en déduit ...",

c'est pour indiquer que ce qu'on affirme se déduit principalement de ce qui a été affirmé juste avant.

Cela n'interdit pas d'annoncer à l'avance ce qu'on veut obtenir, bien entendu. Autrement dit, l'ordre logique doit être respecté dans l'esprit et non pas à la lettre.

Définition.

Le verbe *définir* est d'origine latine. Il est formé sur le verbe *finire* qui signifie d'abord *borner* et, par extension, *préciser*, *achever*. Définir est ainsi délimiter.

C'est ce sens originel qu'on trouve en mathématiques. Définir un objet consiste à le cerner de façon précise, en essence ou en existence.

Par exemple on définit en existence l'injection *canonique*¶ d'une partie dans un ensemble; on définit en essence les sous-groupes d'un groupe.

Une définition n'est pas l'énoncé d'une équivalence logique. Elle comprend toujours un "défini" et sa "définition" proprement dite. Il convient de faire clairement apparaître le statut particulier de ce genre d'énoncé et la dissymétrie qu'il comporte.

En quelque sorte une définition mathématique est une abréviation. La compréhension d'un texte mathématique suppose le remplacement mental du défini par sa définition.

Voici quelques exemples, auxquels on pourra apporter toutes les variations stylistiques imaginables.

Définition. Deux droites du plan sont *dites* parallèles si elles n'ont aucun point commun.

Définition. Deux droites du plan qui n'ont aucun point commun sont *dites* parallèles.

Définition. On *appelle* parallèles deux droites du plan qui n'ont aucun point commun.

On dira par exemple ceci, en définition.

Un triangle est dit isocèle s'il possède deux côtés égaux.

Il serait malvenu de remplacer "si" par "si ou seulement si" ou bien "un" par "tout" dans ce qui précède. De même la présence du verbe "dire" est-elle utile. Tout cela contribue à affirmer le statut de définition. [26].

Démonstratif (discours).

Nous expliquons à l'entrée correspondante jusqu'où il convient d'aller dans la *démonstration*¶. Cependant nous n'y précisons pas en quoi consiste la démonstration en elle-même, de quoi est composé le discours démonstratif. Paradoxalement l'idée qu'on doit se faire d'une démonstration est stabilisée depuis longtemps dans le monde de la Science et il n'est cependant pas sûr que les choses soient parfaitement claires dans l'enseignement d'aujourd'hui.

La démonstration se caractérise par l'enchaînement logique de ses composants. Elle commence dès lors que s'y trouve au moins une étape. Il n'est ainsi pas possible de prétendre démontrer quoi que ce soit par la simple application d'un résultat comme on en trouve dans les boîtes à outils à la mode au collège. Si l'on dispose d'un énoncé affirmant que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, si l'on donne deux droites D, D' parallèles à une droite D'' et si l'on demande de montrer que D, D' sont parallèles, on peut juste répondre que "c'est dans la boîte". En revanche, quand on écrit

"Les côtés AB et AC étant égaux, le triangle ABC est isocèle en A. Par suite les angles en B et C sont égaux",

on tient une toute petite démonstration.

Déjà les *Eléments* d'Euclide nous offrent de parfaits exemples de ce qu'est une démonstration; ils sont juste très élaborés, voire trop pour servir de modèles à l'enseignement du collège, du lycée ou des premières années universitaires. Une version simplifiée se trouvait dans les démonstrations géométriques du lycée d'avant 1970 ou dans ce qu'on demandait à un candidat au baccalauréat de l'époque.

[26] On n'emploiera pas le verbe "dire" à l'école élémentaire. C'est justifié, mais il faudrait aussi éviter le mot "définition" pour ce qui est surtout une "description". Les deux vont absolument de pair.

La pratique démonstrative n'a pas fondamentalement changé depuis. On note surtout une intégration de plus en plus grande du calcul algébrique dans le discours, calcul qui inclut aujourd'hui maint diagramme. Le symbolisme s'est donc développé et le discours littéraire s'est contracté, mais ce n'est jamais qu'un réglage dans les paramètres.

Les démonstrations qu'on rencontre actuellement au niveau le plus élevé ne comprennent plus leur part d'implicite, d'heuristique comme jadis. Cependant elles ne sont ni plus ni moins solides. Le souci, moderne, d'évacuer tout implicite a conduit Bourbaki à fonder ses propres *Eléments* sur un chapitre de mathématique formelle. On trouvera quelques indications sur le sujet à propos de la question de la *vérité*¶ en mathématiques. Par ailleurs, avec les machines, sont apparus le thème de la démonstration automatique et celui des langages d'intelligence articielle. Cependant il ne faudrait surtout pas opposer cette modernité à la démonstration ancestrale. La première rend hommage à la seconde, dont elle légitime la démarche en la codifiant.

Ainsi ne faut-il surtout pas chercher à innover en quoi que ce soit dans le discours démonstratif, inventer des présentations telles qu'organigrammes ou tableaux pour remplacer la narration usuelle.

Occupons-nous maintenant de la façon dont on présente une démonstration. Nous venons de dire que c'était un enchaînement logique. Cela ne signifie pas que le discours doive nécessairement respecter l'ordre logique à la lettre et dans le détail.

Il y a une situation pour laquelle la question de l'ordre ne se pose pas; c'est celui de la géométrie élémentaire traditionnelle, celle qui n'a plus guère de place au collège et au lycée. On part des propriétés fournies par l'énoncé et on en ajoute, pas à pas, de nouvelles. On procède toujours dans l'ordre.

Dans d'autres situations, il faut se souvenir que l'étape ultime de la démonstration est le calcul. Remplacer un raisonnement pâteux par un calcul clair est le signe même du progrès. C'est pourquoi la progression des mathématiques va dans le sens de l'algébrisation, notamment celle de l'analyse. Or le calcul a ceci de particulier qu'on écrit en général ce qu'on va obtenir avant d'expliquer pourquoi on le peut. Cette façon d'opérer est conforme au cheminement de la pensée. On dit ce qu'on veut faire et on explique ensuite comment on va le faire. C'est d'autant plus vrai que le niveau s'élève : quand on parle d'une suite exacte, par exemple, on commence par l'écrire avant d'en préciser les composants et de justifier son exactitude.

Cependant, à tous les niveaux, dès lors que le calcul a besoin d'explications, aussi bien l'auteur que le lecteur trouvent avantage à la stratégie ici décrite. On fixe, par avance, un cadre à la réflexion; surtout on comprend pourquoi on est amené à régler un certain nombre de points. L'auteur, qui a en tête les grandes lignes de sa stratégie, peut s'exprimer sans forcer sa nature. Le lecteur se voit offrir la place de l'auteur, qui lui a confié toutes les clefs.

Cette façon de travailler s'oppose à une autre, peut-être plus répandue. Une démonstration est une suite ordonnée d'assertions, pour laquelle le passage de l'une à l'autre nécessite un effort limité de raisonnement. Il semblerait qu'on privilégie cette stratégie dans les premiers niveaux. Pourtant on la trouve aussi dans des textes savants; on peut y lire, sans caricaturer, des phrases débitant comme suit.

D'après (3.1.2.4) et (5.1.3.2), on a ...

Dans cet exemple extrême, l'auteur a dû faire très attention de disposer à l'avance de tout ce dont il avait besoin et pris soin de le marquer soigneusement. Le lecteur, de son côté, doit aller chercher l'information et essayer de comprendre pourquoi on peut en déduire ce qui est annoncé.

Surtout le lecteur pourra parfois se demander pourquoi on a établi tel point mineur. C'est la stratégie du fridigaire : on met de l'information en réserve. Les problèmes de concours sont presque toujours bâtis suivant ce principe. On fait démontrer, dans des questions préliminaires, tout un tas de petits résultats. Ensuite la principale difficulté est de s'en souvenir.

Démonstration (usage de la).

Dans un texte mathématique, tout doit être démontré ou alors renvoyer à un endroit où la démonstration figure. Evidemment, si plusieurs situations sont voisines, on pourra se limiter à en traiter une. De même, si un cas particulier est suffisamment révélateur et épargne des complications secondaires, on pourra s'en contenter. Eventuellement, si l'on ne peut fournir qu'une démonstration non formalisée — il y a beaucoup de latitude dans ce qu'on doit pouvoir se permettre — on s'en satisfera. A un niveau universitaire déjà avancé, on peut accepter le renvoi à un autre corpus pour une démonstration ou une construction. Cependant il faut être clair là-dessus.

Quelque forme que la démonstration prenne, elle aura pour fonction de persuader l'auditeur. Emporter sa conviction s'oppose ici au recours à toute forme d'argument d'autorité. C'est une exigence de rationalité qui honore la Science.

Evidemment rien n'interdit de dire que l'élève ou l'étudiant trouvera, plus tard dans son cursus, une démonstration plus convaincante, plus propre.

En revanche admettre purement et simplement un résultat, pour fonder une part importante du discours, n'est absolument pas défendable. Si, de surcroît, sa démonstration était accessible au niveau où l'on se place, ce serait aberrant. Quant à fonder la démonstration sur un autre énoncé qui n'en est qu'une variante, ce se serait parfaitement ridicule[27].

En principe, au collège ou au lycée, on ne trouve pas de cercle vicieux caractérisé. Le très petit nombre de démonstrations assumées présente au moins l'avantage de nous en protéger. Maintenant prétendre déduire du théorème général des valeurs intermédiaires le fait, pour une application continue strictement croissante sur un segment, de définir une bijection sur son image, est un exemple de l'utilisation d'une variante.

Une forme plus subtile d'escroquerie consiste à donner une présentation axiomatique et d'indiquer un exemple, sur lequel on s'appuiera et qui n'aura pas été vu auparavant[28].

L'abus consistant à admettre des résultats en grand nombre est d'autant moins défendable qu'une démonstration rigoureuse serait bien souvent non pertinente au

[27] Comme d'établir la connexité d'un intervalle à partir du théorème des valeurs intermédiaires.

[28] Comme lorsqu'on cite en exemple la mesure de Lebesgue, alors qu'elle n'aura jamais été construite, et que l'on embraye sur les densités de probabilité.

niveau où l'on se place. Le bénéfice attendu, qui est celui d'un discours formellement irréprochable à défaut d'être tout simplement fondé, est en réalité illusoire.

Par exemple, *au collège*, on n'aurait pas l'idée d'admettre l'existence d'une racine carrée pour un nombre positif. La demande de justification n'existe pas. On sait que 121 en possède, que $1,21$ en possède également; on ne demandera de racine carrée que dans des cas où l'on peut la trouver. Qu'il y ait des carrés de surface absolument quelconque paraît parfaitement évident par ailleurs; une construction géométrique le donnerait en cas de besoin. Surtout, n'ayant pas donné de définition précise de ce qu'est un nombre réel, l'énoncé d'existence n'a pas de sens; on aurait du mal à l'établir. En revanche, plus tard, le jour où l'on saura ce qu'est précisément un nombre réel, capituler devant la démonstration serait infâmant.

Au lycée, le programme demande d'admettre que toute suite croissante majorée de nombres réels admet une limite. Or on peut donner de cet énoncé une démonstration d'une rigueur adaptée à la situation. Un nombre réel sera considéré comme un développement décimal illimité, l'ambiguïté des suites terminales de 9 ayant été levée. Il est facile d'expliquer, heuristiquement, comment obtenir les décimales successives d'un nombre réel qui sera la limite.

Voici comment on s'y prend, pour une suite (u_n) croissante et majorée, donnée. On commence par considérer le plus petit majorant entier; ce sera par exemple 3. On commencera alors par écrire

$$2, \ldots$$

Ensuite, parmi les multiples de 0,1 entre 2 et 3, on considère de nouveau le plus petit majorant; ce sera par exemple 2,7. On complètera alors

$$2,6\ldots$$

De proche en proche on fait apparaître un développement décimal qui construit le nombre l. Il reste à en préciser les propriétés. Là on ira plus ou moins loin en fonction des objectifs. Par exemple, on notera qu'étant donnée une troncature de l, comme 2,6348, la construction met en évidence un rang à partir duquel u_n est compris entre 2,6348 et 2,6349. etc.

Dans la foulée de ce qu'on vient de dire, on peut encore expliquer, sans insister, comment construire les opérations sur les nombres réels.

Il y a, dans le corpus enseigné au lycée, un énoncé important, celui appelé en France "théorème des accroissements finis" et à l'étranger "théorème fondamental de l'Analyse". On a au moins besoin d'en connaître la version suivante : si la dérivée f' est positive ou nulle sur un intervalle, alors la fonction f y est croissante.

Cependant la dérivée n'ayant pas reçu de véritable définition dans le programme de première, cela n'aurait pas de sens d'en faire un résultat admis. Pour autant il est très important de faire comprendre aux élèves qu'il y a une propriété importante qu'il faudra mettre au clair un jour : en définissant rigoureusement une limite et en établissant quelque chose de non évident, le passage d'une propriété sur des accroissements "infinitésimaux" à une propriété sur des accroissements ordinaires, dits "finis" par opposition.

Faute d'une définition en règle, la dérivée est une vitesse. Et la propriété dit qu'avec une vitesse positive on ne peut qu'avancer. On peut s'exprimer ainsi. On comprendra probablement qu'une version plus mathématique est attendue pour plus tard.

Maintenant la dérivée est aussi une pente géométrique. Etablir la formule des accroissements finis, en faisant descendre parallèlement une droite de pente égale à la pente moyenne jusqu'à toucher la courbe, est acceptable. Plus tard un argument de compacité justifierait la méthode.

Au lycée toujours, la fonction exponentielle est définie à partir de l'équation différentielle, un théorème d'existence étant alors admis. Les remarques précédentes s'appliquent, puisque la dérivée n'a pas eu de définition précise. En fait l'énoncé est établi, même si c'est de façon maladroite et surtout plus troublante qu'utile, en invoquant l'approximation d'Euler. Et, pour le physicien, l'existence va de soi. Avec la définition du logarithme comme intégrale, on s'appuyait sur le concept intuitif de l'aire. Avec la comparaison d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique, on opérait un principe intuitif de prolongement.

En général, on énonce d'abord et on démontre ensuite. Il n'est pas indispensable de faire apparaître le mot "démonstration" en début de ligne. Cependant il doit être clair que l'on va démontrer. Glisser "en effet" est une possibilité parmi d'autres.

Cependant on peut aussi développer et énoncer ensuite. Dans ce cas, on pourra introduire l'énoncé par "en conclusion". Ou encore, par exemple, ce qui suit.

Ainsi avons-nous établi l'énoncé suivant.

On peut donc énoncer le théorème final : ... [29]

Cela étant, il est souhaitable de ne pas remplacer le mot "démonstration" par celui de "preuve". L'utilisation du mot "preuve" dans ce sens relève de l'anglicisme. En français, on le réserve à certaines vérifications particulières : la "preuve par 9", la "preuve d'un algorithme".

Désigner.

Le verbe *désigner*, d'origine latine, signifie au départ *marquer d'un signe*; par extension c'est représenter, dessiner.

En mathématiques, désigner consiste à représenter par un symbole, comme A pour un point, AB pour un segment etc.

Dessin.

Les logiciels de traitement de texte, notamment le remarquable programme TEX de Donald Knuth, ont rendu accessible au premier venu ce qui était jadis réservé aux ateliers de composition.

Malheureusement, s'il est aujourd'hui facile d'aligner des lignes de texte avec des formules à profusion, il reste toujours malaisé de produire des dessins. De même que la mode des figures à réaliser soit même à disparu en géométrie, de même le tracé d'un croquis suggestif a été abandonné en analyse.

[29] C. Lebossé et C. Hemery, Algèbre, classe de seconde, 1947.

Or bien des discours touffus gagneraient à être accompagnés par un petit croquis, de façon à laisser au lecteur une image mentale claire. Bien sûr cela n'interdit pas de s'exprimer simplement, d'une façon immédiatement compréhensible.

A l'université, il arrive de considérer une fonction périodique continue qui est continûment dérivable sur les segments d'une subdivision de sa période, autrement dit dont la pente peut avoir des sauts. Sa série de Fourier est normalement sommable.

A l'université encore, accompagner la formule des accroissements finis d'une fonction réelle, qui s'écrit

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \ ,$$

par un petit dessin faisant apparaître le point où la dérivée est égale à la pente moyenne, ne peut pas nuire.

Lorsqu'une explication est de nature géométrique, la présence d'une petite figure est presque toujours bienvenue. Or les appels à la géométrie sont plus fréquents qu'on ne le pense parfois.

Au lycée, pour établir l'égalité

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \ ,$$

plutôt que de calculer les parties réelle et imaginaire et de reconnaître un cosinus et un sinus, il vaut bien mieux produire un petit croquis, avec, en commentaire, l'indication que les points $0, 1, 1 + i, i$ forment un carré.

Evidemment, à l'université, on pourra se passer d'explication. Mais, au lycée, croire que le passage par les lignes trigonométriques est plus rigoureux serait oublier que ces dernières ont été obtenues en calculant la diagonale du carré.

Déterminer.

Le verbe *déterminer* est construit comme le verbe *définir*; il est tiré du verbe latin *terminare*, qui a à peu près le même sens que *finire* ; c'est limiter, régler, fixer.

En mathématiques il s'agit toujours de cerner de façon précise un objet. On dira ainsi ce qui suit.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle ...

Deux à deux, entre eux. Voir *précisions.*

Egalité.

Commençons, pour une fois, par nous placer au niveau le plus élevé. Le sens qu'on donne à l'égalité est très simple : deux objets sont égaux s'ils ne sont qu'un seul et même objet.

Plus précisément, la théorie des ensembles gouverne les usages savants. Dans cette dernière, tous les objets sont des ensembles. Or, l'axiome d'extensionnalité dit que deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

Jusqu'ici tout semble clair. En réalité, ce n'est pas tout à fait le cas, dès lors que de multiples identifications et abus de langage ont été introduits, sans lesquels la pratique des mathématiques serait impossible. Par exemple, il ne doit faire aucun doute pour personne que

$$0,99999\cdots = 1 \ .$$

Or il n'est absolument pas évident de décider quels sont ici ces ensembles qui sont égaux parce qu'ils ont les mêmes éléments; d'autant moins que cela dépend de la manière selon laquelle on a construit le corps des nombres réels. Or, quelle que soit la façon dont ce corps aura été construit, l'égalité aura pourtant bien lieu.

Avant le niveau universitaire, *au collège* et *au début du lycée* notamment, ce n'est pas par la théorie des ensembles qu'il faut envisager l'égalité des figures en géométrie. Déjà on ne sait pas ce qu'est une figure. Ensuite les termes utilisés en géométrie sont polysémiques. Autant considérer que le sens de l'égalité est précisé à chaque occasion.

Il serait judicieux d'en revenir aux traditions de notre enseignement. Ainsi dira-t-on que *deux figures sont égales si elles sont superposables*. En particulier *deux segments sont égaux* s'ils ont même longueur. Qui contesterait le droit de dire qu'un triangle équilatéral a trois côtés égaux ou qu'un rectangle a des côtés opposés égaux?

En revanche deux segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sont dits *confondus* s'ils sont déjà superposés. S'il s'agit de segments non orientés, cela signifie que $a = c, b = d$ ou que $a = d, b = c$.

C'est ainsi qu'il faut comprendre l'égalité des triangles. Ce n'est d'ailleurs pas la définition d'Euclide, pour qui l'égalité est celle des surfaces.

Parler, à ce sujet, d'isométrie n'est pas satisfaisant. Deux figures sont dites *isométriques* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation du groupe des isométries, groupe des applications affines dont l'application linéaire associée est orthogonale. Pour un triangle, c'est équivalent à l'égalité des côtés homologues[30]. Mais pour un quadrilatère? Certainement pas l'égalité des quatre côtés homologues. Celle de toutes les distances entre sommets (des côtés et des diagonales)? Oui, mais c'est un théorème.

Maintenant une autre question concerne l'emploi du signe "=" d'égalité dans le discours mathématique.

A l'école élémentaire, le signe est utilisé pour écrire le résultat d'un calcul. Par exemple :

$$3 \times 4,1 = 12,3 \ .$$

Cet usage perdure par le suite.

On notera qu'on peut déjà, à ce stade, enchaîner $3 \times 4 \times 2 = 12 \times 2 = 24$. En revanche, il ne faut surtout pas en enchaîner un résultat avec un autre calcul, comme on le fait avec une calculatrice basique.

Cependant il s'ajoute d'autres utilisations. L'égalité, en plus d'être transitive, devient une relation symétrique, qui peut donc se lire dans les deux sens. Ecrire une égalité veut dire qu'on a écrit une relation vraie. Il faut rattacher à cela l'utilisation du signe d'égalité dans une *équation*¶.

En même temps ou un peu plus tard, on réintroduit une dissymétrie en utilisant le signe d'égalité pour nommer un objet. On s'exprimera par exemple comme suit.

[30] Ce qui est déjà moins facile à exprimer.

Posons $\alpha = m - 1/m$.

Cet usage est à rapprocher de l'instruction d'affectation en algorithmique. Pour cette raison, certains utilisent le symbole := du langage Pascal. Ce n'est pas conseillé à l'écrit.

On notera qu'en mathématiques, on peut aussi exceptionnellement nommer un objet “à l'envers”, comme dans ce qui suit.

Le paramètre k étant négatif, posons $k = -\omega^2$ où ω est positif.

Enchaînement (d'égalités et inégalités).

Par dérogation au principe suivant lequel l'égalité et l'ordre sont des relations binaires, il est permis d'enchaîner de telles relations en mathématiques, soit sur une même ligne, soit sur plusieurs alignements.

On écrira par exemple

$$A = B = C$$

ou

$$\begin{aligned} A &= B \\ &= C\ . \end{aligned}$$

Dans les deux cas on pourra en tirer les trois égalités $A = B$, $B = C$ et $C = A$, mais la signification des deux présentations diffère légèrement. La première se comprend

$$A = B \text{ et } \ B = C, \quad \text{donc} \ \ A = C\ ;$$

en revanche la seconde se comprend

$$\begin{aligned} & A = B \\ \text{d'où} \quad & A = C \\ \text{car} \quad & B = C\ . \end{aligned}$$

On peut mêler les deux présentations. Voici un exemple, dont on ne retiendra que le format[31].

$$\begin{aligned} f([ac], b) + f(a, [bc]) &= \mathrm{tr}([ac]^R b^R + a^R [bc]^R) \\ &= \mathrm{tr}([a^R c^R] b^R + a^R [b^R c^R]) \\ &= \mathrm{tr}[a^R b^R, c^R] = 0\ . \end{aligned}$$

Dans le cas des inégalités, il est impératif de n'associer que des inégalités *allant dans le même sens*.

Si l'on ne considère que des inégalités larges, donc uniquement la relation $\leq$ par exemple, tout ce qu'on a dit pour les égalités reste vrai. Dans le cas des alignements il est cependant souhaitable de prévenir le lecteur par une phrase du genre suivant.

On établit successivement les majorations qui viennent.

[31] Nathan Jacobson, Lie Algebras.

En revanche insérer trop librement des inégalités larges ou strictes et des égalités n'est pas conseillé. On peut se permettre l'enchaînement, mais il faut avoir conscience des difficultés que cela comporte. on écrira par exemple

$$A = B \leq C < D \leq E$$

ou

$$\begin{aligned} A &= B \\ &\leq C \\ &< D \\ &< E \; . \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on indique au lecteur la relation qui existe entre deux termes consécutifs. Il faut alors lui indiquer aussi ce qu'on peut en tirer, à savoir ici

$$A < E \quad \text{ou} \quad A \leq E$$

suivant que l'on veuille tirer ou non le maximum d'information du travail accompli.

Dans le second cas, on indique au lecteur le résultat obtenu en cumulant l'inégalité de la ligne précédente avec une comparaison dont on ne lui précise pas la teneur. Noter que, dans ce dernier cas, les relations qui apparaissent sont d'abord des égalités, puis des inégalités larges, puis des inégalités strictes, chaque catégorie pouvant être présente ou non. Ajoutons que faire figurer des inégalités strictes n'est utile qu'en cas de besoin véritable.

Bref, il ne faut pas abuser de ces enchaînements. Voici, malgré tout, un exemple sans problème[32].

$$\sup_{m \in M} |\hat{f}(m)| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|f^n\|^{1/n} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \|f^n\|^{1/n} \leq \sup_{z \in \sigma(f)} |z| = \sup_{m \in M} |\hat{f}(m)| \; .$$

C'est une stratégie qu'on utilise souvent pour établir l'égalité de plusieurs valeurs d'un seul coup.

Voici un principe qui s'applique à un enchaînement d'inégalités, mais qu'on peut étendre à d'autres relations. Un bon enchaînement est celui dans lequel effacer un intermédiaire (comme $\leq C$ dans le modèle générique ci-dessus) ne produit pas d'écriture incongrue. En particulier la lecture des deux extrêmes donnera une relation valide. Le seul écueil est une éventuelle perte d'information (comme l'inégalité stricte dans notre modèle).

Dans le cas des égalités et inégalités de même sens, cela revient à dire que l'on commence par les égalités. Notre modèle générique remplit la condition indiquée. Ce n'est pas exactement le cas de l'exemple donné ensuite, puisqu'il se termine par une égalité. Cependant cette égalité doit être comprise comme une simple réécriture. Elle n'entre pas réellement en compte.

Voici, pour conclure, un exemple d'enchaînement qui concerne d'autres relations qu'égalités et inégalités. On n'a pas cherché la pertinence, se contentant de montrer le format.

[32] Lars Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.

$$x^2 - \cos x = x^2\big(1 - \frac{\cos x}{x}\big) = x^2(1 + o(1)) \sim x^2 = O(x^2)\ .$$

La condition indiquée est ici respectée. Les relations successives sont, en effet, de moins en moins précises. Aucune incongruité ne peut donc en être tirée par inadvertance.

Rappelons, en revanche, que les relations logiques sont exclues de notre propos. En effet, on peut en modifier le sens par parenthésage. Voir ce qu'on dit à propos des *connecteurs*¶ logiques.

Enoncés.

Il existe plusieurs termes pour énoncer, qui permettent à la fois personnalisation et hiérarchisation. Ce sont essentiellement les suivants.

Proposition.
Théorème.
Lemme.
Corollaire.

D'abord la proposition est la bonne à tout faire. C'est l'équivalent du *Satz* allemand. La proposition, dans son sens étymologique qu'on trouve en latin, est ce qu'on place devant les yeux; son homologue allemand est ce que l'on pose[33].

Ensuite le théorème est à réserver aux énoncés importants. Conformément à l'étymologie grecque — qui prend un omega — c'est ce que l'on donne à contempler.

Le lemme est un énoncé intermédiaire, servant à la démonstration d'une proposition ou d'un théorème et présentant un intérêt mineur par lui-même.

Enfin le corollaire est une proposition qu'on déduit d'une autre et qui peut présenter éventuellement davantage d'intérêt que cette dernière. C'est ce qui vient avec.

On peut jumeler un énoncé et une définition. Cela donne la présentation suivante. Dans un tel cas, en principe l'énoncé est un théorème; il faut qu'il soit suffisamment remarquable pour être assorti d'une définition.

Théorème et définition. Soit E un ... Les propriétés qui suivent sont équivalentes.
(i) ...
(ii) ...
(iii) ...
Si E vérifie l'une quelconque (ou l'ensemble) des propriétés ci-dessus, on dit qu'il est ...

Il faut éviter de multiplier les énoncés. On ne s'en tirera pas en les groupant artificiellement. Il faut savoir choisir ce qu'on veut mettre en valeur et "faire apprendre".

Par ailleurs le contenu d'un texte mathématique ne se limite pas à des définitions, des énoncés et des démonstrations. Certaines méthodes s'expliquent mieux sur un exemple que par l'énoncé d'un théorème. Le calcul d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide en est un exemple.

[33] En russe, le mot équivalent ne semble pas employé.

Il faut se prémunir contre une "dictature de l'énoncé" qui transformerait les mathématiques en une forme de catéchisme. Pour autant il faut veiller à conférer aux énoncés un caractère "percutant".

A cette fin on ne laissera pas dans un énoncé de notation parasitaire. Par exemple, on peut dire ceci.

Une fonction continue sur un segment non vide atteint ses bornes.

Il est inutile et même contre-productif d'appeler f la fonction, $[a, b]$ le segment ou m, M les bornes.

Cette exigence de concision et de sobriété n'interdit par pour autant de donner différentes présentations d'un même énoncé. A titre d'exemple on peut énoncer le théorème de Pythagore comme suit.

Le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. Cependant il est parfaitement judicieux d'y adjoindre un petit dessin avec la relation

$$c^2 = a^2 + b^2 \ .$$

Les énoncés peuvent être assortis de *commentaires* et d'exemples. Lorsqu'on veut donner à ces derniers une visibilité particulière, on parle parfois de *scholie*, mot grec qui désignait au départ une chanson de table.

À un niveau déjà plus élevé, les énoncés peuvent être composés d'*assertions* , comme dans l'exemple suivant[34].

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
(i) Si u_1, u_2 sont des applications affines de E dans E, on a $\det(u_1 u_2) = (\det u_1)(\det u_2)$.
(ii) Soit u une application affine. Pour que u soit inversible, il faut et il suffit que $\det u \neq 0$.
(iii) Si u est inversible, on a $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

Notons, pour finir, qu'il est indiqué qu'un énoncé soit introduit. On le fera notamment si c'est pour conclure une *démonstration*¶. Cependant il faut toujours écrire, à cet effet, une phrase complète, terminée par un point pour être clair.

Nous pouvons alors (commençons par) énoncer le résultat suivant.
Théorème. ...

Ensembles (théorie des).

La théorie des ensembles apporte à l'écriture mathématique une précision incontestable[35]. Il n'est pas étonnant que le vocabulaire de cette théorie ait fait intrusion dans l'enseignement de tous les niveaux, mais la légitimité de son adoption reste à démontrer. Elle se limite essentiellement à l'emploi de termes dont le sens ne sera pas nécessairement maîtrisé et dont les contraintes d'utilisation seront laissées dans le vague.

[34] Jacques Dixmier, cours de mathématiques du premier cycle, première année, p195

[35] "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können", disait, en substance, David Hilbert.

Par ailleurs l'usage de la théorie des ensembles peut entraîner une complexité dont on se passerait volontiers. C'est notamment le cas en géométrie classique. Pour cette raison, on peut raisonnablement défendre l'idée que la théorie doit être renvoyée à l'université, pour y être alors enseignée sans compromis. Pour illustrer notre propos, nous prenons l'exemple de la définition du *cercle*.

Voici l'ancienne version, qui reste la meilleure pour le lycée.

Le cercle est la figure plane constituée par tous les points situés à une même distance donnée, appelée rayon, d'un point donné, appelé centre[36].

Les points ainsi mentionnés sont les *points du cercle* proprement dits, encore appelés points situés *sur* le cercle.

Ici il n'y a pas un ensemble mais une figure[37]; les points du cercle y sont accrochés comme des hirondelles sur un fil; et le centre aussi bien que le rayon font partie de la figure.

Jadis, au lycée, on parlait de *lieu* et non d'ensemble; la formule était évocatrice et elle n'était pas soumise aux mêmes rigidités théoriques. Cependant elle faisait surtout référence à tout un corpus de problèmes. Ce sont ces problèmes qu'il faudrait d'abord réhabiliter. On se souviendra que lorsqu'on a remplacé "lieu" par "ensemble" dans ces derniers, cela a conduit à quelques expressions ridicules comme : "trouver l'ensemble de M".

Voici maintenant une définition strictement ensembliste, inspirée d'un cours sur les espaces normés ou métriques.

Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan euclidien dont la distance à O est R.

Un cercle sera alors un ensemble pour lequel on peut trouver O et R tels que ce soit le cercle de centre O et de rayon R. Jusqu'ici le cercle n'a pas de centre. Pour parler du centre d'un cercle il faut que la donnée des points du cercle permette d'obtenir sans ambiguité ce centre; exercice facile en géométrie euclidienne plane, mais qu'on n'avait pas à traiter, autrement que pour son intérêt, avec la figure du cercle.

Les deux points de vue ont leur place. Et aucun ne correspond d'ailleurs au point de vue "savant" sur le sujet[38].

Compte tenu de ce qui précède, il est de bon ton de mettre la pédale douce sur ce qui relève trop explicitement de la théorie des ensembles. Par exemple, pour conclure la résolution d'une équation, on pourra bien sûr écrire ceci.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{1, 2\}$.

Cependant il est encore préférable d'écrire cela.

L'équation admet admet exactement 1 et 2 (ou $x = 1$ et $x = 2$) comme solutions.

L'adverbe *exactement* est souvent utilisé, en mathématiques, dans le sens qu'il doit avoir ici : les valeurs 1 et 2 sont des solutions et ce sont les seules. Il faut mesurer

[36] A l'école élémentaire ce serait la figure tracée par un compas dont l'écartement est réglé sur le rayon et la pointe placée au centre.

[37] On peut toujours placer une description ensembliste, mais on ne veut pas rigidifier les choses. Un rectangle est-il quatre points, quatre segments, un corps convexe? Cela dépend.

[38] Le cercle serait plutôt une variété algébrique.

l'implicite de formulation ensembliste : la définition de l'égalité entre ensembles, donc le sens précis de la relation d'appartenance, la définition d'un ensemble en extension, pour laquelle la notation n'est d'ailleurs pas bien codifiée etc. Le gain de précision n'est-il pas illusoire? Ne risque-t-on pas de détourner l'attention sur l'écriture de la formule alors qu'elle doit se porter sur le sens?

C'est encore plus frappant dans le cas d'un système. Voir l'entrée *équation*¶.

La théorie des ensembles ne permet pas l'à-peu-près, et c'est parfois un handicap. Par exemple si A est le point d'intersection des droites D et D', on ne pourra pas le confondre avec l'intersection $D \cap D'$ de ces droites, lequel est l'ensemble $\{A\}$ réduit à A, alors que le discours le suggère fortement.

Equation, équation différentielle.

Le mot "équation" a deux usages en mathématiques, un usage particulier et un usage général.

L'usage particulier est en relation avec la géométrie. On parle de l'équation d'une droite, d'une courbe dans des coordonnées, qu'on qualifie souvent de *cartésienne*. Pour une courbe ou une surface, on distingue la ou les équations *implicites*, comme $f(x, y) = 0$, et la ou les équations *paramétriques*, comme $x = f(t)$, $y = g(t)$.

Rappelons, par exemple, qu'un repère du plan étant choisi, on appelle équation cartésienne d'une droite, une relation du type

$$ax + by + c = 0$$

où a, b ne sont pas tous deux nuls, laquelle caractérise par leurs coordonnées les points de la droite.

Venons-en à l'usage général, qui dérive du mot latin *aequatio*, qui signifie très précisément "égalisation"; il s'agit de réaliser une égalité par le choix convenable d'une inconnue (ou de plusieurs).

Cela étant, on ne définit pas, en mathématiques, le terme "équation". En revanche on précise éventuellement, au cas par cas, ce que veut dire résoudre une équation d'un type donné.

Par exemple, on résout l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

sur un intervalle I, en déterminant les fonctions dérivables $x = x(t)$ définies sur I qui vérifient la relation ci-dessus.

On notera qu'on parle de solutions sur un intervalle I. Même lorsque f est polynomiale en x et t, une équation différentielle n'a pas toujours de solution sur $\mathbf{R}$.

Pour ce qui est des équations ordinaires, il y a une difficulté dans la façon de présenter les solutions d'une équation en admettant plusieurs. En effet, on dira que x est solution de l'équation

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

si $x = 1$ *ou* si $x = 2$ et que les solutions sont alors $x = 1$ *et* $x = 2$.

Un observateur peu attentif pourrait y voir un échange malencontreux de connecteurs logiques. Or c'est le bon usage de la langue qui l'impose.

La réunion $A \cup B$ des ensembles A, B est l'ensemble des x tels que $x \in A$ *ou* $x \in B$; dans le langage probabiliste, c'est l'événement "A ou B". Cependant la réunion s'obtient en ajoutant les éléments de A *et* ceux de B (qui ne sont pas déjà dans A); la réunion est une addition et l'addition se traduit par "et" dans la langue.

Plus prosaïquement, avoir le choix de ceci *ou* de cela est très exactement avoir le choix entre ceci *et* cela. "Je m'en vais *ou* je m'en vas ... L'un *et* l'autre se dit ..." pour citer Vaugelas.

Dans cette affaire, travailler sur les connecteurs logiques ne servirait à rien. Le mieux est sans doute de ne pas passer par l'intermédiaire "$(x = 1)$ *ou* $(x = 2)$", se contentant de collecter les solutions. Sinon, il faut travailler sur le sens des opérations ensemblistes, sans aucune concession; probablement est-ce à l'université qu'il convient de le faire.

Pour les équations différentielles, certains puristes considèrent qu'on ne doit pas faire apparaître la variable, symbolisée par la lettre x ou t par exemple, lorsqu'on résout une équation différentielle; voir à ce sujet l'entrée sur les *fonctions*¶. Ils interdisent encore de nommer y une fonction ou y' sa dérivée. S'ils acceptent bien d'écrire $y' = y$ pour présenter une équation différentielle[39], ils imposent d'utiliser une autre lettre, comme f, g ou même z, pour désigner une solution et choisissent de quantifier en x, à toutes les lignes, des égalités portant sur les valeurs x.

Toutes ces précautions sont ridicules. Déjà l'obligation de ne pas utiliser la lettre figurant dans le libellé de l'équation revient à résoudre une équation telle que

$$4x + 5 = 2x - 7$$

en commençant par remplacer x par y ou autre chose.

Prenons un petit exemple, pour lequel nous allons présenter la résolution d'une manière simple et naturelle, semblable à ce que l'on fait pour les équations algébriques. Soit à résoudre l'équation

$$y' + ky = x^2 \tag{1}$$

connaissant une solution particulière y_0.

Sachant que

$$y_0' + ky_0 = x^2 \ ,$$

on écrit l'équation (1) sous la forme

$$y' - y_0' + ky - ky_0 = 0 \ ,$$

en retranchant membre à membre. Posant $z = y - y_0$, l'équation s'écrit encore

$$z' + kz = 0 \ .$$

[39] Cette précaution est malheureusement inspirée par le livre de maîtrise d'Henri Cartan; elle est alors justifiée par l'obligation de préciser l'intervalle de définition ainsi qu'une valeur initiale; elle n'a pas pour objet de servir de modèle.

Maintenant cette dernière équation se résout en

$$z = Ce^{-kx} \ ,$$

où C est une constante réelle arbitraire. Il en résulte que

$$y = y_0 + Ce^{-kx}$$

est la forme générale de la solution cherchée.

Maintenant, si l'on veut absolument se protéger, il n'est pas offensant de donner un nom à la fonction qui à x associe x^2.

Equivalence logique.

La question de l'utilisation du symbole d'équivalence logique a été discutée à propos des *connecteurs*.

Ici, indépendamment de l'utilisation de tout symbolisme, nous voulons expliquer pourquoi il ne faut pas abuser de la référence explicite à des équivalences logiques.

D'abord il est complètement improductif de voir une équivalence logique là où il n'y a qu'une simple réécriture. On écrira par exemple ceci.

$$\ldots$$

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = a \ ,$$

c'est-à-dire

$$\sin(2x) = a \ .$$

Dans cette situation, il serait ridicule de présenter la transition entre les deux relations comme la traduction d'une équivalence logique[40].

Ensuite, de façon plus essentielle et plus générale, lorsqu'on résout une équation simple comme on le fait pour l'équation du premier degré au collège, il n'est guère utile d'y voir la transformation d'une première équation en des équations logiquement équivalentes. Fondamentalement on travaille toujours sur la même équation, à laquelle on fait sublir des opérations connues comme licites.

Prenons un exemple un tout petit peu plus savant pour montrer que le travail sur les équations peut être plus riche qu'un exercice de pure logique. Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2(z-1)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

dans l'espace $\mathbf{R}^3$. On le transforme aisément en

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2z^2 + 2(z-1)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad ,$$

[40] C'est ce que font, hélas, Lebossé et Hemery ...

soit, en simplifiant la dernière équation, en

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ (2z - 1)^2 = 0 \end{cases} .$$

Logiquement la seconde équation équivaut à $z = 1/2$; on obtient comme solutions les points d'un cercle de ce plan.

Cependant le calcul précédent apporte plus qu'une équivalence logique; il fournit une équivalence géométrique. Le système initial a pour objet de calculer, dans un cas dégénéré, l'intersection d'un cône et d'une sphère. On s'attend a trouver une biquadratique. Ici elle se décompose en un cercle double, intersection d'un cône et d'un plan double.

En réalité, il faut voir dans le passage d'une ligne à une autre le contrôle par un invariant, comme on en trouve en Algorithmique. Ici, si P, Q sont les premiers membres des équations initiales, l'invariant est l'idéal de $\mathbf{R}[x, y, z]$ engendré par P et Q. C'est ce dernier qu'on calcule en montrant qu'il est aussi engendré par $x^2+y^2-z^2$ et $(2z - 1)^2$; mais pas par $x^2 + y^2 - z^2$ et $2z - 1$.

Ici nous n'avons opéré qu'une combinaison linéaire; la droite affine engendrée par P et Q — le pinceau — est déjà un invariant. Dans le cas général, le travail s'apparente à un calcul de PGCD.

On noterait que relier les équations aux ensembles de points est déjà plus réaliste sur le corps des nombres complexes, car on dispose alors du Nullstellensatz[41]. Dans notre exemple, cet énoncé dit qu'un polynôme s'annulant sur le cercle intersection — ensemble des zéros communs — a une puissance dans l'idéal.

Voici le même exemple, en plus simple. On s'intéresse aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et de la droite $y = 2x - 1$. Cette fois le système se ramène à

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases} .$$

Logiquement la seule solution est $x = 1$. Cependant la valeur 1 est, pour la seconde équation, une racine double. La résolution géométrique met en évidence le fait que la droite est tangente à la parabole.

Enfin, nous avons vu qu'il était souvent plus clair de raisonner par implications successives que l'on remonte à posteriori que de raisonner par équivalences. Supposons cependant que l'on s'impose cette dernière option. Ne pas recourir au symbolisme permet, malgré tout, une expression plus souple. Voici un exemple.

Soit à résoudre l'équation

$$\sqrt{2x + 1} = x - 1 .$$

La relation ci-dessus équivaut à la conjonction de $x - 1 \geq 0$ et de

$$2x + 1 = (x - 1)^2 .$$

Cette dernière équation s'écrit encore

$$x^2 - 4x = 0 .$$

[41] Ou théorème des zéros de Hilbert.

Elle admet $x = 0$ et $x = 4$ comme solutions. Parmi ces deux valeurs, seule $x = 4$ satisfait la condition additionnelle qui s'écrit encore $x \geq 1$. C'est l'unique solution de notre équation initiale[42].

Vouloir procéder strictement par équivalences successives nous ferait répéter dans une grande accolade la condition $x \geq 1$, pour aboutir à l'expression disgracieuse

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (x = 0) \text{ ou } (x = 4) \end{cases}$$

avant de conclure à $x = 4$.

Existence.

Nous discutons ici brièvement du sens du verbe "exister" en mathématiques, indépendamment de ce qu'on peut dire à propos du quantificateur associé.

Il faut comprendre qu'il n'y a pas, en mathématiques, d'existence au sens sartrien. On ne se pose jamais la question de savoir si les objets existent. L'existence d'un objet ayant certaines qualités n'est qu'une propriété d'un certain ensemble, dont on dit seulement qu'il n'est pas vide.

En revanche des objets peuvent *être donnés*, dans un cadre qui sera le cas échéant celui d'une *fiction*¶, et cela signifie qu'on pourra travailler avec.

Il faut voir que la marge est étroite pour tenir un discours mathématique correct. Comme on l'a dit en parlant d'*introduire*¶ un objet, quand on écrit "il existe un élément a" dans le cours d'une démonstration, on sous-entend très souvent qu'on se donne un tel élément dans la foulée. S'obliger à expliciter les choses alourdirait le discours au point de le rendre pénible.

Cependant, dans une hypothèse ou une définition, cette latitude n'est pas permise. Nous en parlons, à l'entrée sur les *quantificateurs*¶, à propos de l'indépendance d'une famille de vecteurs. Voici un autre exemple.

Pour définir un objet algébrique comme un groupe, on ne part pas d'un ensemble sur lequel il existerait une loi de composition convenable : tous les ensembles ont cette propriété[43]. On part d'un ensemble *muni* d'une loi, c'est-à-dire d'un ensemble sur lequel on s'est donné une loi; on se l'est donnée d'avance une fois pour toutes. L'ensemble et la loi font partie de la donnée qui constitue le groupe.

Cela étant dit, mieux vaut ne pas être trop explicite non plus à cette occasion. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on parle, un peu hypocritement, d'un ensemble muni[44] d'une loi plutôt que du couple d'un ensemble et d'une loi. En effet, on va très vite noter de la même façon l'objet et l'ensemble. Un autre choix se revèlerait désastreux[45]; voir ce qu'on en dit à propos du *niveau de langage*¶.

---

[42] A quelques détails près, c'est ce que proposent Lebossé et Hemery ...

[43] Le livre d'algébre de Roger Godement, daté de 1966, l'explique très bien; en revanche le manuel de Cagnac-Ramis-Comeau de 1967 demande qu'une loi "existe", ce qui est incorrect.

[44] C'est le choix de Bourbaki, repris en 1966 par Chambadal et Ovaert, en 1971 par Lelong-Ferrand et Arnaudiès et en 1973 par Dixmier.

[45] Comme celui de Ramis-Deschamps-Odoux de 1990; l'excès de purisme n'empêche pas de noter de même la loi et la loi induite et de parler de la loi d'un ensemble.

Existentiel (poser un quantificateur). Voir *quantificateurs*.

Expliquer.

Le verbe *expliquer* vient du latin; il est formé sur le verbe *plicare*, qui signifie *plier*, lui-même dérivé du grec $\pi\lambda\epsilon\kappa\epsilon\iota\nu$. Autrement dit, dans son sens originel, expliquer est simplement déplier. C'était par exemple dérouler un parchemin. Dans notre monde moderne, ce pourrait être démonter un mécanisme.

Ce sens primitif convient parfaitement aux mathématiques pratiquées à un certain niveau. Expliquer consiste à détailler un argument donné dans un premier temps sous forme sommaire. On le fait pour se faire mieux comprendre. Par exemple, on pourra s'exprimer ainsi.

L'application diagonale fournit un homorphisme naturel de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

Expliquons-nous. L'application diagonale de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ est un homomorphisme de groupes. En composant avec les homomorphismes canoniques de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on obtient un homomorphisme de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Maintenant le noyau de ce dernier contient $pq\mathbf{Z}$. En passant au quotient par ce sous-groupe, on obtient l'homomorphisme annoncé.

En classe, au collège ou au lycée, quand ce n'est pas à l'université voire plus tard, expliquer prend souvent une forme un peu dérivée de celle que nous venons de présenter. On peut expliquer en détaillant un cas particulier, ce qui est encore de la même veine. On peut expliquer en revenant sur des points antérieurs. Ces derniers font quand même partie de l'implicite, de ce qu'il s'agit de déplier.

Il semblerait que l'on emploie aujourd'hui le verbe "expliquer" dans le second degré quand on n'est pas en mesure de démontrer. C'est très étonnant, peut-être lié au fait qu'on n'ose plus tenter de vraie *démonstration*¶ d'une part et que l'on récuse les preuves heuristiques de l'autre. On expliquerait quand on aurait abandonné toute prétention à la rationalité. Il faudrait alors parler d'*illustrer*.

Facteurs et termes, membres.

Rappelons qu'une équation ou une inéquation possède deux *membres*, qu'une somme est composée de *termes* et un produit de *facteurs*.

Lorsqu'on veut référer à une partie d'une formule, il est bon de préciser dans quel *membre* elle figure, à quel *terme* ou *facteur* on s'intéresse. Cela évite de reproduire inutilement une expression complexe.

Famille.

Une *famille* indexée par I d'éléments de E est exactement une application de I dans E. La seule différence réside dans la notation : on écrit x_i pour une famille au lieu de $x(i)$ pour une *fonction*¶ .

Cependant on parle le plus souvent de famille lorsque l'ensemble de départ est non structuré, perçu comme discret, alors qu'on parle de fonction ou d'application lorsqu'il est par exemple muni d'une structure algébrique ou topologique, par exemple lorsqu'il est perçu comme continu.

Le principal exemple est celui d'une *suite* d'éléments de l'ensemble E, à savoir d'une application de l'ensemble $\mathbf{N}$ ou de l'une de ses parties dans E. On écrira généralement comme dans les exemples qui suivent; si l'on ne précise pas, l'indice débute à 0; on l'a fait débuter à 1 pour changer.

Soit s une suite de terme général x_n débutant à l'indice 1.

Soit $s = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E.

Pour une suite finie, la notation $(x_k)_{k=1}^{n}$, $(x_k)_{k=1}^{k=n}$, $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ ou $(x_k)_{k\in[1,n]}$ est en concurrence avec la notation

$$x_1, \dots, x_n \quad \text{ou} \quad x_1, x_2 \dots, x_n$$

qui est préférable pour un débutant et parfois aussi pour les autres. Il n'y a pas de hiérarchie de valeur entre les différentes écritures.

Dans le même ordre d'idées, la somme d'une suite finie peut aussi bien s'écrire

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{k=n} x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{1\leq k\leq n} x_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k\in[1,n]} x_k$$

que

$$x_1 + \cdots + x_n \quad \text{ou} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ .$$

Chaque notation a ses faiblesses. Il faut savoir interpréter les secondes lorsque $n = 1$. Il faut savoir les interpréter toutes lorsque $n = 0$. Voir à ce sujet ce que l'on dit sur l'ensemble *vide*¶ . Ici $[1, n]$ désigne un intervalle, de l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$ en l'occurrence, et $[1, 0] = \emptyset$.

Fiction.

Le discours mathématique prend assez souvent le caractère d'une fiction. C'est le cas lorsqu'on considère un élément dans un ensemble qui n'en possède peut-être aucun, quand on veut établir l'unicité sans supposer l'existence d'une solution, quand on fait une hypothèse dont on ne sait pas si elle peut se rencontrer, voire quand, raisonnant par l'absurde, on considère un objet dont on veut montrer qu'il ne peut pas exister.

L'analogie avec la fable mérite d'être remarquée. Bien sûr on n'écrira pas exactement comme suit.

Il était une fois, en géométrie euclidienne, un quadrilatère ayant exactement trois angles droits.

Il était une fois une solution réelle de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Cependant le discours tenu reviendra au même. Pendant un certain temps, ce qui est peut-être impossible, ou même ce dont on ne veut absolument pas, devient réel. Et on travaille avec[46].

Voir comment *Introduire un objet* ou utiliser *Soit*.

[46] C'est ce qu'on appelle l'hypothèse auxiliaire

Finition (détails de).

Quelques détails mal gérés peuvent conférer à une rédaction une impression fâcheuse d'inabouti. Or la mise au point est souvent très facile.

Bien sûr on respectera la grammaire et mettra la *ponctuation*¶. On fera en particulier les élisions qui s'imposent : "s'il" ou "si l'on" par exemple.

A côté de cela, on évitera le symbolisme quand il n'est pas indispensable et qu'il fait perdre la fluidité du discours naturel.

Cela vaut pour les *connecteurs*¶ et les *quantificateurs*¶, indépendamment des contre-indications qui les frappent. Cela vaut aussi pour le symbole d'appartenance, en principe à éviter dans le cours du texte.

Cela vaut même pour le symbole d'égalité; on écrira ainsi "le degré de p est 1", en se gardant de remplacer le verbe par le signe =.

On écrira, de même, en toutes lettres les petits nombres cardinaux du texte lui-même : un, deux, trois etc. Il s'agit d'abord de les distinguer des nombres pris comme valeurs[47]. Ainsi écrira-t-on volontiers comme suit.

Suivant le cas, l'équation admet deux ou trois solutions.

Les solutions de l'équation sont les nombres 2 et 3.

Les solutions sont au nombre de 213.

De façon générale, on veillera à l'harmonie dans le choix du temps, de la personne : en écrivant au présent sauf exception, en évitant de mêler dans une phrase la troisième personne (soit, on) et la première du pluriel (nous).

On évitera aussi de passer, brutalement et sans raison, d'un style concis, utilisant beaucoup les formules, à un style littéraire.

En toute circonstance, un peu d'unité s'impose.

Voici, cependant, une entorse aux conseils précédents que se permettent beaucoup de mathématiciens. On écrira par exemple ceci.

Considérons un nombre entier $n \geq 2$.

Bien sûr, on peut écrire "n tel que $n \geq 2$", mais la répétition n'est pas gracieuse. Quant à écrire "n supérieur ou égal à 2", d'une part il a fallu ajouter "ou égal" pour éviter toute ambiguïté auprès d'un public dont les habitudes sont inconnues, d'autre part cela ne laisse pas, bien en vue, une relation à laquelle on aura très certainement besoin de faire appel.

Cet exemple est là pour illustrer, une fois de plus, l'évidence selon laquelle la rédaction est un compromis et que, parfois, le mieux est l'ennemi du bien.

Fonction.

En théorie des ensembles, les termes de *fonction* et d'*application* sont synonymes. Ils n'évoquent cependant pas les mêmes situations. On emploie surtout le premier dans certains cas particuliers, parlant de fonction de variable réelle ou de fonction *numérique*¶ par exemple. Le second se rencontre notamment en géométrie.

Quel que soit le mot employé, par là on désigne la donnée f d'un triplet composé

[47] Godement se moque de celui qui écrirait : j'ai rencontré 1 ami rue Soufflot.

d'un *ensemble de départ* ou *de définition* E,

d'un *ensemble d'arrivée* ou *de valeurs* F — à distinguer de l'image ou ensemble des valeurs,

et d'une partie G de $E \times F$, appelée *graphe*, ayant pour propriété que pour chaque x dans E il existe un unique y dans F tel que (x, y) soit dans G;

ce dernier est noté $f(x)$: c'est *la valeur prise par f en x*[48].

On introduit usuellement une fonction ainsi :

soit f l'application de E dans F définie par $f(x) = \ldots$

soit f la fonction définie sur E et à valeurs dans F définie par $f(x) = \ldots$

On évitera flèches [49] barrées et quantificateurs.

L'égalité entre des fonctions f et g est celle des ensembles de départ, d'arrivée, ainsi que de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout x.

Les fonctions f, g se composent pour donner $g \circ f$ quand l'ensemble d'arrivée de f est exactement celui de départ de g. Les relations $g \circ f = 1_E$ et $f \circ g = 1_F$ définissent la fonction *réciproque* $g = \overset{-1}{f}$ de f, appelée aussi *inverse* et notée f^{-1} quand la confusion avec $1/f$ n'est pas à craindre.

Si A est une partie de E, l'*injection canonique* de A dans E associe à l'élément x de A ce même élément; si $A = E$ c'est l'application *identique* de E.

Si A est une partie de E, la *restriction* de f à A s'obtient en composant f avec l'injection canonique de A dans E. Plus généralement si B est une partie de F telle que $f(A) \subset B$, la trace du graphe sur $A \times B$ définit l'application de A dans B *induite* par f.

Ce qu'on vient de dire constitue la référence. Pour rester élémentaire, on pourra s'en écarter bien sûr : une fonction sera une variable qui dépend d'une autre[50]. Autrement dit, on peut poser ce qui suit en définition.

Une variable réelle y est fonction de la variable indépendante réelle x si à toute valeur numérique de x correspond une valeur déterminée de y[51].

Maintenant, même à un niveau plus élevé, il faudra également savoir prendre ses distances par rapport à la référence. On tiendra généralement un discours plus souple et plus évocateur, proche du discours naïf, dont voici des exemples [52].

Fixons y et laissons varier x.

Considérons R comme une fonction de s.

---

[48] On n'emploie le terme *image* que pour une transformation; dans l'autre sens, on ne parle jamais d'un “antécédent”.

[49] Les mathématiciens utilisent volontiers une notation telle que $E \xrightarrow{f} F$; elle n'est cependant pas conseillée aux débutants. D'ailleurs, dans le discours savant, une flèche recouvre souvent plus qu'une simple application.

[50] C'est toujours une grandeur qui dépend d'une autre en physique.

[51] Ceci est tiré du manuel d'algèbre de la classe de première de C. Lebossé et C. Hemery datant de 1961, lequel donne cette définition après la définition ensembliste; ici on a remplacé deux fois $\in \mathbf{R}$ par “réelle”.

[52] On pourrait expliquer aux puristes que x est l'injection canonique d'un intervalle dans un autre; ainsi $f = f(x) = f \circ x$; cependant mieux vaut éviter de tenir ce propos.

Soit $x = x(t)$ une fonction définie sur $[t_0, +\infty[$.

La fonction g vérifie l'équation différentielle $g' + ag = x^2 - 1$.

Dérivant $\exp(x). \exp(-x)$, il vient $\exp(x). \exp(-x) - \exp(x). \exp(-x) = 0$.

La tangente à la courbe $y = 2x^2 + 1$ au point $(1, 3)$ est la droite $y = 4x - 1$. [53]

Au point $x = 0$, la fonction $x^{1/3}$ (fonction réciproque de x^3, homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même) admet une dérivée égale à $+\infty$. [54].

Par ailleurs, il ne faut pas chercher à tout ramener à des fonctions. Ainsi, pour passer de $2 \leq x < 3$ à $4 \leq x^2 < 9$, on pourra soit ne rien dire, soit ajouter "en élevant au carré des inégalités entre nombres positifs". Parler de "stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0, +\infty[$" est inutilement pédant, indépendamment de la question de savoir d'où vient cette propriété. En revanche si, dans un exemple un peu plus subtil, il faut introduire une fonction, on le fera après, en prenant son temps pour la justification.

Considérons, en effet, la fonction ... et montrons qu'elle est croissante.

D'une fonction réelle f définie sur un intervalle I de la droite réelle, on dit qu'elle est *croissante* (resp. *décroissante*) si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$. Même si la précaution devrait être inutile, pour être sûr d'être bien compris, on ajoutera éventuellement la locution *au sens large*. Lorsqu'on place des inégalités strictes dans ce qui précède, on définit une fonction *strictement* croissante ou décroissante. Ici l'adverbe s'impose. Voir aussi ce qu'on dit à propos des *précisions*¶ et des cas *marginaux*¶.

Dans des cas simples, il est inutile d'invoquer, avec force détails, des théorèmes de composition pour justifier le sens de variation d'une fonction. Par exemple, pour montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty)$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

est décroissante, on pourra s'exprimer comme suit.

Quand x augmente, c'est aussi le cas de x^2, puis de $x^2 + 1$, comme de $\sqrt{x^2 + 1}$ et de $\sqrt{x^2 + 1} - 1$; ce dernier est positif et alors son inverse $f(x)$ diminue. QED.

Disons encore, pour finir, un mot sur l'injectivité et sur la surjectivité. Considérons donc une application f de l'ensemble E dans l'ensemble F. Voici une présentation qu'on peut retenir, à tous les niveaux.

On introduit l'équation

$$f(x) = y$$

dans laquelle la valeur y de E est donnée et l'élément x de E est l'inconnue.

L'application f est dite injective si l'équation a au plus une solution en x pour tout y; elle est dite surjective si elle en a au moins une pour tout y; elle est bijective si elle en a exactement une pour tout y.

On notera qu'on parle plutôt ici d'application. Pour une fonction, on peut aussi employer un langage plus imagé : ne pas reprendre la même valeur, parcourir toutes les valeurs etc.

---

[53] Ce que chacun comprend sans effort ne peut pas être foncièrement mauvais.

[54] Cette phrase est signée par Bourbaki lui-même; l'accent est mis sur ce qui importe : le sens à donner à $x^{1/3}$.

Genre.

L'*insertion*¶ d'un symbole mathématique dans un texte se fait dans le respect de la grammaire. On ne dérogera notamment à l'accord sous aucun prétexte. Pour cela chaque symbole doit avoir un genre. Opter, par défaut, pour le genre masculin, qui joue un peu le rôle de neutre dans la langue française, ne serait pas judicieux car le nombre de mots féminins est important.

Par conséquent chaque symbole nouvellement introduit doit mentionner sa nature. La façon de la nommer n'est pas évidente. Par exemple $f(x)$ est un nombre (m) ou une valeur (f); le groupe $GL(n, K)$ est composé d'éléments (m), mais aussi de matrices (f); à propos de $M_n(K)$, on peut penser à l'anneau (m) ou à l'algèbre (f).

Voici un exemple.

Considérons une valeur y. Supposons que la fonction f ait déjà pris y en un point t; si f l'a encore prise en un point u où la dérivée est non nulle ...

L'accord permet de confirmer la présomption suivant laquelle le pronom personnel remplace bien y.

Maintenant rappeler sa nature en même temps qu'on cite le symbole peut être une sage précaution dans certains cas.

Gras.

L'usage d'utiliser la graisse pour désigner certains objets mathématiques, comme **N**, **Z**, **Q**, **R** ou **C**, est une convention typographique ancienne.

Avec les machines à écrire traditionnelles, on a cherché un moyen simple pour produire un ersatz à moindre frais de ces caractères gras dans les manuscrits. On ajoutait ainsi, à la main, un trait venant doubler l'un des traits existants, produisant un lR par exemple. A la composition, on retrouvait évidemment la lettre grasse conventionnelle.

Si l'on écrit au tableau, la même astuce se révèle très pratique. Repasser tous les traits serait assez fastidieux et l'effet ne serait pas garanti. D'ailleurs Donald Knuth a inclu la police "blackboard bold" dans son logiciel TEX , en clin d'œil à cet usage.

Lorsque les premiers Macintosh d'Apple sont apparus, avec la facilité d'y modifier le style typographique, quelqu'un a eu l'idée d'utiliser le style dit "éclairé" pour imiter l'artifice précédent. Le succès a été foudroyant. Beaucoup se sont imaginés faire plus "savant" en adoptant cette pratique, ignorant sa véritable origine.

Maintenant l'origine des symboles éclairés est une chose; le choix typographique en est une autre, qui appartient à chacun, en fonction de ses goûts et de son public.

Au delà de l'anecdote, cela renvoie à la question de savoir si l'on peut accepter *au tableau* des usages qu'on s'interdira à l'écrit; voir ce qu'on en dit à l'appendice correspondant.

Homologues.

Nous allons considérer un exemple tiré de la géométrie élémentaire. Au passage, on verra que la figure du triangle y est à géométrie variable. Cela complète ce qui a été dit à propos des *ensembles*¶.

Deux triangles sont dits égaux si l'on peut appliquer l'un sur l'autre par un déplacement (dans l'espace); une façon d'appliquer étant choisie, à chaque sommet, angle ou côté de l'un correspond une sommet, angle ou côté de l'autre; on parle d'éléments *homologues*, lesquels sont alors égaux.

Maintenant les triangles ABC et DEF sont dits égaux si l'on peut appliquer le premier sur le second en plaçant A en D, B en E et C en F. Cette fois-ci, c'est la façon de nommer les triangles qui indique comment apparier les sommets, qui précise quels éléments doivent être homologues.

Dans le premier cas, l'égalité signifie qu'on peut trouver une manière de nommer les sommets de façon à se trouver dans la situation du second cas.

Quand on nomme des triangles dont on va établir l'égalité par leurs sommets, on prend bien soin de l'ordre dans lequel on énumère lesdits sommets.

On a besoin de cette souplesse dans l'expression. Autrement dit, mieux vaut ne pas avoir à préciser ce qu'est exactement un triangle. Dans le premier cas ce serait, par exemple, un ensemble de trois points non alignés; dans le second ce serait un triplet de points non alignés.

Ce qu'on vient de dire vaut également pour la similitude ou la similitude directe des triangles ou pour des figures à base de points.

Hypothèse.

Comme son nom l'indique, l'hypothèse est le fondement sur lequel s'appuie la thèse. C'est une proposition admise comme vraie et dont on peut déduire une conclusion.

Aujourd'hui, *au collège*, par on ne sait quelle aberration, on a remplacé le terme d' "hypothèse" par celui de "donnée". Sans doute n'est-ce pas seulement par crainte des mots d'origine grecque, trop associés aux humanités classiques dans l'esprit des décideurs de l'Institution. L'inspection préconiserait peut-être de réserver l'hypothèse à la prémisse des énoncés composant la "boîte à outils" de l'élève. La donnée serait l'information donnée par l'énoncé, sous forme graphique assez souvent.

Identités.

On distingue les égalités occasionnelles, valables pour certaines valeurs des variables qu'elles comprennent, des *identités*, valables, en principe, quelle que soit la valeur des variables, voire leur nature.

Ainsi a-t-on, l'identité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

dans tout anneau commutatif, et l'identité de Jacobi

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

dans un anneau quelconque, si $[a,b] = ab - ba$.

Dans certains cas, on précisera la variable concernée, parlant, par exemple, d'une "identité en x".

Parler d'identité est largement préférable à l'addition d'un gribouillage de quantificateurs. D'abord l'emploi en est moins contraignant : il n'est pas utile de renvoyer pour cela à la théorie des *ensembles*¶. Ensuite l'emploi est moins perturbant : on a le droit de faire porter un quantificateur sur l'anneau, mais ce n'est pas dans les habitudes du lycée ou de la première année universitaire; il faut savoir que les anneaux, commutatifs ou non, ne forment pas un ensemble.

En pratique, dans la plupart des cas, au lieu de parler d'identité, on peut aussi parler de formule.

Implication. Voir *connecteurs.*

Implicite (laisser dans l').

De façon générale, mieux vaut laisser dans l'implicite ce qui n'a pas absolument besoin d'être explicité. Cela vient en partie contredire la consigne d'introduire systématiquement tous les objets utilisés.

Voici un exemple, plutôt de *niveau universitaire.* Pour introduire une suite, quand on ne choisit pas l'écriture déployée qui reste préférable pour un débutant, dans bien des cas on dira simplement ceci.

Soit une suite (x_n).

Ici on n'a pas introduit explicitement la lettre n; par exemple on n'a pas dit que c'était un nombre entier; en revanche on a déjà prévenu le lecteur que l'on désignerait par défaut l'indice par la lettre n. Pour dire que la suite tend vers $+\infty$, on enchaînera donc volontiers ainsi.

... pour tout nombre réel A, il existe un indice n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $u_n \geq A$.

Il aurait été plus conforme à la référence concernant les fonctions d'utiliser soit la notation $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, laquelle est incontournable pour une famille générale mais bien lourde ici, soit la notation u tout court, qui n'aiguille guère le lecteur un peu distrait.

Infini.

La peur de l'infini fait écho à la peur du *vide*¶. C'est assez tôt à l'université qu'il convient, en Analyse, de donner aux deux infinis (positif et négatif) un statut analogue à celui des nombres réels. Cela se fait en introduisant la *droite achevée*, qui est notée $\overline{\mathbf{R}}$ ou $[-\infty, +\infty]$.

On utilisera volontiers le symbolisme des intervalles pour des parties de la droite achevée, par exemple $[0, +\infty]$, $]0, +\infty]$ ou $]-\infty, +\infty]$.

Une borne supérieure ou inférieure, la somme d'une famille positive, sont toujours à prendre dans la droite achevée. On écrira, sans précaution aucune, des expressions comme

$$\sup_{x\in A} |f(x)| \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \ .$$

Elles sont strictement inférieures à $+\infty$, pour la première si la fonction f est bornée sur A, pour la seconde si la série (x_n) est absolument convergente (ou sommable). On pourrait en faire des définitions.

Quand on a défini sur la droite achevée les parties ouvertes et les voisinages de $-\infty$ et $+\infty$, on peut ramener les limites à l'infini à des limites en un point, donc à la continuité. Cela rend les énoncés beaucoup plus agréables.

Evidemment il y a aussi des écueils. Il n'y a pas d'opérations dans la droite achevée. D'abord $\infty - \infty$ n'a pas de sens. Ensuite, dans $[0, +\infty]$, on peut toujours ajouter; on peut multiplier à gauche par un nombre réel positif ou nul, mais en convenant par exemple que $0.\infty = 0$.

Insertion d'une formule.

Les formules mathématiques sont insérées dans le discours dans le respect des règles grammaticales. Pour le faire, on doit savoir qu'elles se classent précisément en deux catégories,

les termes

et les relations.

Les termes sont assimilés à des groupes nominaux et les relations à des propositions. On écrira ainsi

"le polynôme $x^2 + 2x$",

et

"$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$",

où, dans le dernier cas, le signe d'égalité tient lieu de verbe.

Cependant on peut aussi faire des relations des groupes nominaux, en les apposant par exemple. On parlera ainsi de

"l'égalité $A = B$",

ou de

"l'équation $\sin x = x$".

Dans d'autres cas, la relation seule sera prise comme groupe nominal. La langue française le permet, qui transforme volontiers en groupe nominal une subordonnée infinitive.

De les voir mortes me fit frémir (Alphonse Daudet).

Souvent la bonne compréhension de la formule nécessite d'en expliciter certains éléments ou de préciser des conditions portant sur ces derniers. On le fera en utilisant le pronom relatif

"où"

ou une locution équivalente, à l'exclusion de la préposition "avec" qu'on rencontre malheureusement. Voici un bon exemple, déjà cité pour un autre propos.

Un carré a pour côté $x + 5$, où x est un nombre réel positif.

Interpréter.

Le verbe *interpréter* vient du latin, où l'on trouve surtout le substantif *interpres*, formé sur *inter* et probablement *pars* et qui désigne l'agent entre deux parties. Son sens originel est, assez curieusement à première vue, celui d'expliquer, d'éclaircir.

En mathématiques, on trouve précisément ces deux éléments, à savoir une explication entre deux parties. On interprète un objet ou une propriété en éclaircissant le sens qu'on va lui donner, d'une façon qui n'est pas nécessairement celui qu'il avait au départ.

Introduire (un objet).

La façon d'introduire un nouvel objet dans le discours mathématique dépend avant tout de l'objectif qui amène à le prendre en compte. Il peut s'agir de poser un quantificateur universel ou existentiel ou tout simplement de mettre en avant un objet particulier dont on a établi l'existence, en décidant de lui donner un nom pour y renvoyer.

Nous verrons que, très souvent, on utilise l'impératif *soit*¶ pour ce faire, ce qui est plus ou moins justifié.

Pour donner un nom à un objet dont l'existence est évidente ou a déjà été établie, on pourra se contenter d'indiquer la terminologie choisie dans le cours d'une phrase. On pourra aussi utiliser des formules du type "on note" ou "on appelle"; on pourra encore utiliser "soit", en employant toujours l'article défini. Voici des exemples.

Les deux droites (supposées sécantes) se coupent en un point A.

On note Ω le centre du cercle.

Soit A le point d'intersection des droites AB et CD.

Pour démontrer une propriété universelle, on emploie souvent des tournures comme les suivantes; c'est également un cas où l'on utilise à bon escient "soit", mais avec l'article indéfini.

Etant donné (un élément) x vérifiant ...

Supposons donné (un élément) x tel que ...

Considérons (un élément) x tel que ...

Soit x (un élément) tel que ...

On se permettra souvent d'ajouter la *précision*¶du qualificatif "arbitraire" ou "quelconque" à l'élément x, notamment dans les deux dernières variantes.

Ayant posé cet élément, les calculs sont alors possibles et l'enjeu est donc d'établir que la propriété attendue est effectivement vérifiée. L'existence n'a pas à être discutée, parce qu'elle n'est pas de la responsabilité de l'auteur : il faut imaginer que l'élément x a été donné par un intervenant extérieur, ou qu'on entre ici dans une *fiction*¶.

Pour utiliser une propriété d'existence, cette dernière ayant été établie en amont, l'introduction se résume au choix d'un élément dans l'ensemble non vide des éléments qui conviennent. Voici des exemples.

Choisissons (un élément) x tel que ...

Prenons (un élément) x tel que ...

Fixons (un élément) x parmi ...

Considérons (un élément) x vérifiant ...

dans lesquelles on se permettra souvent d'ajouter la *précision* du qualificatif "particulier" à l'élément x, notamment dans la dernière variante, pour éviter la confusion avec l'usage précédent.

Il est cependant permis, quand l'expression "il existe x tel que" est utilisée au cours d'une démonstration, de considérer le x en question dans la suite, faisant l'impasse sur le choix. Il n'y a alors rien de plus à faire. Ce petit abus ne gênera pas le lecteur averti, mais n'est peut-être pas à conseiller aux débutants. Voir ce qu'on dit sur le *quantificateur existentiel*¶.

Il est également assez courant d'utiliser "soit" dans un tel cas, mais ce n'est pas non plus conseillé au débutants, qui devront se familiariser d'abord avec les diverses façons d'introduire un nouvel objet.

Voici un exemple, mêlant les deux dernières façons d'introduire un objet. Il s'agit de montrer que si B est non vide, l'inclusion $A \times B \subset C \times D$ implique l'inclusion $A \subset C$.

Commençons par exposer la démonstration dans des termes particulièrement tranchés, comme on pourrait le conseiller à des débutants. On a mis entre parenthèses des commentaires réservés à l'oral.

Donnons-nous un élément x de A; il s'agit de voir qu'il appartient à C (puisque l'inclusion demandée s'exprime ainsi : tout élément de A appartient à C; et qu'il y a donc un quantificateur à poser). Sachant que B est non vide, choisissons un élément b dans cet ensemble. Alors (x, b) appartient à $A \times B$ (par définition du produit, ensemble des couples formés par les éléments des facteurs). Maintenant l'hypothèse assure qu'il appartient aussi à $C \times D$. Dans ces conditions x appartient à C (toujours par définition du produit). QED.

Voici une version plus concise, pour un public déjà averti.

Soit x un élément de A. Choisissons b dans B. Alors (x, b) est dans $A \times B$, donc aussi dans $C \times D$. Ainsi x appartient à C.

Voici un autre exemple, un peu léger quant au contenu, mais assez délicat dans son traitement : montrer qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini[55].

Ici on dit qu'une suite (x_n) tend vers l'infini si elle vérifie la propriété qui suit.

Etant donné n'importe quel[56] nombre réel A, on peut trouver un rang n à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A.

Voici la démonstration. Considérons une suite (x_n) croissante et non majorée et montrons qu'elle tend vers l'infini.

---

[55] Cet exemple est proposé au baccalauréat au titre de la "restitution organisée de connaissances".

[56] Avoir ajouté "n'importe quel" ou "arbitraire" était superflu; mais savoir s'en passer est tout un entraînement, sous-estimé généralement; voir ce qu'on dit sur la *continuité*¶.

Pour cela donnons-nous un nombre réel A. Puisque la suite n'est pas majorée, en particulier elle ne l'est pas par A. Choisissons donc un rang n tel que $x_n > A$. Alors

$$x_k \geq x_n > A$$

si $k \geq n$, puisque la suite est croissante. Ainsi $x_k > A$ à partir du rang $k = n$.

Introduire plusieurs objets.

Dans un énoncé, on doit presque toujours introduire plusieurs objets dans les hypothèses. Dans ce cas, il convient de le faire dans un ordre logique. On dira par exemple ceci.

Soient I un intervalle de la droite réelle et f une fonction réelle définie sur I.

Soient p un nombre entier satisfaisant $1 < p < \infty$ et f une fonction de L^p.

ou

Soit f une fonction de L^p, où p est un nombre entier tel que $1 < p < \infty$.

Dans ce dernier exemple, on veut faire comprendre que ce sont p et f qui sont donnés et non pas la seule fonction f supposée, par ailleurs, dans L^p pour un certain p.

Italique.

La typographie des textes mathématiques réserve le style italique aux variables latines : l'ensemble E, le nombre x, la fonction f, l'indice n etc.

A l'inverse les constantes sont en principe écrites en style romain. Par exemple, on préfère écrire d le symbole de dérivation. Ainsi

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

désigne une intégrale[57].

Il est alors difficile d'utiliser le véritable style italique dans le texte. C'est la raison pour laquelle certains ont opté pour le style *penché*.

Justifier.

Au départ, le verbe latin *justificare* signifie d'abord *traiter avec justice*, puis *rendre juste*. En mathématiques il s'agit de rendre juste, par le raisonnement logique, une affirmation.

[57] C'est plutôt l'intégrale d'une forme différentielle, ce qui justifie d'ailleurs pleinement la notation : échanger a et b la transforme en son opposée.

Langage (niveau de).

Par exception, nous nous plaçons, pour cette entrée, dans la problématique de l'enseignement du lycée d'aujourd'hui. Nous donnons également des exemples de rédactions, certes correctes, mais que nous ne saurions conseiller.

Comme nous l'avons dit en introduction, on n'écrit pas les mathématiques de la même façon tout au long de l'apprentissage de la discipline. Il serait cependant souhaitable de ne s'inspirer que des deux références que sont d'une part la pensée commune et la langue courante et d'autre part les habitudes des spécialistes. Le discours progressera en partant de la première référence et en empruntant à l'autre. Mieux vaudrait ne pas introduire, dans les stades intermédiaires, d'usages s'écartant de l'une ou l'autre référence.

C'est pourtant ce que l'on fait quand on s'inscrit dans une démarche qu'Yves Chevallard a qualifiée de "transposition didactique". Oubliant, au nom de la modernité, la référence aux usages communs, qui sont souvent ceux de la Science à ses débuts, on part de ce qu'il appelle le "savoir savant" et qui serait en fait plutôt "l'usage moderne". On l'adapte au niveau auquel on se place pour enseigner, le "trahissant" alors nécessairement comme le dit le même Chevallard. On construit ainsi un nouveau savoir qu'il appelle le "savoir enseigné". En réalité son "savoir savant" serait, plus précisément, l'usage universitaire d'aujourd'hui, lequel relève déjà d'une transposition didactique de l'usage moderne.

La transposition en question pourrait souvent être évitée en regardant du côté un peu ancien du savoir savant, dans ce que Rudolf Bkouche appelle le "savoir pérenne". Outre le fait que la transposition n'est pas très légitime, elle présente bien des inconvénients, dues à ce qu'on pourrait appeler un "biais didactique". On entend par là qu'on s'intéresse à un domaine très cloisonné du savoir pour opérer la transposition. Cette dernière consiste souvent à expliciter outrageusement certains aspects, dans l'intention de les rendre plus accessibles au novice : en multipliant les marches, on facilite l'escalade. L'ennui est qu'on a besoin en mathématiques, pour les utiliser dans divers domaines, de concepts et d'outils souples, à la fois pour travailler efficacement et pour comprendre — c'est-à-dire prendre ensemble — le sens de ce que l'on fait.

Aujourd'hui, les nouveaux programmes du lycée demandent de travailler les constructions ensemblistes, les connecteurs logiques et les quantificateurs, à l'exception pour ces derniers des symboles les représentant. Depuis la fameuse période, dite des "mathématiques modernes", où l'on a présenté la discipline en la réduisant au maniement d'un langage — ce qu'on a analysé un peu plus tard comme une "illusion langagière" — l'utilisation "d'un langage approprié" est restée, malgré les retours en arrière, le but ultime de leur enseignement. Par ailleurs le travail sur la langue courante est souvent perçue par les inspirateurs de l'Institution comme un facteur de discrimination en fonction des origines, même si c'est un grand tort. Aussi n'est-il pas étonnant que l'on doive s'attendre à une traduction des orientations du programme dans la façon de présenter la résolution des exercices.

C'est bien un formatage qu'il s'agissait de réaliser sur les élèves. Maintenant l'enseignement a toujours formaté. La différence entre les époques est que le formatage a pu changer.

Prenons un petit exemple, simple jusqu'au dénuement, juste pour montrer le format : soit à résoudre l'équation

$$(x+1)(x-2)=0\ .$$

Voici d'abord comment rédiger la solution dans l'esprit qu'on suppose être celui des programmes.

La relation

$$\text{“}(x+1)(x-2)=0\text{”}$$

équivaut à la relation

$$\text{“}(x+1=0) \text{ ou } (x-2=0)\text{”}\ .$$

Cette dernière s'écrit encore

$$\text{“}(x=-1) \text{ ou } (x=2)\text{”}\ .$$

Par suite l'ensemble des solutions est la paire $\{-1,2\}$.

Bien sûr tout mathématicien sera capable de produire une telle “solution”. Sans nul doute, l'élève du lycée y parviendra également, car il aura vite compris les exigences et aura retenu par cœur un cadre dont il n'aura plus qu'à remplir les trous. Aura-t-il pour autant mis du sens dans ce qu'il aura été amené à écrire? Il est probable que non.

S'il avait fallu résoudre une véritable équation du second degré par un procédé de factorisation à partir de la connaissance d'une racine, mais sans les formules de la somme ou du produit, la rédaction aurait été plus délicate encore.

On noterait que le travers consistant à demander aux élèves de faire des choses trop abstraites ou trop difficiles pour qu'ils puissent les comprendre, aboutissant au besoin de leur mâcher le travail en leur fournissant un cadre à remplir, est malheureusement très répandu à l'université. La nouveauté est qu'il se répand de plus en plus dans les autres degrés.

Voici maintenant comment on pouvait opérer dans l'ancien temps.

Je sais qu'un produit de facteurs est nul quand (au moins) un des facteurs l'est. Il y a donc deux cas : $x+1=0$ et $x-1=0$; soit encore : $x=-1$ et $x=2$; ce sont les solutions.

On pourra achever en encadrant $x'=-1$, $x''=2$ par exemple. Nommer les solutions est par ailleurs intéressant si les expressions sont compliquées et s'il faut les réutiliser.

Au moins la rédaction de l'exercice porte-t-elle le sens que l'on attend que l'élève y ait mis. Cela ne veut pas dire que tous auront dominé le sujet. L'équation $x^2=x$ a toujours été piégeuse. Mais, au moins, ceux qui se trompent comprennent pourquoi.

Evidemment un mathématicien professionnel affirmera directement que les solutions sont -1 et 2. Cependant le cheminement de sa pensée suivra la solution à l'ancienne. On voit bien ici les limites de la transposition didactique. Pour faire “comme les chercheurs”, on finit par se comporter d'une façon tout à fait éloignée de ces derniers. La modernisation du discours mathématique qui s'est opérée, notamment depuis David Hilbert, a beaucoup moins changé la façon de penser les choses simples qu'on ne l'affirme trop souvent.

Reprenons un exemple donné à propos des *équations différentielles*¶ . A l'entrée correspondante, on trouve l'exercice consistant à résoudre l'équation

$$y' + ky = x^2$$

connaissant une solution particulière y_0, que nous préférons appeler ici f. Voici comment rédiger dans le même esprit que le premier exemple.

Par hypothèse, on a la relation

"Pour tout x réel, $f'(x) + kf(x) = x^2$".

La relation

"Pour tout x réel, $g'(x) + kg(x) = x^2$"

équivaut donc à la relation

(1) "Pour tout x réel, $g'(x) + kg(x) = f'(x) + kf(x)$".

Définissons une fonction h sur $\mathbf{R}$ en posant :

(2) "Pour tout x réel, $h(x) = g(x) - f(x)$".

Alors la relation (1) est encore équivalente à la relation

"Pour tout x réel, $h'(x) + kh(x) = 0$".

On sait que cette relation en h est équivalente à la relation

"Il existe une constante réelle C telle que pour tout x réel, $h(x) = Ce^{-kx}$".

La dernière relation est encore équivalente à la relation

"Il existe une constante réelle C telle que pour tout x réel, $g(x) = f(x)+Ce^{-kx}$".

Cela résout l'équation.

On imagine les efforts considérables qu'il a fallu fournir pour aboutir à cette rédaction. Ainsi a-t-on mis dans l'ombre tout ce qui était signifiant dans le calcul. C'est notamment le rôle joué par la constante C qui conduit à l'écriture d'un quantificateur existentiel, dans une figure de style dont il faudrait s'expliquer. Sans compter le fait qu'on ne doive pas calculer sous un quantificateur, la bonne règle exigeant de les déposer et reposer chaque fois.

Sur cet exemple, on mesure clairement les effets du biais didactique. En transposant la notion abstraite de fonction telle qu'on la trouve dans Bourbaki, on a été amené à insister sur la différence entre f et $f(x)$. Malheureusement cela empêche de traiter l'inconnue d'une équation différentielle, qui est une fonction, comme une inconnue ordinaire. Ce qui est didactiquement "bon" pour définir une fonction est techniquement mauvais pour s'en servir.

Voici encore un exemple du biais didactique, qui ne doit rien aux équations cette fois-ci. Dans le programme du lycée, peut-être dès celui du collège, il est demandé d'enseigner les symboles usuels servant à désigner "les ensembles de nombres", qui sont $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et plus tard $\mathbf{C}$, en *gras*¶ comme ici ou en style "éclairé" le plus souvent. Puisqu'il s'agit d'enseigner, en même temps, le "langage" de la théorie des ensembles, on définit très précisément ces objets comme des ensembles. Par exemple et par définition la relation "$n \in \mathbf{N}$" équivaut à la relation "n est un nombre entier naturel".

L'usage moderne veut que ces *symboles*¶ désignent des objets portant une structure algébrique; on renvoie à l'entrée correspondante pour voir comment glisser de $\mathbf{R}$ comme corps à $\mathbf{R}$ comme groupe additif ou à $\mathbf{R}$ comme ensemble. On évite d'expliciter la structure, parlant pour un groupe d'un ensemble *muni* d'une structure de groupe.

Dans la transposition opérée au lycée à une époque et parfois encore à l'université aujourd'hui, une telle souplesse n'est pas envisageable. Il faut tout expliciter. Par exemple on notera

$$(\mathbf{R}, +, \times, \leq)$$

le corps ordonné des nombres réels. C'est un quadruplet. Jusqu'ici il n'y a rien à dire. Cependant il faudra aussi noter

$$(E, +, \mathbf{R}, \times)\ ,\ (E', +', \mathbf{R}, \times')$$

deux espaces vectoriels, faisant apparaître, pour chacun, les opérations interne et externe. Comment notera-t-on alors l'espace vectoriel des applications linéaires d'un de ces objets dans l'autre? Ecrira-t-on

$$(L((E, +, \mathbf{R}, \times)\ ,\ (E', +', \mathbf{R}, \times')), \underline{+}, \mathbf{R}, \underline{\times})\ ?$$

C'est là qu'on se rend compte qu'il fallait confondre, dans les notations, l'objet et l'ensemble (sous-jacent)[58]. Bien sûr, c'est ce que tout le monde fera. Mais pourquoi avoir alors tant insisté sur la différence des notations?

Limite (passage à la).

Passer à la limite est une opération fréquemment pratiquée en Analyse. Malheureusement elle exige, bien souvent, quelques précautions.

En effet, si le symbolisme

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

peut être utilisé dans un énoncé, plus généralement pour annoncer ou pour conclure, jamais il ne doit l'être dans un calcul. La raison principale est que son écriture suppose l'existence de la limite, alors que cette existence est en général à démontrer. Voici un exemple.

Montrons que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = 2\ .$$

On a

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\ ,$$

d'où

$$\int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^A \frac{dx}{x+1} - \int_0^A \frac{dx}{x+2} = \log \frac{A+1}{A+2} + 2\ .$$

[58] En fait, dans l'usage savant, la lettre désigne en premier l'objet structuré (l'objet d'une catégorie); l'abus de langage consiste à nommer de même l'objet sous-jacent (obtenu après application du foncteur d'oubli).

En prenant la limite quand $A \to \infty$, le résultat cherché vient.

Dans cet exemple, tenter de décomposer directement la limite cherchée ferait passer par la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Lorsqu'un passage à la limite met en jeu des limites infinies, il est tentant de les faire apparaître. Les lycéens écrivent volontiers, en laissant x tendre vers $+\infty$, ceci.

$$x^2 + 1 \to \infty^2 + 1 = \infty \ .$$

Il est difficile de leur en tenir rigueur. En principe ils n'ont pas le droit d'écrire des opérations portant sur des valeurs infinies. Cela veut dire qu'ils doivent invoquer un théorème portant sur la limite à l'infini des fonctions rationnelles.

C'est un peu dommage. Interdire les "formes indéterminées" est le moins qu'on puisse faire et c'est, en même temps, très instructif[59]. Mais pourquoi interdire ceci :

$$x^2 - x - 1 = x^2(1 - 1/x - 1/x^2) \to \infty.(1 + 0 + 0) = \infty \ ?$$

Celui qui aura fait la différence entre ce qui est permis et ce qui ne l'est pas dans un tel calcul aura compris quelque chose de solide.

Certes, il vaudrait mieux dire que le premier facteur tend vers l'infini et que le second tend vers 1. Mais cela revient au même. Quant à sauter sur cet intermédiaire, ne serait-ce pas tout simplement de l'hypocrisie?

Maintenant, dans le cas où établir une limite ne présente aucune difficulté, il y a une façon très simple de s'exprimer. Voici un exemple.

Quand $x \to +\infty$, d'abord $x + 1 \to +\infty$ aussi, puis $\log(x + 1) \to +\infty$ également.

Il serait difficile de préconiser l'utilisation du symbole lim et la mention d'une composition de limites dans une situation aussi banale.

Local, localement (*niveau université*).

On parle d'une propriété "locale", ou on ajoute "localement" à un adjectif qualifiant un objet, quand la propriété est vérifiée sur un système fondamental convenable de voisinages de chaque point.

Par exemple, un espace topologique est dit *localement connexe* si chacun de ses points admet un système fondamental de voisinages connexes.

Dans certains cas, cela revient à exiger la propriété pour tous les voisinages, du moins pour tous ceux d'un certain type.

Ainsi, pour une équation différentielle, on dit qu'il y a *unicité locale*[60], si, pour toute donnée initiale (t_0, x_0) et tout intervalle ouvert I contenant t_0, il existe au plus une solution sur I valant x_0 en t_0.

---

[59] Aux quatre formes liées aux quatre opérations, viennent un jour s'ajouter 1^∞, 0^0 et ∞^0; c'est encore un apprentissage.

[60] Cela traduit le fait qu'il n'y a qu'une seule possibilité d'évolution, aussi court que soit le terme; l'unicité globale n'implique pas l'unicité locale : qu'il n'y ait qu'une possibilité à un terme donné n'empêche pas l'existence d'autres, qui exploseraient avant ce terme.

L'unicité sur un intervalle ouvert contenant t_0 assure celle sur les intervalles le contenant; en revanche celle sur un intervalle I particulier ne suffit pas, n'assurant pas celle sur les intervalles plus petits.

Dans d'autres cas, il suffit de connaître la propriété pour un seul voisinage; elle se transmettra alors à tous ceux d'un système fondamental.

C'est le cas pour un *extremum local*. C'est un extremum de la fonction restreinte à un voisinage.

C'est ainsi qu'un espace topologique séparé est *localement compact* dès lors que chacun de ses points possède un voisinage compact; en effet les voisinages fermés inclus dans un tel voisinage seront également compacts.

De même, pour une équation différentielle, il y a *existence locale*, dès lors que, pour toute donnée initiale (t_0, x_0), il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une solution sur I valant x_0 en t_0.

Le qualificatif local s'oppose à "ponctuel" et à "global". Pour une fonction réelle définie sur un espace topologique le fait d'être positive est une propriété ponctuelle; celui d'être continue est une propriété locale; celui d'être bornée est une propriété globale.

Locutions.

Dans la langue courante, la composition est un procédé usuel de formation de mots nouveaux. Obtenu en juxtaposant graphiquement avec ou sans espace, ou par un tiret, des mots déjà existants, le **mot composé** évoque immédiatement à l'esprit une image unique sur fond d'images distinctes répondant à chacun des mots composants. Penser par exemple à des mots composés tels que *pomme de terre, pomme d'amour, savoir-faire, coffre-fort, loup de mer, corne de brume, ivre-mort, trompe-la-mort, trompe-l'œil, rond-point, centre-ville, hôtel de ville, timbre-poste, sous-fifre, arc-en-ciel, contresens*, etc.

En mathématiques, il est souvent fait usage d'assemblages de mots pour désigner un nouvel objet. Tout mot composé nouveau ou toute **locution** nouvelle doit faire l'objet d'une définition.

Certaines sont naturelles, comme *antidéplacement* dont le sens est directement lié à celui de déplacement ou *sous-groupe* dont le sens est lié à celui de groupe. Pour cette raison, on utilisait dans le temps la locution *fonction linéaire affine* plutôt que celle de *fonction affine* qu'on utilise aujourd'hui.

Même si la locution ne juxtapose que des termes mathématiques précédemment définis, son sens ne se réduit pas toujours à l'addition des sens de chaque terme. Un *corps ordonné* n'est pas seulement un corps muni d'une relation d'ordre.

Beaucoup de locutions sont formées de mots sans définition mathématique propre. Le mot nombre n'est pas défini, mais on dira ce qu'est *un nombre naturel*, un *nombre premier*, un *nombre réel*, un *nombre complexe*, un *nombre imaginaire pur*, etc.

Deux locutions peuvent désigner des notions différentes, tout en étant formées de mots synonymes. Ainsi emploiera-t-on indifféremment les mots suite et série, alors que la locution *série convergente* renvoie à une suite dont la suite associée des sommes partielles converge et n'a donc pas le sens de *suite convergente*; voir aussi l'entrée sur les *synonymes*¶.

On résistera à la tentation de penser qu'un mot est défini dès lors qu'il est composant d'une locution que l'on a définie. Dans un plan euclidien, un point a et un nombre réel $\rho > 0$ étant donnés, la définition ensembliste de la locution *cercle de centre a et de rayon* ρ ne définit *a priori* ni le mot *cercle*, ni la locution *centre d'un cercle*.

Marginaux (cas).

Par souci d'économie et donc d'efficacité, le discours mathématique évite de distinguer les cas marginaux pour les faire entrer, chaque fois que la chose est possible, dans le cas général. Cette attitude est à rapprocher de celle qui veut que ledit discours ignore le contexte, pour s'appliquer aux situations les plus variées.

Malheureusement le discours mathématique épuré s'écarte à cette occasion du discours commun, jusqu'à accepter des expressions qui portent peu de sens et demandent un effort d'abstraction non négligeable pour être comprises. Pour cette raison il n'est pas envisageable de faire démarrer systématiquement la pratique des mathématiques sur de tels principes.

Il est par exemple commun de dire qu'en mathématiques le singulier se limite à "un" alors que le pluriel commence à zéro. Considérer "l'élément" suppose qu'il y en ait un et un seul; considérer "les éléments" ne suppose absolument rien.

Une situation embarrassante concerne les inégalités. La relation fondamentale en mathématiques est l'inégalité large, qui s'écrit $\leq$ ou ≥ 0. On doit systématiquement l'utiliser, dès lors qu'on n'a pas la nécessité impérieuse d'exclure l'égalité. Par exemple, dans la définition de la limite ou de la continuité, on écrira $\epsilon > 0$ parce qu'il faut exclure la valeur 0. A l'inverse, sauf raison particulière, on préfèrera $|x_n - x| \leq \epsilon$.

Cependant, dans la langue courante comme dans la typographie, les qualificatifs "inférieur" et "supérieur" excluent l'égalité. D'ailleurs une relation comme $2 \leq 3$ surprend le non initié. Comme il faut absolument faire reposer les débuts de l'apprentissage des mathématiques sur l'expérience de tous les jours, il est difficile d'imposer dès le départ le sens large pour des mots comme "inférieur" ou "supérieur". D'ailleurs le choix du sens large est plutôt une exception française. En anglais la relation large $x \geq 0$ se traduit par "x is non negative". Comment faire alors?

Compte-tenu du flou qui règne encore dans les usages, au niveau du *lycée* et même de l'*université*, la sagesse consiste à éviter un qualificatif comme "positif" pour n'utiliser que "positif ou nul" ou "strictement positif". Cela ne retire rien à la primauté de la relation large.

L'enseignement doit changer son fusil d'épaule au moment le plus adapté. Les carrés deviennent un jour des rectangles particuliers, les points deviennent des cercles, les cercles des ellipses etc. Parfois il est cependant judicieux de rappeler ses conventions.

Maintenant, dans le cas du sens à donner aux adjectifs *positif* et *négatif*, la question ne se pose qu'après l'introduction des nombres négatifs, en milieu de collège. On peut donc envisager de faire à ce moment le choix de l'inégalité large, tout en revenant sur les qualificatifs *inférieur* et *supérieur* que l'on traitera de la même façon. En même temps on sera impitoyable sur la façon de l'écrire, imposant le signe $\leq$.

Modes et temps.

On écrit le plus souvent les mathématiques au présent de l'indicatif. L'usage du futur ou celui du passé sont exceptionnels, le premier renvoyant à ce qui va suivre et le second à ce qui a précédé.

Cela étant, le subjonctif s'impose dans les cas prévus par la grammaire française, notamment après la conjonction "que". Voici quelques exemples.

Supposons que l'élément x appartienne au noyau de l'homomorphisme ϕ.

Choisissons un paramètre λ assez grand pour que l'équation $x^3+x^2-\lambda^2x+3=0$ ait trois racines réelles.

Considérons un nombre premier p tel que n ne contienne pas p^2 en facteur.

Prenons un nombre complexe z qui ne soit pas une racine quatrième de l'unité.

Le dernier exemple prête à discussion. L'usage du subjonctif est justifié par le caractère restrictif (répandu en mathématiques) de la proposition subordonnée relative. De même dira-t-on "je cherche un âne qui a l'oreille droite fendue" (un âne bien particulier, par exemple le mien) et "je cherche un âne qui soit raisonnablement docile" (mais aucun en particulier).

On fait aussi usage du mode conditionnel. Or le conditionnel irréel emprunte aux formes du passé. Dans ces conditions, il convient, en toute rigueur linguistique, de respecter la concordance des temps, écrivant par exemple ceci.

Si l'on imposait que x fût positif, alors le calcul ne pourrait plus se poursuivre.

Pour éviter ce genre de contrainte et pour ne pas passer pour un puriste, on privilégie souvent l'infinitif ou le participe, quand on ne choisit pas une solution brutale.

Imposons à ϵ d'être inférieur ou égal à $\alpha^3/4$.

Si l'on imposait à x d'être positif, alors ...

Imposer $x \geq 0$ empêcherait la poursuite du calcul.

Si nous nous donnions un élément x appartenant au noyau de ϕ, ...

Se donner un élément x du noyau de ϕ ...

Morphismes (*niveau université*).

Le titre pédant de cette entrée ne doit pas effrayer. La question concerne déjà la première année universitaire et elle a concerné, à une époque, le lycée.

Pour parler savamment, nous dirons qu'une catégorie n'est pas constituée uniquement d'objets, qu'elle comprend aussi, voire surtout, des morphismes. Cela veut dire que dès qu'on a introduit un certain type d'objet, on doit sans tarder parler de certaines applications privilégiées entre objets de ce type, qu'on appelle morphismes.

Voici un exemple tout simple pour comprendre; on y parle même des morphismes avant de parler des objets.

En algèbre linéaire, la question principale est la *linéarité*. C'est le fait pour une application de respecter les combinaisons linéaires, ce qui, pour une application u se ramène à

$u(x+y) = u(x) + u(y)$,

$u(\lambda x) = \lambda u(x)$,

pour tous vecteurs x, y et tout scalaire λ.

Une application qui vérifie ces propriétés est dite *linéaire*.

Il reste à préciser ce que sont les deux opérations qui apparaissent dans la propriété. Cela conduit à définir les espaces vectoriels. Ces derniers définis, dire qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire aura un sens précis.

Même si l'on observe un ordre plus classique, on ne parlera pas de sous-espace, a fortiori de produit ou de quotient, avant d'avoir parlé des applications linéaires. Il est important de noter que l'injection canonique d'un sous-espace dans un espace est linéaire. C'est même pour faire de cette injection une telle application qu'on impose à une partie les propriétés, notamment de stabilité, qui en feront un sous-espace[61].

Ce qu'on vient de dire vaudrait pour les groupes ou les anneaux; pour les espaces topologiques, c'est un peu différent.

Nommer (un objet). Voir comment *introduire*¶ un objet.

Non antériorité (principe de).

A l'intérieur d'une démonstration, on ne peut pas travailler avec un objet qui n'aura pas été au préalable *introduit*¶. C'est à l'occasion de son introduction qu'on aura précisé quelles limitations lui étaient assorties. Par la suite on ne pourra jamais desserrer ces limitations.

En principe on ne devrait pas les resserrer non plus. Cependant il arrive souvent qu'on se le permettre. Par exemple on dira ceci.

Considérons un nombre entier N dont nous verrons plus tard quelles conditions doivent lui être imposées.

L'avantage de la présentation ci-dessus est que lesdites conditions paraîtront moins parachutées. Cependant il faudra être très prudent. Les conditions en question devront pouvoir être formulées en fonction des éléments connus lors de la première introduction. Il n'est pas question de les faire dépendre de ce qui apparaîtra plus loin et pourrait alors dépendre à son tour de l'objet considéré, entraînant un épouvantable cercle vicieux.

[61] En termes savants, un sous-objet est un monomorphisme au-dessus d'une injection canonique; c'est en gros, à propos des groupes, le point de vue du livre de Mac Lane et Birkhoff de 1970.

Normes.

A propos des *conventions*¶, nous avons dit qu'on ne pouvait pas les choisir de façon complètement libre. Pour autant, les conventions servant à l'écriture des mathématiques ne sauraient être enfermées dans des normes, c'est-à-dire dans des textes produits par la législation ou la réglementation.

Il en existe, qui ne sont pas toujours universelles, qui ont tendance à varier suivant les pays et dans le temps. Les unes, qui portent explicitement le nom, sont établies par des organismes dont c'est la spécialité; elles concernent surtout les symboles et abréviations. Les autres, qui fixent les définitions, sont le fait de l'Inspection. Ceux qui ont la charge de l'élaboration de sujets pour les concours nationaux doivent s'y conformer.

Cependant il est souhaitable que l'activité mathématique dans son ensemble connaisse un peu de liberté et de variété. On ne peut pas changer d'un jour à l'autre une convention qui a été utilisée dans quantité d'excellents ouvrages. En même temps, il faut s'habituer à lire des livres un peu anciens ou étrangers.

Une raison pour laquelle il sera impossible d'adopter des normes légales est la polysémie du symbolisme.

Il est ainsi une notation particulièrement commode, qui est le trait de surlignement, lequel se lit "barre". En effet on peut aussi bien le faire porter sur une lettre seule ou sur un groupe.

L'usage le plus courant est la conjugaison complexe, dans une formule comme

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \ .$$

Mais il sert également pour désigner la fermeture en topologie et le complémentaire en probabilités. Quand on ne le trouve pas dans une limite supérieure ! Il serait dommage que quelque ayatollah vienne interdire le premier usage.

On noterait que le trait de soulignement n'a pas les mêmes avantages : il est en effet assimilé à un style typographique.

Noter. Voir comment *introduire*¶ un objet; voir également comment *poser*¶ une notation.

Numériques (fonctions).

Pour désigner les fonctions dont l'ensemble d'arrivée est la droite réelle[62], on parle de *fonctions numériques réelles*, ou de *fonctions réelles* pour simplifier.

Lorsqu'on veut étendre l'ensemble d'arrivée au-delà de la droite réelle, il y a deux façons, incompatibles entre elles, de le faire.

Selon Bourbaki, les *fonctions numériques* tout court ont pour ensemble d'arrivée la droite achevée $[-\infty, +\infty]$; les fonctions numériques *finies* sont alors les fonctions réelles.

[62] C'est un peu plus que demander que les valeurs soient réelles; les fonctions numériques réelles forment une algèbre sur le corps des nombres réels.

Sinon, lorsque l'ensemble d'arrivée est celui des nombres complexes, on peut parler de *fonctions numériques complexes*. Se passer du qualificatif numérique serait perturbant ici; le qualificatif complexe seul est à utiliser avec précaution, comme c'est le cas pour *simple*¶.

Objets structurés (*niveau université*).

Les objets rencontrés en mathématiques ne sont pas toujours ce qu'on pourrait appeler de simples *ensembles*¶[63]. En algèbre ce sont, le plus souvent, des ensembles munis de lois de composition. En analyse, par exemple, des espaces vectoriels munis de normes. On désigne par une seule lettre la donnée de l'ensemble et de sa structure (de groupe, d'anneau, d'espace vectoriel, sa norme etc.) en évitant de mentionner chaque loi ou élément de structure par un signe. On dira ainsi que si E, F sont des espaces vectoriels, l'on note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F; ce dernier dépend des lois de E et de F, lesquelles sont cachées dans les notations E, F.

Lorsqu'on veut parler des ensembles eux-mêmes, dits *sous-jacents*[64], on parle de *l'ensemble* E. Cependant on ne le précise que si c'est vraiment nécessaire. Par exemple, si G est un groupe, les éléments de G sont les éléments de l'ensemble G, alors que la loi de G est celle du groupe.

Cela dit, dans la présentation d'un objet classique, on doit préciser pour quelle structure on le considère. On parlera ainsi du *corps* $\mathbf{R}$, du *groupe additif* $\mathbf{R}$, de l'*espace topologique* $\mathbf{R}$ ou simplement de l'*ensemble* $\mathbf{R}$ ... où l'on peut aussi bien remplacer $\mathbf{R}$ par "des nombres réels".

Conformément aux exemples ci-dessus, la nature de l'objet est toujours donnée avant le symbole qui en est le nom, suivant le modèle ci-dessous.

Le professeur Rath, l'oncle Picsou.

Pour finir, un objet structuré est un ensemble *muni* d'une structure : c'est la donnée de l'ensemble et de la structure; ce n'est pas un ensemble pour lequel il existe une structure, ou que l'on puisse munir d'une structure. On évitera de le laisser croire.

On n'oubliera pas, par exemple, de dire en quoi un corps (commutatif) est un espace vectoriel sur lui-même.

Parenthèses et tirets.

Chaque fois que possible, on évitera les parenthèses et tirets dans un texte mathématique, sachant que les formules contiennent souvent les premières, ainsi que le signe "moins" qui se confond avec les seconds.

En particulier, on n'abusera pas de l'usage de resp., voire de respresp., que Bourbaki emploie volontiers pour économiser quelques caractères. En revanche on écrira volontiers ceci.

---

[63] Même si tous finissent par l'être d'une façon ou d'une autre en théorie des ensembles.

[64] On fait opérer ce qu'on appelle un foncteur d'oubli.

On considère deux droites affines D et D' de directions respectives Δ et Δ'.

Pertinence.

Certaines restrictions peuvent paraître superflues, dans la mesure où le propos resterait théoriquement correct sans leur présence. Cependant il ne faut pas avoir peur d'en formuler, pour placer tout de suite le lecteur dans le bon cadre.

Pour cette raison il faut résister à la tentation de la généralisation lorsque que cette dernière n'est que superficielle.

Au collège, par exemple, on dira de trois droites du plan, ou plus, qu'elles sont concourantes si elles ont un point commun. C'est une propriété que l'on rencontre souvent, notamment à propos des droites remarquables du triangle. Cependant c'est une propriété qui porte une information pertinente : trois droites en position générale ne le sont pas.

Bien évidemment, rien n'interdit a priori de décider qu'une famille de droites du plan est concourante dès lors que toutes les droites de la famille passent par un même point; ainsi deux droites seraient-elles concourantes si elles ne sont pas parallèles (et distinctes); une droite le serait toujours, et aucune davantage encore — mais c'est moins évident. Un tel choix n'apporterait rien, puisque d'autres termes plus adaptés existent. Surtout il polluerait le sens qu'on a voulu mettre dans la concurrence, laquelle s'adresse à des droites du plan dans leur ensemble, au nombre de trois au moins.

Lorsqu'il s'agira, par exemple, de proposer en exercice la démonstration d'une propriété portant sur trois points, propriété qui ne présenterait aucun intérêt lorsque deux ou trois des points sont confondus, on se gardera de laisser cette possibilité ouverte, au prétexte qu'elle ne complique que légèrement le travail.

En revanche, lorsqu'on présente un outil, mieux vaut ne pas prévoir des cas d'exception inutiles; par exemple, *au lycée*, on n'aura pas l'idée de définir le barycentre pour des points tous distincts, même s'il est facile de s'y ramener.

Toujours *au lycée*, on parle aujourd'hui de suites adjacentes[65]. Bien sûr, on sait que les sections commençantes majorées marquent un progrès par rapport aux coupures et les suites croissantes majorées par rapport aux suites adjacentes. Cela étant, si l'on tient à parler de ces dernières, voici comment l'on peut s'exprimer.

Une suite croissante (u_n) et une suite décroissante (v_n) sont dites adjacentes si $u_n \leq v_n$ pour tout n et si la suite positive et décroissante $(v_n - u_n)$ a pour limite 0.

Certains feront remarquer que la condition $u_n \leq v_n$ est inutile, parce qu'elle résulte du fait que $v_n - u_n$ tend vers 0. Cependant il y a une grande différence conceptuelle entre prendre la limite d'une suite quelconque, ce qui est le cas de $(v_n - u_n)$ si l'on ne signale pas sa monotonie, et prendre celle d'une suite positive décroissante. Dire que la limite est nulle signifie simplement qu'elle admet des termes arbitrairements petits, dans le sens suivant : étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver un terme u_n inférieur à ϵ.

[65] C'est le thème de la ROC du baccalauréat 2010, série S, en métropole.

Placer tout de suite le lecteur dans le bon cadre peut lui épargner l'effort d'avoir à reconstituer ce qu'on aurait cru bon de retirer.

A l'université, pour caractériser la convergence normale, on donnera l'existence d'une série *positive* convergente (a_n) telle que

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

pour tout x et pour tout n.

De même, dans l'énoncé du théorème de domination de Lebesgue, on imposera l'existence d'une fonction *positive* intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pour tout x et pour tout n.

La condition, pour la suite (a_n) ou la fonction g, d'être positive est forcée par la relation qu'on écrit. Cependant il faut l'imposer au départ, car la convergence et l'intégrabilité sont conceptuellement beaucoup plus simples dans le cas positif : c'est par exemple la finitude de $\sum a_n$ ou (pour g mesurable) de $\int g$.

Si l'on avait donné la majoration d'abord, pour indiquer ensuite la nature de (a_n) ou de g, on aurait pu se passer de la restriction, mais elle resterait conseillée sous la forme :

... où la série *positive* (a_n) est convergente.

Il convient également de laisser au lecteur, élève ou étudiant par exemple, la possibilité de reconstituer lui-même le discours, en lui en dévoilant la trame.

Quand on définit un sous-groupe H d'un groupe G, on doit d'abord mettre en évidence que c'est un groupe, précisément un groupe porté par une partie de G et dont la loi est induite par celle de G. On demandera donc dans cet ordre :

si x, y sont dans H, alors xy est aussi dans H (pour induire la loi);

l'élément neutre 1 est dans H (c'est l'élément idempotent);

si x est dans H, alors x^{-1} est aussi dans H.

Ensuite seulement, on peut condenser les conditions, si l'on y tient[66].

Une partie non connexe A d'un espace métrique M peut être partagée en deux parties ouvertes de A, c'est-à-dire en des traces disjointes de deux parties ouvertes de M. S'il est vrai qu'on peut aussi prendre les traces de deux parties ouvertes disjointes de M, on se gardera de cette simplification illusoire; indépendamment du fait que la portée des définitions compte, il faut tout de suite mettre le lecteur dans le cadre naturel.

Pour écrire la propriété de Heine-Borel sans le cas d'une partie A de l'espace topologique X, on se placera d'abord sur le sous-espace A; on considèrera donc un recouvrement ouvert induit

$$A = \bigcup_i (U_i \cap A) \ ,$$

qu'on transformera ensuite en

$$A \subset \bigcup_i U_i \ .$$

[66] C'est à peu près l'ordre choisi par le cours de Chambadal et Ovaert de 1966.

Ponctuation.

La ponctuation n'est pas moins obligatoire pour un texte mathématique que pour un autre. Cela signifie que l'on doit écrire des phrases débutant par une majuscule et terminées par un point. Cependant cela n'est pas suffisant. Il faut également séparer les propositions principales par une virgule ou une conjonction de coordination "et", "ou". Il faut encore savoir utiliser le point-virgule.

En revanche il ne faut pas abuser des deux points ":". Ce signe est utilisé pour annoncer une énumération, une citation ou une explication. C'est le dernier cas qu'on rencontre en mathématiques, où il joue un peu le rôle du point-virgule. En tout cas, on ne le fera jamais suivre une conjonction de subordination.

La présence de formules centrées n'est pas une excuse pour déroger à ces règles. Une formule est considérée comme une proposition. Elle doit soit être suivie d'une ponctuation, soit être complétée convenablement en début de la ligne suivante.

Même lorsque l'on écrit au *tableau*¶ et que l'on utilise des signes sténographiques, on devrait faire l'effort de mettre la ponctuation (de même que les articulations en clair). Voici un exemple.

On a

$$D_1 \;//\; D_2$$

et

$$D_2 \;//\; D_3 \;;$$

donc

$$D_1 \;//\; D_3 \;.$$

Par ailleurs, une difficulté spécifique aux textes mathématiques est la gêne que peut présenter la proximité entre un signe de ponctuation grammatical et une formule. En effet les formules peuvent elles-mêmes contenir un point, une virgule ou un point-virgule. Aussi convient-il de respecter la règle suivante, dite de Godement : en dehors des listes, aucune formule ne doit suivre immédiatement un signe de ponctuation[67]. Quand on le peut, on évite également de mettre un signe de ponctuation après la formule, mais ce pari est pratiquement impossible à tenir.

Poser.

On emploie très souvent le verbe *poser* en mathématiques, notamment pour *introduire*¶ un objet. Cependant on n'emploie pas ce verbe de la même façon que les verbes *appeler*, *nommer* ou *désigner par*. Les derniers verbes gouvernent un complément et un attribut de ce dernier, l'objet qui est désigné et le nom par lequel il l'est. Ainsi Nicolas Boileau s'exprimait-il ainsi.

J'appelle un chat un chat, et Rollet un fripon.

En revanche le verbe *poser* admet juste un complément. On pose une relation, comme on le fait pour une équation, un principe. Ce sera la plupart du temps une

[67] Dans les manuels du lycée des années 60, cette règle était scrupuleusement observée; aujourd'hui les documents les plus officiels y attentent des dizaines de fois par page.

égalité qui, de fait, va nommer un objet. On écrira ainsi l'une des phrases qui suivent, au choix.

Posons $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Posons $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \gamma$.

Voir également l'usage de la conjonction *que*¶.

Par ailleurs, à propos des *quantificateurs*¶, nous avons expliqué comment les poser. Cependant, si l'on rencontre le verbe dans cette situation, c'est dans un texte sur le raisonnement ou sur l'écriture. On dit rarement "posons le quantificateur universel". Pas plus que : "tentons de raisonner sainement".

Précisions.

Le discours mathématique n'a pas toujours la précision absolue que certains lui prêtent. D'abord, pour être simplement lisible, il doit admettre des abus et des ellipses. Ensuite certaines conventions varient suivant les époques, les écoles, voire les individus. Ainsi, autant faut-il savoir être bref à certains moments, autant faut-il ne pas avoir peur de mettre les points sur les i à d'autres.

Lorsque l'usage en mathématiques diffère de l'usage courant, un peu de redondance n'est pas honteux. On trouvera des exemples à propos des cas *marginaux*¶. De la même façon, on dira, suivant le cas, que l'ensemble E contient *au moins* deux éléments ou *exactement* deux éléments. Pour une propriété concernant des éléments de E, on précisera, suivant le cas, qu'ils sont à prendre *deux à deux* ou *dans leur ensemble*.

On prêtera attention à l'utilisation du qualificatif "autre" en mathématiques. Si, après avoir considéré un élément x on en considère un autre y, cela ne veut pas obligatoirement dire que y est différent de x. On voulait dire qu'on considérait, une nouvelle fois, un élément. Aussi précisera-t-on qu'on considère un élément y distinct de x.

Lorsqu'on considère une propriété qui concerne plusieurs éléments, il faut être soigneux dans l'expression. Le qualificatif que l'on emploiera s'appliquera à chacun. Des "nombres réels non nuls" sont des nombres réels qui sont tous non nuls. En revanche, pour des "nombres réels non tous nuls", on demande que l'un au moins ne soit pas nul.

A propos de fonctions réelles, un certain flou existe qu'il convient de lever. La relation d'ordre $f \leq g$ est définie comme : $f(x) \leq g(x)$ pour tout x. Par suite une fonction positive est une fonction qui prend partout des valeurs positives; on entend par là qu'une fonction positive ou nulle est une fonction qui prend partout des valeurs positives ou nulles. Mais, stricto sensu, une fonction strictement positive n'est pas une fonction qui prend partout des valeurs strictement positives; c'est une fonction à la fois positive (ou nulle) et distincte de la constante 0. Si l'on veut imposer $f(x) > 0$ pour tout x, il faut parler d'une fonction *à valeurs* strictement positives ou *partout* strictement positive.

Confondre "f est strictement positive" et "f prend partout des valeurs strictement positives" est commettre une erreur du même ordre que celle des Anglo-saxons qui emploient le qualificatif *nonincreasing* pour les fonctions croissantes au sens large. C'est le sens de "never increasing" qu'ils donnent, sachant que "increasing" traduit la croissance au sens strict.

Des adjectifs comme *quelconque*, *arbitraire*, ne doivent en principe pas modifier le sens du discours; cependant leur usage peut être, dans certains cas, utile à la compréhension.

Propriété, propriété caractéristique.

En français, une propriété est une qualité qu'une classe donnée d'objets possède en propre; mais ce n'est pas une exclusité : d'autres objets peuvent la partager.

En mathématiques il en est de même. Par exemple "avoir des diagonales se coupant en leur milieu" est une propriété des rectangles. Cela signifie que tout rectangle aura des diagonales se coupant en leur milieu; en revanche certains quadrilatères qui ne sont pas des rectangles le peuvent également.

Derrière toute propriété, se dissimule une implication logique ou une condition nécessaire. Dans le cas de notre exemple, on peut formuler la propriété de l'une ou l'autre façon qui suit.

Si le quadrilatère R est un rectangle, les diagonales de R se coupent en leur milieu.

Pour que le quadrilatère R soit un rectangle, il *faut* que les diagonales de R se coupent en leur milieu.

Lorsqu'il s'agit d'une propriété exclusive, que possèdent les objets de la classe et eux seuls, on parle de *propriété caractéristique*. On parle encore de *caractérisation*. Par exemple "avoir des diagonales se coupant en leur milieu" est une propriété caractéristique des parallélogrammes. Parmi les quadrilatères, seuls les parallélogrammes ont des diagonales se coupant en leur milieu.

Derrière une propriété caractéristique se cache une équivalence logique ou une condition nécessaire et suffisante. On laisse le lecteur compléter les deux assertions ci-dessus lorsqu'il s'agit de rectangles. Par exemple on dira ceci.

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Dans un tel cas, il est fortement déconseillé d'utiliser un "si" simple. C'est ce que suggère l'usage général mais ce n'est pas conforme, pour une fois, à l'usage mathématique. Ce faisant, on autoriserait des quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes à posséder la propriété. Dans un tel cas, le "si" simple est réservé aux définitions.

Maintenant il arrive que l'on parle aussi de propriété caractéristique pour ce qui est en réalité une propriété de définition. Mise à part la réserve précédente, cela n'engendre pas de difficulté particulière.

On peut mentionner des propriétés. A proprement parler on ne les énonce pas. En revanche on peut énoncer une proposition concernant une propriété, comme dans ce qui suit.

Théorème (propriété caractéristique des parallélogrammes). Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Ici c'est un théorème qu'on énonce ou qu'on formule.

Maintenant on peut utiliser le pluriel "**Propriétés des** ..." pour titrer un paragraphe contenant des énoncés, pour lesquels il n'est pas indispensable non plus de parler de proposition ou de théorème.

Il faut voir que les énoncés expriment presque toujours une propriété d'un objet mathématique, même si ce dernier n'est pas évident, demandant d'élever le niveau[68].

Purisme.

Dans l'écriture des mathématiques, notamment dans la rédaction des problèmes d'examen ou de concours, on se trouve souvent devant un choix, celui de privilégier ce qui est "pur" ou bien ce qui est authentique.

Considérons une variante d'un exemple donné à propos de l'insertion de *texte dans une formule*¶. Voici deux façons de rédiger une même question.

a) Montrer que l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est continue.

b) Quelle valeur faut-il donner à la fonction $\sin x/x$ en 0 pour en faire une fonction continue sur $\mathbf{R}$?

La version a) est "pure" à l'aune des canons de la rédaction des problèmes de concours. La fonction est définie suivant les règles, ses ensembles de départ et d'arrivée étant précisés, comme ses valeurs en tout point. La consigne est sans ambiguité : la façon est continue ou elle ne l'est pas. Cependant ce n'est pas ainsi que sa question se pose. Pourquoi avoir pris $f(0) = 1$ d'ailleurs?

La version b) est "impure". Il faut interpréter pour comprendre que la fonction est naturellement définie en dehors de 0 et qu'on veut la prolonger; en fait il y a deux fonctions en présence. La consigne n'est même pas claire : faut-il justifier le choix d'une valeur en 0? Montrer qu'un tel choix est possible? Qu'il n'y en a qu'un? Oui bien sûr, mais ce n'est pas explicité. Cependant c'est la vraie question. C'est la version "authentique".

Il faudrait accorder la priorité à ce qui est authentique. Comme on le voit avec l'exemple précédent, ce n'est pas toujours facile. Il est bien plus commode de se réfugier dans ce qui est cadré.

Voici un autre exemple, de niveau universitaire. Il s'agit, dans les deux cas, de montrer qu'une certaine fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.

a) Pour $x \geq 0$ donné, on considère la fonction qui à t associe

$$f_x(t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt} .$$

[68] Ce peut être une classe de figures, une catégorie, un foncteur etc.

Supposant $x > 0$, montrer que f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer, par ailleurs, que f_0 admet une intégrale convergente sur $]0, +\infty[$.

Dans les deux cas, on pose

$$F(x) = \int_0^\infty f_x(t)\mathrm{d}t \ .$$

...

b) On considère, pour $x \geq 0$, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t \ .$$

Quel sens faut-il donner, suivant les cas, à cette intégrale? ...

Dans la version a) on n'écrit pas de formule avant d'avoir fait vérifier qu'on pouvait le faire, en précisant dans quel cadre. Dans la version b) c'est le contraire. On demande d'interpréter ce qui est écrit.

On voit évidemment les avantages de la formulation b). La réponse n'est pas donnée dans la question, laquelle est ouverte. Cependant cette version n'est pas à l'honneur aujourd'hui.

QED.

Les intiales QED, pour *quod erat demonstrandum*, sont la version internationale du CQFD français. Il n'est absolument pas pédant de les employer.

Quantificateurs.

L'usage des quantificateurs doit être modéré. D'abord on évitera les symboles $\forall$, $\exists$ dans le discours, sauf quand il s'agit de logique formelle, pour énoncer un axiome de la théorie des ensembles par exemple. En effet le symbolisme de la logique obéit à une grammaire très précise, en dehors de laquelle il n'est point de salut. Par conséquent l'utilisation de tels symboles comme raccourcis sténographiques est particulièrement mal venue.

Cela étant dit, l'usage des locutions "quel que soit" ou "il existe" doit également être modéré, surtout en ce qui concerne la première. La raison en est que la variable sur laquelle porte le quantificateur est en principe muette. On ne peut pas s'en servir pour manipuler, calculer ou raisonner, sans avoir posé le quantificateur. Voir comment *introduire*¶ un objet.

Désormais on s'intéresse surtout au *quantificateur universel*, qui hélas fleurit aujourd'hui comme élément décoratif dans les formules.

Le quantificateur universel inutile. Il ne sert à rien de placer systématiquement des quantificateurs universels devant chaque ligne. En logique, les relations $R(x)$ et $(\forall x)R(x)$ sont équivalentes. Par ailleurs, si l'on veut mettre des restrictions, on s'écartera souvent du cadre proprement logique et on les placera plus volontiers après; voir ce qu'on dit à propos du domaine de *validité*¶ d'une relation.

Le quantificateur universel nuisible. Dans une relation entre fonctions, un quantificateur universel portant sur la variable fait obstacle. Il faudrait le poser, fixant alors un point x. Mais cela interdirait par exemple de dériver. Voir des exemples à propos des *fonctions*¶ .

Le quantificateur universel implicite. Presque tous les énoncés débutent par un quantificateur universel. Voici un exemple.

Proposition. Un rectangle a des diagonales égales.

Démonstration. Soit ABCD un rectangle ...

Il y a bien un quantificateur ici. Et il a fallu le poser pour démontrer. Voici un autre exemple. On veut démontrer que la suite de vecteurs v_1, v_2, v_3 est libre, autrement dit ceci.

La relation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Il s'agit de montrer que toute combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul a tous ses coefficients nuls. Cet exemple relève aussi d'une problématique d'*unicité*¶. On écrira ce qui suit pour démarrer.

Supposons donnés des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ ...

Supposer qu'il existe de tels scalaires serait désastreux : il en existe toujours et on ne pourra rien en tirer.

Ce quantificateur que l'on ne voit pas est le plus fréquent et doit le rester. Voir comment *introduire*¶ un objet.

Les quantificateurs pratiques. La définition formalisée de la limite ou celle de la continuité reposent sur des quantificateurs. Cependant il est conseillé aux non spécialistes de s'exprimer comme suit, ce qui leur simplifiera le travail.

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ vérifiant ...

On saura que, pour établir la propriété, il faudra se donner un nombre $\epsilon > 0$, puis chercher un nombre $\eta > 0$ convenable. Pour l'utiliser, on attendra de se voir donné un $\epsilon > 0$ par l'enchaînement naturel de la démonstration en cours, pour choisir un nombre $\eta > 0$ à ce moment-là.

Voir l'entrée sur *continuité, limite*¶ pour davantage de détails.

Notons bien ceci, qui semble aller contre les recommandations générales. Dès lors qu'on aurait pris la responsabilité d'inclure une telle définition formalisée dans les apprentissages, il serait dangereux de camoufler les quantificateurs qu'elle comporte ou de jouer sur leur place naturelle. Comment le débutant pourrait-il s'y retrouver dans un tel cas?

Le quantificateur existentiel implicitement déposé. Voici ce que l'on trouve très communément écrit, dans le courant d'une démonstration.

Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un point a tel que $f(a) = b$.

En principe la lettre a est ici muette; on ajouterait : puisqu'il en existe, choisissons-en un que l'on appelera a. Mais cette exigence est très peu respectée par les auteurs. Cela dit, on pourra toujours écrire ce qui suit, en prenant le risque d'être un peu lourd.

Puisque le théorème des valeurs intermédiaires le permet, choisissons un point a tel que $f(a) = b$.

En revanche, dans une définition ou plus généralement pour formuler une hypothèse, le caractère muet de la lettre sur laquelle porte le quantificateur doit être absolument respecté[69].

Pour cette raison, il est des circonstances où il faut éviter d'utiliser un quantificateur. On s'exprimera notamment comme suit à propos de limites.

Soit l un nombre réel; si la suite (u_n) admet l comme limite ...

Soit l un nombre réel; si la suite (u_n) converge (ou tend) vers l ....

Voir encore à ce sujet comment *introduire*¶ un objet.

Que (conjonction de subordination).

En mathématiques, on transforme volontiers les relations, qui sont des propositions, en groupes nominaux. Cela veut dire qu'on omet généralement la conjonction "que".

Par exemple, on dira :

"posons $a = \sqrt{2}$"

quand ,dans la langue littéraire, on écrira, comme Jacques François Bertrand :

"... poser que la terre n'ait pas d'autre chaleur que celle qui lui est communiquée par les rayons du soleil".

Avec le verbe *supposer*, la règle est la même. on dira :

"supposons $a = \sqrt{2}$"

ou bien :

"supposons que x soit égal à $\sqrt{2}$".

En tout cas, on ne fera pas suivre la conjection de deux points[70].

Récurrence (raisonnement, construction par).

Le raisonnement par récurrence fait partie des éléments incontournables du discours mathématique. Nous ne considérerons pas ici les récurrences transfinies, qui portent sur les ordinaux quelconques, pour nous limiter aux nombres entiers naturels. Cependant le fondement est toujours le même; c'est la propriété de bon ordre : tout ensemble non vide de nombres entiers naturels possède un plus petit élément[71].

Supposons donc que nous ayons à démontrer une propriété portant sur un nombre entier naturel. Pour simplifier nous supposons qu'elle commence au rang 0; dans le cas contraire, on adaptera.

---

[69] On n'imitera pas certains documents officiels pour le lycée, où l'on trouve : s'il existe un réel l tel que $\lim u_n = l$ et $\lim w_n = l$ alors $\lim v_n = l$.

[70] En anglais, on utilise plus volontiers la conjonction *that*; en revanche l'abus des deux points (*colon*) est tout aussi déconseillé.

[71] Tout repose en fait sur la construction de l'ensemble $\mathbf{N}$, laquelle n'utilise que l'axiome de l'infini.

Récurrence simple. Cette variante est la plus commune. On l'utilise quand on sait passer du rang n au rang $n+1$ sans avoir besoin des autres rangs antécédents. La stratégie de démonstration est présentée comme suit.

Montrons d'abord la propriété au rang 0.

...

Supposons ensuite la propriété à un rang n donné. Etablissons la au rang $n+1$.

...

Voilà comment on justifie la stratégie. Supposons, par l'absurde, que la propriété ne soit pas vraie à tous les rangs. Soit alors n le plus petit rang pour lequel elle soit fausse. Ce ne peut être 0, puisqu'on l'y a démontrée. On peut donc s'intéresser au rang $n-1$ pour lequel elle est vraie. Mais elle est alors également vraie à l'ordre n, comme on l'a montré, d'où la contradiction.

Noter qu'il n'est pas besoin de sous-titres pour présenter un raisonnement par récurrence. Le point important de la seconde partie est que le rang n est *donné*. On peut ajouter qu'il est arbitraire; c'est une *précision* qu'il faut probablement donner, par exemple oralement, aux débutants; mais c'est superflu. Voir comment *introduire*¶ un objet.

Récurrence sur l'ensemble des prédécesseurs. Cette variante est utilisée quand on a besoin de plusieurs rangs antécédents pour passer à un rang donné. La stratégie de démonstration est présentée comme suit.

Supposons la propriété à tous les rangs p tels que $p < n$, pour un rang n donné. Etablissons la au rang n.

...

Voilà comment on justifie la stratégie. Supposons, par l'absurde, que la propriété ne soit pas vraie à tous les rangs. Soit alors n le plus petit rang pour lequel elle soit fausse. Elle est alors vraie à tous les rangs $p < n$, d'où la contradiction.

On remarquera que cette dernière forme ne comporte pas d'initialisation. Cependant il faut aussi envisager le cas où $n = 0$, pour lequel rien n'est supposé puisqu'il n'y a aucun rang $p < 0$. Il se peut qu'on ait à faire un raisonnement particulier dans un tel cas. Autrement dit, l'initialisation est bien là.

Voici un exemple. Il s'agit de montrer qu'étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbf{Q}[X]$, où B est non nul, on peut trouver un couple (Q, R) de polynômes de $\mathbf{Q}[X]$ et un seul vérifiant

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B \ .$$

Soit bX^β le terme dominant de B, où $\beta = \deg B$ et $b \neq 0$.

Nous allons faire une récurrence sur le degré α de A. Supposons la propriété établie si $\deg A < \alpha$ et montrons là pour $\deg A = \alpha$.

Si $\alpha < \beta$, alors la propriété cherchée implique $\deg(BQ) < \beta$, de sorte que $Q = 0$, puis $R = A$ nécessairement; inversement ces valeurs conviennent.

Si $\alpha \geq \beta$, alors A est non nul; soit aX^α son terme dominant. Posons

$$A' = A - \frac{a}{b} B \ .$$

La propriété cherchée équivaut à

$$A' = B\big(Q - \frac{a}{b}\big) + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B \ .$$

Comme $\deg A' < \alpha$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence.

Construction par récurrence. La construction par récurrence ne se ramène en général pas à une démonstration par récurrence. Alors que la seconde repose simplement sur la construction de l'ensemble des nombres entiers, la seconde repose sur un axiome spécifique; nous y reviendrons.

Voici comment présenter la construction par récurrence d'une suite (x_n) dont l'indice démarre à 0, sous une forme intermédiaire entre les deux modèles précédents.

Construisons d'abord x_0.

...

Supposons maintenant la suite construite jusqu'à un rang n donné. Construisons x_{n+1}.

...

La différence avec la démonstration par récurrence est qu'à chaque stade on a un choix éventuel à opérer. S'il y a en effet existence et unicité, comme pour la construction des opérations sur les nombres entiers par exemple, on peut se ramener au raisonnement par récurrence.

Ce n'est pas si simple dans le cas général. On peut poser la possibilité de procéder comme indiqué en axiome de la théorie des ensembles. On parle de l'axiome du *choix dépendant* ou du principe de *récurrence à choix multiples*[72].

Regrets.

En principe, comme nous l'avons dit à propos du principe d'*antériorité*¶, on ne devrait pas revenir sur des objets mathématiques déjà introduits pour en modifier les propriétés, autrement que pour les renforcer éventuellement.

Il est cependant admis que l'on puisse le faire de façon très occasionnelle et en s'entourant de précautions. Cette façon de faire peut être qualifiée de *regret*.

Supposons, par exemple, que l'on doive établir une propriété pour x et pour $x+1$. Pour éviter d'avoir à se répéter, la manière orthodoxe de procéder consisterait par exemple à considérer $x+\epsilon$, où $\epsilon = 0$ ou 1. Maintenant, on peut aussi traiter complètement le cas de x, puis revenir sur ce qui a été fait en proposant d'y remplacer x par $x+1$; il faudra expliquer ce qui change et le lecteur devra vous faire confiance. Voilà pourquoi c'est un mode de rédaction dont il ne faut pas abuser.

En tout cas, il ne saurait y avoir de regrets dans un *énoncé*¶. Une fois qu'on s'est donné un objet, c'est toujours avec lui qu'il faut travailler; on ne peut que lui ajouter des propriétés. Maintenant, pour être sûr de ne pas prendre de risque, il suffit simplement d'éviter les énoncés à rallonge.

---

[72] C'est dire que la limite projective d'une suite d'ensembles non vides, reliés par des applications de transition surjectives, est non vide; c'est une conséquence de l'axiome du choix général, par le théorème de Zorn; mais c'est plus que l'axiome du choix dénombrable.

Si.

L'usage de la conjonction de subordination *si* est très courant en mathématiques. On dit ainsi

"si A, alors B"

ou

"B si A"

pour exprimer que A implique B.

Dans la première formulation, ajouter "alors" n'est pas indispensable; le plus souvent on le fait pour éviter qu'un symbole mathématique suive immédiatement une virgule.

Dans la seconde formulation, la conjonction "si" peut-être remplacée par "dès que", "dès lors que", "pour peu que".

Dans tous les cas, le *si* simple ne traduit qu'une implication, une condition suffisante, un critère. D'ailleurs, on peut encore dire

"pour que B, il suffit que A.

Pour exprimer une équivalence, une condition nécessaire et suffisante, une caractérisation, on dira

"B si et seulement si A".

Voilà pour la règle générale. Il reste que le bon usage — qui n'est peut-être pas pédagogiquement vertueux pour autant — veut que l'on se contente d'écrire un *si* simple, ou un équivalent, lorsque le contexte attend une condition nécessaire et suffisante. Cet usage est conforme à celui de la langue littéraire. Voici quelques exemples.

Nous connaissons de nombreuses caractérisations des rectangles. Ainsi un parallélogramme est un rectangle s'il possède un angle droit.

Le polynôme p est divisible par $(x-a)^2$ si et seulement si a est une racine double de p, autrement dit si $p(a)$ et $p'(a)$ sont nuls.

Maintenant d'autres expressions traduisent aussi une équivalence. C'est le cas de "seulement si", de "pourvu que". Cependant leur usage n'est à conseiller que lorsqu'on est vraiment sûr de ne pas perturber le lecteur.

A l'inverse, pour traduire une implication simple, il est plus prudent d'assortir le *si* simple d'une *précision*¶. On écrira notamment comme suit.

Une série (u_n) est absolument convergente si, par exemple, son terme général est un $O(1/n^2)$.

Simple, simplement.

L'adjectif *simple* et l'adverbe *simplement* peuvent avoir un sens spécifique en mathématiques, à côté de celui qu'il a couramment. Par exemple un espace *simplement connexe* n'est pas simplement un espace connexe.

Cependant cela ne devrait pas avoir d'incidence avant l'université.

Soit, soient.

En mathématiques, on emploie le subjonctif à valeur impérative “soit” dans deux cas principaux. Voir aussi comment *introduire*¶ un objet à ce sujet.

Ce peut être, avec l’article indéfini, pour nommer un objet bien défini. Dans ce cas, on peut le remplacer par : “on note”, “on nomme”, “on appelle”.

Soit α la plus petite racine de l’équation $x^2 + mx - 1 = 0$.

Ce peut être surtout, avec l’article indéfini, l’introduction d’une nouvel objet. On le fait quand on pose un *quantificateur*¶ universel ou une implication. Dans ce cas, on peut le remplacer par : “on se donne”, “on considère” etc.

Soit α une racine de l’équation $x^2 + mx + 1 = 0$.

On n’a pas à vérifier au préalable l’existence d’un tel objet. Cependant, une fois que le “soit” est prononcé, l’objet existe pour le temps d’un raisonnement. On entre en effet momentanément dans une *fiction*¶. Comme pour l’ordre divin “fiat lux”, l’injonction ne saurait être contestée.

Le pluriel “soient” peut être utilisé, de la même façon, pour *introduire plusieurs objets*¶.

Entre utiliser le pluriel ou répéter le singulier, le choix dépendra du contexte. Veut-on introduire simultanément plusieurs éléments? Le pluriel est indiqué. Faut-il les introduire l’un après l’autre? Répéter le singulier est sans doute préférable.

On notera que la grammaire française ne fait que tolérer le pluriel, considérant plutôt “soit” comme invariable. Par conséquent c’est une dérogation qu’on s’accorde en mathématiques, bien commode il est vrai. Avec le pluriel, on s’attend en effet à plusieurs objets nouveaux. Cela facilite la lecture, comme, de façon générale, le fait l’accord.

On se permet la même entorse en accordant la locution “étant donné” placée devant ce qui est donné. Rappelons que la grammaire française veut que l’on n’accorde que lorsque l’information connue au moment d’accorder le permet. Le principe est assez général; les formes interrogatives ne font même pas exception, puisqu’on accole le pronom au verbe par un tiret. Les mathématiques ont cependant des raisons de demander un traitement spécial. Les phrases y sont souvent plus tourmentées et le besoin de savoir à qui se rapporte quoi y est plus fréquent.

Subsidiarité (principe de).

Invoquer le principe de subsidiarité est une façon pédante de dire qu’on ne prend pas un marteau pilon pour écraser une mouche.

Dans l’écriture des mathématiques, on privilégiera, dans les limites de la clarté du texte, le mode d’expression le plus terre-à-terre, le moins élevé dans la hiérarchie de la formalisation.

Ce principe est très sensible au niveau de culture mathématique auquel on se place. Nous avons ainsi dit qu’il fallait éviter d’abuser du symbolisme de la théorie des ensembles, de préférer “x dans A” à “$x \in A$” par exemple. Cela ne vaut plus une fois que la théorie des ensembles est complètement assimilée.

On écrira par exemple ceci.

Soient a, b, c des coefficients réels non tous nuls.

Bien sûr, il est permis d'écrire $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, mais, au lycée, mieux vaut ne pas le faire. Certes la première écriture exige un petit effort de lecture et d'interprétation[73]. Au contraire on acceptera la seconde sans sourciller. Cependant on aura probablement compris cette dernière à l'envers. Cela étant, comparer les deux versions est un bon exercice.

C'est toujours le principe de subsidarité qui veut qu'on limite les recours à la logique formelle, a fortiori l'usage du formalisme logique.

Par exemple, pour conclure la résolution d'une équation du second degré, on dira notamment ceci.

Les solutions sont $x' = 0$ et $x'' = 4$.

On évitera d'en passer par l'*équivalence logique*¶ avec

$$(x = 0) \text{ ou } (x = 4) .$$

Voir l'entrée correspondante.

Symboles (polysémie des).

Contrairement à une idée répandue, l'utilisation de symboles n'apporte pas automatiquement plus de précision que le discours littéraire. En fait les symboles ont un sens qui dépend largement du contexte. C'est ainsi que les lettres $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, en gras dans la typographie soignée et en style dit "éclairé" au tableau, désignent un ensemble ou un ensemble ordonné pour la première, un groupe additif ou un anneau pour les autres, un corps, voire un corps valué pour les deux dernières.

En revanche $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$ désignent exclusivement le groupe multiplicatif — i.e. pour la multiplication — des éléments inversibles de l'anneau correspondant; de plus $\mathbf{R}^*_+$ est le sous-groupe des éléments positifs de $\mathbf{R}^*$.

On n'omettra pas de précéder la première utilisation d'un nom en donnant la qualité : *une droite* D, *une matrice* M ...

Voir encore à ce sujet l'entrée sur les *objets structurés*¶ et celle sur le *genre*¶.

Une attention particulière doit être apportée aux séries. La *série de terme général* u_n, ou *série* (u_n) pour faire plus court, est souvent notée avec le signe $\sum$, par les Anglo-saxons notamment. Ce n'est probablement pas optimal pour un débutant, puisqu'on confond alors la série et sa somme (qui n'existe pas toujours). Mais c'est un risque qu'on peut prendre en l'assumant alors complètement. En revanche on ne cherchera pas à distinguer entre

$$\sum u_n \quad , \quad \sum_n u_n \quad , \quad \sum_{n \geq 0} u_n \quad , \quad \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n \, .$$

[73] Il s'agit, malgré tout, d'un ésotérisme mathématique; on devrait parler de coefficients "qui ne sont pas tous nuls".

Les deux premières variantes sont simplement moins explicites quant à l'indice et à l'ensemble dans lequel il varie. Pour autant la précision est aussi utile pour la donnée abstraite que pour la somme. Pour le premier on aurait aussi le choix entre

$$(u_n) \quad , \quad (u_n)_n \quad , \quad (u_n)_{n\geq 0} \quad , \quad (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad , \quad (u_n)_{n=0}^{\infty} \; .$$

Par ailleurs on évitera de surcharger les symboles. Par exemple, on pourra écrire

$$S = \sum_p u_p$$

où la somme est étendue aux nombres premiers p compris entre 2^n et $2^{n+1} - 1$.

Par ailleurs on évitera les symboles qui ne sont guère plus que des raccourcis sténographiques[74]. On évitera aussi les signes d'appartenance ou d'inclusion. Dans chaque cas l'expression usuelle est supérieure. Les symboles en question sont à réserver à l'écriture au *tableau*, ce qui n'est pas sans poser de problème, comme on en parle à l'appendice correspondant.

Le symbolisme s'impose dès qu'il permet le calcul, ce qu'il convient de prendre dans un sens très large [75].

L'extrême réserve qu'il convient de manifester vis-à-vis des *quantificateurs*¶, en dehors de leur utilisation en logique formelle, est d'une autre nature. Voir l'entrée correspondante.

Symétrique (relation).

Beaucoup de relations binaires sont symétriques. C'est le cas des relations d'équivalence, mais ce n'est pas le seul. On n'explicitera pas la propriété de symétrie, qui est en général évidente, mais on en tiendra compte pour présenter une définition.

A un niveau relativement élémentaire, on commencera par la version symétrique et on complètera par les deux versions asymétriques. Voici deux exemples.

On dira que des droites D et D' sont parallèles (sous-entendu entre elles) si elles n'ont aucun point commun. On dira aussi que D est parallèle à D' ou que D' est parallèle à D [76].

On dira que des nombres entiers m et n sont premiers entre eux si (par exemple) leur PGCD est 1. On dira également que m est premier avec n ou encore que n est premier avec m.

A un niveau plus élevé qui resterait à définir, en revanche, on pourra considérer que le pli est pris.

---

[74] Il en est ainsi de beaucoup de symboles introduits au collège, comme celui du parallélisme, de l'orthogonalité.

[75] Par exemple un diagramme commutatif permet une forme un peu particulière de calcul.

[76] Il est étonnant de constater que les manuels du collège, s'adressant pourtant à un public non averti, ignorent ce genre de précaution.

Synonymes.

De même que la termonologie mathématique est largement polysémique, un même mot pouvant avoir un sens différent en fonction du contexte, de même, dans un contexte donné, peut-on rencontrer des synonymes.

Il faut résister à la tentation consistant, dans un cas de synonymie, à rompre cette dernière en donnant un sens particulier à chaque terme. Par exemple, on ne singularisera pas les *fonctions*¶ parmi les applications, en ne les supposant pas partout définies.

Autre exemple, les termes de *suite* et de *série* sont naturellement synonymes, en mathématiques et plus précisément en théorie des ensembles, puisqu'ils correspondent exactement à la même donnée. On évitera donc de considérer une série comme un couple de suites.

Cela dit, le choix du mot dépend de l'usage qu'on a en vue et la synonymie ne s'étend pas aux *locutions*¶ qu'on peut construire à partir de ces mots. Dans la langue courante, on peut très souvent échanger les mots "seigneur" et "maître", qui traduisent le mot latin *dominus*. Cependant on n'échangera jamais "grand seigneur" et "grand maître". On n'échangera pas davantage les locutions "suite convergente" et "série convergente".

Texte (dans les formules).

En principe on ne doit pas inclure de texte dans les formules. Déjà on a vu les difficultés inhérentes à l'insertion de formules dans le texte, résolues dans le respect des règles grammaticales au prix de précautions contraignantes. Vue la divergence entre la grammaire de la langue et celle des formules mathématiques, il convient, de toute façon, de séparer sans ambiguïté ce qui relève de l'une et ce qui relève de l'autre. En particulier les formules doivent se détacher du texte aussi clairement que possible. C'est ainsi qu'on utilise le style italique pour les variables, qu'on évite les caractères accentués, qu'on place un espace un peu plus grand autour des symboles, qu'on limite leur contact avec les signes de ponctuation, qu'on évite les formules sur plusieurs lignes rompant un interligne qui doit déjà tenir compte des indices, exposants et assimilés et qu'on recourt assez souvent aux formules hors texte, centrées sur une ligne en général.

Placer des mots ou des fragments de phrase dans une formule n'est donc pas indiqué, pour deux raisons tenant à ce qui précède. D'une part la grammaire de la langue ne peut vraiment pas se plier à celle des formules mathématiques. D'autre part le mélange entre la langue et les formules produit un résultat d'une grande laideur.

Maintenant tout principe peut connaître des exceptions. Le tout est de ne pas en faire une règle. Si l'on doit absolument placer une proposition dans une formule, on la mettra entre guillemets et on la prendra comme une relation.

On évitera, autant que possible, le texte qui gravite autour des formules, petite explication entre parenthèses à côté d'une formule centrée, désignation ou précision au-dessus d'une accolade horizontale groupant une partie de formule.

Il est un usage consacré, qui ne relève pas exactement d'un cas de texte dans une formule, mais plutôt d'une typographie bâtarde qui n'est ni celle d'un texte littéraire, ni celle d'une expression mathématique. On écrira par exemple ceci.

La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

Ou encore cela.

La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

Au départ, ce mode de présentation s'est révélé commode pour un exposé au tableau entre mathématiciens. On peut le mettre dans la même famille que la définition d'une fonction sur deux lignes ou les signes logiques, connecteurs et quantificateurs. Il se trouve que, contrairement à d'autres usages, on l'a consacré dans la rédaction écrite.

Cela étant, une autre façon, plus élégante, de s'exprimer apporterait davantage d'information et introduirait la fonction considérée plus naturellement. On pourrait ainsi écrire ceci.

La fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = x\sin(1/x)$ admet la valeur 0 comme limite au point 0. En lui attribuant cette valeur en ce point, on la prolonge continûment à la droite réelle entière.

Ou bien cela.

La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1-x)$ est continue et nulle aux extrémités. En lui attribuant la valeur 0 en dehors de cet intervalle, on en fait une fonction continue sur la droite réelle.

Il s'agit très certainement d'abus de langage, puisqu'on donne le même nom à deux fonctions différentes. Mais ce genre d'abus est, précisément, ce qui fait la valeur du discours, épargnant au lecteur une notation intermédiaire tout en annonçant clairement la couleur : on "prolonge", on "en fait".

Comme c'est souvent le cas, faire une entorse dans l'exigence d'intégralité pour le cheminement intellectuel est une solution de facilité, qu'on paie par une plus grande sécheresse dans le discours. Cependant si les expressions de $f(x)$ ne sont pas aussi simples que dans nos exemples et si l'on veut que le lecteur les ait bien en vue, alors la présentation avec la grande accolade a ses avantages.

Le principe qui veut que l'on ne place pas de texte dans les formules pousse encore à l'interdiction des symboles logiques d'*implication*¶ $\Rightarrow$ et d'*équivalence*¶ $\iff$ dans le texte. En effet ces symboles transforment tout le passage dans lequel ils se trouvent en formule mathématique. On doit alors laisser les formules sèches, sans la moindre explication, ce qui est réducteur.

En fait on serait même en droit d'exclure cette dernière possibilité. En effet, dès lors qu'une formule mathématique est fermée, elle doit être assimilée à un élément de la langue, groupe nominal ou propositionnel.

Trivial.

Etymologiquement l'adjectif "trivial'" est à rapprocher de "vulgaire". Le premier est construit sur le mot latin *trivium* qui désigne le carrefour et, par extension, tout ce qui traîne dans les rues, comme des injures. Le second est également dérivé du latin, venant du mot *vulgus* qui désigne la foule et l'adjectif *vulgarius* qui en est tiré et qui s'applique à ce qui est ordinaire.

Ainsi, dans les deux cas et dès le départ, on trouve potentiellement deux interprétations, dont l'une est neutre et dénote la banalité et l'autre, péjorative, traduit la grossièreté. Paradoxalement le sens vieilli, inspiré du latin, placerait la grossièreté dans ce qui est trivial et la banalité dans ce qui est vulgaire, alors que, dans le sens moderne courant, ce serait plutôt l'inverse. Dans le cas de l'adjectif trivial, ce serait le sens anglais qui aurait été réimporté, après une première traversée de la Manche. C'est du moins ce qui s'est passé en mathématiques.

Pour toutes ces raisons, dont le souci de s'exprimer de la façon la plus neutre possible, certains mathématiciens adeptes d'un discours soigné conseillent de préférer à "trivial" l'adjectif "banal" et, de la même façon, de remplacer "trivialité" par "banalité". Etant entendu que cela ne vaut que pour désigner ce qui est à la portée de chacun, sans nécessiter d'effort d'imagination. On parle parfois de *sorites* pour des suites d'arguments qui s'enchaînent tout seuls, sans qu'il soit besoin de réfléchir.

Il faut savoir que l'explosion de la popularité que l'adjectif "trivial" a prise en mathématiques, à tous les niveaux, est un phénomène récent. Au départ, il y a un bon demi-siècle, il n'était employé qu'à l'oral et entre initiés, dans une expression comme : "c'est vachement trivial !". Cet emploi était assorti d'une pointe d'ironie ou d'autodérision, toutes choses qui eussent été le plus souvent malséantes à l'écrit.

Aujourd'hui, l'adjectif est employé dans un très grand nombre de situations, où il n'a pas toujours sa place. On le prend comme synonyme des qualificatifs "évident", "immédiat", "facile" etc. C'est précisément une facilité à laquelle mieux vaut ne pas recourir trop souvent, surtout quand elle dispense d'une petite explication, laquelle n'est peut-être pas toujours aisée à formuler.

Typographiques (effets).

En principe les styles typographiques, tels que l'inclinaison ou la graisse par exemple, ne devraient pas être discriminants pour désigner des objets.

Il y a quelques exceptions. Les caractères gras $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ sont réservés. Cela ne veut pas dire que les lettres majuscules N, Z, Q, R, C soient interdites à l'usage. De même les majuscules calligraphiées, comme $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{L}$, peuvent être employées pour désigner des objets spécifiques.

La plupart des accents apportent un sens particulier : ainsi $\bar{z}$ est le conjugué de z; la dérivée de f est classiquement notée f' ou $\dot{f}$, sa transformée de Fourier $\hat{f}$; on écrit $\check{f}(x)$ pour $f(-x)$ etc.

En revanche les flèches qu'on place souvent sur les vecteurs sont à considérer comme de simples accessoires décoratifs. On évitera de distinguer $\vec{v}$ et v.

Les alphabets autres que l'alphabet romain, notamment les alphabets grec, gothique (Fraktur) et cyrillique, servent évidemment à désigner des objets spécifiques.

On peut assimiler à un style typographique l'utilisation de parenthèses autour du nom d'une variable. L'habitude en a été prise en géométrie pour désigner des objets élaborés, comme des figures : la droite (D), le cercle (C), la conique (Γ) par exemple. L'avantage est la mise en valeur de l'objet considéré; à ce titre l'usage n'a rien de scandaleux. Mais, pour cela, il ne faut pas abuser de l'artifice, en l'étendant à d'autres domaines par exemple.

Cette notation parenthésée s'accorde mal avec les opérations sur les *ensembles*¶; mais peut-être est-elle là pour nous rappeler qu'il s'agit de figures?

Dans le même ordre d'idées, faut-il préférer les majuscules ou les minuscules? En géométrie, on utilise généralement les majuscules pour les points et il est arrivé qu'on utilise les minuscules pour les droites. Mais appeler m la projection de M se fait également.

Quand on travaille avec des ensembles, on utilise en général pour ces derniers des majuscules et pour leurs éléments des minuscules. Pour les ensembles d'ensembles, on a parfois recours aux lettres calligraphiées ou à l'alphabet gothique.

Cependant les matrices sont souvent notées avec une majuscule quand les applications linéaires le sont avec des minuscules. Il n'y a pas de règle absolue.

Unicité.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, l'unicité dans un problème est totalement indépendante de l'existence. Elle signifie : "il existe au plus une solution".

Très souvent on démontre l'unicité avant l'existence. C'est le cas avec le raisonnement par *analyse et synthèse*¶. On examine d'abord un candidat et on conclut qu'il ne peut être qu'untel. On considère alors ce dernier et, avec un peu de chance, on montre qu'il convient. Voici, en exemple, le cas du barycentre.

Etant donnés des points $A_1, \ldots, A_n$ du plan et des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme λ non nulle, montrons qu'il existe un point G et un seul tel que

$$\lambda_1 \vec{GA_1} + \cdots + \lambda_n \vec{GA_n} = 0 \ . \tag{1}$$

Commençons par établir l'unicité. Considérons pour cela un point G vérifiant (1). Alors ... on obtient

$$\vec{OG} = (\lambda_1/\lambda)\vec{OA_1} + \cdots + (\lambda_n/\lambda)\vec{OA_n} \ . \tag{2}$$

L'unicité est donc établie. Maintenant si on définit G par (2), alors ... on vérifie (1).

On notera que la formulation est pratiquement imposée. On parlera d'unicité pour un problème, pour une équation. Vouloir attacher cette propriété aux solutions éventuelles conduirait à une impasse[77]. Eventuellement on pourra dire ceci.

Le problème ne peut pas avoir d'autre solution que ...

Par ailleurs supposer d'abord l'existence laisserait un goût d'inachevé. Il convient de considérer un point G sans faire cette hypothèse. Evidemment, dès que le point

[77] Voir ce qu'on dit, par exemple, à propos de l'*article*.¶.

est considéré, on se trouve, provisoirement, dans un cas, une *fiction*¶, où une solution existe.

La résolution d'une équation différentielle par série entière ou série de Fourier se traite comme indiqué à propos du barycentre.

Dans un premier temps, on suppose, par exemple, donnée une série entière centrée en 0 qui converge dans un intervalle ouvert $I =]-a, a[$ et y satisfait l'équation. Dans un tel cas, on sait pouvoir la dériver terme à terme, d'où une relation de récurrence entre ses coefficients, laquelle permet de les déterminer tous en fonction de certains parmi les premiers. Voilà pour l'unicité, des conditions initiales convenables ayant été formulées.

Dans un second temps, on considère une suite vérifiant les relations obtenues et on forme une série entière. Si cette dernière a le rayon de convergence $r > 0$, elle converge sur l'intervalle ouvert $I =]-r, r[$ et y vérifie alors l'équation, comme on le voit en remontant les calculs précédents. Cela donne l'existence, sous réserve des limitations qui s'imposent.

Unités. Voir *contexte*¶.

Universel (poser un quantificateur). Voir *introduire*¶ un objet.

Validité (domaine de).

Lorsqu'on doit préciser les conditions de validité d'une formule, on place, de préférence, ces dernières après l'écriture de la formule. Les placer devant est en effet le plus souvent très laid[78]. Rajouter un inutile “on a ” ne fera souvent qu'aggraver les choses.

Cela ne contredit pas les règles du calcul des prédicats, qui imposent de toujours mettre les quantificateurs devant. C'est simplement qu'on ne s'inscrit pas dans l'esprit de la logique formelle et qu'on met la priorité sur une expression soignée. Cela n'est bien sûr possible que pour apporter quelques restrictions, quelques précisions.

Par exemple, on écrira comme suit.

On a
$$\sin x \leq x \leq tan x$$
pour tout nombre réel x vérifiant $0 \leq x < \pi/2$.

On a
$$e^{A+B} = e^A.e^B = e^B.e^A \ ,$$
dès lors que les matrices A, B commutent (ou bien quelles que soient les matrices A, B qui commutent).

[78] C'est la principale source de manquement à la règle dite de Godement sur la *ponctuation*¶; dans un texte pour le baccalauréat, on trouvera ainsi : pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

On ne respecte donc pas ici la place accordée officiellement, mais pas si usuellement que cela, aux quantificateurs.

Verbe ou symboles.

Une idée très répandue veut que le discours mathématique ne mérite d'être qualifié comme tel qu'à la condition d'être largement épuré des formes littéraires au bénéfice de formules agrégeant des symboles. De cette façon, on disposerait d'une expression sans la moindre ambiguïté et indépendante de la langue utilisée. Malheureusement on commet au moins deux contresens.

D'abord c'est oublier qu'il n'y a que rarement un accord général pour le choix des symboles et qu'un même symbole peut avoir diverses significations. On trouvera, dans l'entrée sur la *cohérence*¶, quelques exemples pouvant réellement prêter à confusion. C'est le cas pour la différence ensembliste $A\backslash B$ qu'on peut confondre, dans un groupe additif, avec l'ensemble $A - B$ des différences entre éléments de A et B, si on la note de la même façon. C'est le cas pour l'intervalle $[2, 1]$ etc.

Ainsi l'emploi du symbolisme nécessite-t-il l'apprentissage d'un certain nombre de codes. Ici l'abus se heurte à un principe à respecter assez généralement dans l'écriture, qui est l'économie de moyens. Si j'écris :

"l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}\backslash\{1\}$",

je demande plus à mon éventuel lecteur que si j'écris :

"j'obtiens comme solutions tous les nombres réels sauf 1."

En effet, dans le premier cas, on fait appel à un symbolisme codé à trois reprises : pour l'ensemble $\mathbf{R}$, pour la différence ensembliste et pour l'ensemble réduit à un élément.

De la même façon, plutôt que d'écrire

$$D \cap D' = \{A\} ,$$

on peut aussi bien dire que les droites D, D' se coupent en A. C'est au nom de l'économie de moyens qu'il faut privilégier la langue courante quand elle rend les mêmes services.

Faut-il en déduire qu'il n'y a plus besoin de symboles en mathématiques? Bien sûr il en faut et même beaucoup. Cependant la place du symbolisme est dans le calcul, terme à considérer dans une acception très large.

C'est, tout à fait au début, l'écriture des nombres, dont la forme répandue aujourd'hui autorise une concision et une facilité de calcul qui n'a pas toujours existé, notamment dans la Grèce antique.

C'est, plus près de nous, l'algèbre, à commencer par l'écriture polynomiale qu'on apprend dès le collège. Quand on compare la résolution moderne de l'équation du second degré à celle de l'école arabe, on mesure les progrès accomplis.

C'est encore, à un niveau élevé, l'algèbre homologique, avec les suites exactes et diagrammes commutatifs qui y fleurissent.

Tous ces exemples ont en commun la possibilité de calculer sur les symboles. Même si, en géométrie ou en topologie algébrique, le verbe calculer n'a pas exactement le sens qu'il a pour l'algèbre commune.

On peut aussi calculer sur les connecteurs logiques, sur les prédicats. Mais on ne le fait en général pas en mathématiques, en tout cas ni au collège, ni au lycée, ni en licence.

Déjà les symboles ensemblistes ne sont-ils vraiment utiles que pour exprimer le résultat d'une construction déjà un peu compliquée; c'est d'ailleurs l'image directe ou inverse d'une partie qu'on rencontre le plus souvent, et elle n'est pas au programme du lycée.

Aussi ne devrait-on trouver trace de ces symboles qu'exceptionnellement dans l'écriture. A ce compte-là, un certain nombre de petits symboles, qui font depuis longtemps partie de la culture du collège, n'ont qu'un intérêt marginal. C'est le cas de

$D//D'$,

$D \perp D'$

entre autres.

Il reste un usage très spécifique de certains symboles, qui ne jouent alors qu'un rôle d'abréviation : c'est l'écriture au *tableau*. Mais les enseignants n'insistent que très rarement auprès des étudiants sur le fait que ce qui apparaît au tableau n'a pas à se retrouver tel quel dans un écrit.

Vérifier.

Le verbe *vérifier* vient du latin *verificare*, qui signifie *présenter comme vrai*, *confirmé*; il est à rapprocher du verbe *justifier*¶.

Vérité.

On ne parle en principe jamais de *vérités* en mathématiques. Le terme est laissé aux philosophes et aux théologiens.

Dans la tradition ancienne, celle de la géométrie d'Euclide par exemple, on part de propriétés des objets considérés qui tombent sous le sens ou qui ont été éprouvées expérimentalement, lesquelles vont être énoncées en postulats ou *axiomes*¶. Partant de là, par le raisonnement hypothético-déductif, on en déduit d'autres propriétés, qui donneront lieu à ce qu'on appelle des théorèmes. Ces derniers peuvent être soumis à l'expérience à leur tour; c'est une façon de juger du bien-fondé des axiomes.

Si l'on veut utiliser le qualificatif de *vrai*, ce qui n'est en rien obligatoire, on l'attribuera aux théorèmes. Sera vrai ce que l'on aura démontré.

Dans une construction de la mathématique formelle telle qu'on la trouve dans Bourbaki, malgré des différences essentielles, on retrouve un peu la même philosophie. Partant d'axiomes ou de règles les produisant, on bâtit des démonstrations formelles, constituées par une succession de relations, assemblages convenablement formés de quelques symboles de base, succession dans la laquelle chaque relation doit obéir à l'une ou l'autre de deux règles que sont :

- la substitution dans un axiome ou une relation précédente d'une variable libre par un terme,
- l'application du syllogisme à deux relations précédentes.

Bien entendu tout est fait pour que cela corresponde aux modes de raisonnement que l'on pratique usuellement.

Toutes les relations qui figurent dans une démonstration formelle sont les relations de la théorie, encore appelées théorèmes. Si l'on veut utiliser le qualificatif de vrai, on l'attribuera à ces derniers.

Ainsi une relation est-elle vraie si elle est démontrable. Il se peut qu'elle ne le soit pas davantage que son contraire, qu'elle soit, comme on dit, indécidable. Cependant la question de la décidabilité ne relève pas des mathématiques au sens strict; elle relève de la logique. Faire des mathématiques consiste à démontrer; c'est tout.

En pratique, "affirmer R" ou "affirmer que la relation R est vraie" sont deux manières de dire la même chose. Dans une démonstration par récurrence on pourra aussi bien "supposer la propriété à l'ordre n" ou "supposer la propriété vraie à l'ordre n". On évitera d'abuser de l'emploi du qualificatif "vrai" cependant.

Vide (ensemble).

Voilà bien une question pour laquelle les options en matière d'écriture des mathématiques vont évoluer en cours de scolarité. Comme pour la gestion des cas marginaux en général, il y aura une coupure, soit entre le collège et le lycée, soit entre le lycée et l'université. Dans le cas présent, la coupure serait plutôt à la fin de la première année universitaire, ce qui pose un problème délicat quand on sait que l'idée d'une progression d'une année sur l'autre est honnie à l'université.

En tout cas aucune formation universitaire sérieuse de mathématiques ne saurait faire l'impasse sur la gestion de l'ensemble vide. Simplement parce que, comme cela est dit ailleurs, les mathématiques ont horreur des cas d'exception, des cas *marginaux*¶, et que leur écriture bien maîtrisée doit, comme le calcul, penser à la place du scripteur.

On notera déjà ceci : les ensembles étant caractérisés par leurs éléments, il n'y a qu'un seul ensemble vide, qu'on note usuellement $\emptyset$.

Un ensemble E étant donné, que dire d'une application de $\emptyset$ dans E? Qu'il y en a une et une seule, facile à définir puisqu'il n'y a aucun élément à considérer dans l'ensemble de départ. C'est *l'application vide* (qui dépend juste de E).

Par conséquent il existe aussi une unique famille $(x_i)_{i\in\emptyset}$ indexée par $\emptyset$ et composée d'éléments de E. C'est *la famille vide* (qui dépend aussi de E).

Au passage on notera que l'ensemble des permutations de l'ensemble vide possède exactement un élément; c'est en cohérence avec la *convention*¶ suivant laquelle $0! = 1$.

Un cours universitaire de mathématiques sérieux, qui prétend s'appuyer sur la théorie des ensembles, introduira inévitablement cette application et cette famille.

Il faut bien, par exemple, accepter l'espace vectoriel *nul*, qu'on peut d'ailleurs noter 0 sans crainte. A défaut l'intersection de deux sous-espaces vectoriels pourrait ne pas en être un, pas plus qu'un noyau ou une image. Or on apprend que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base : celle de l'espace nul est la famille vide [79]. Là encore il n'est pas question d'exclure la dimension zéro : un sous-espace

[79] Elle engendre 0 car $\sum_{i\in\emptyset}\lambda_i x_i = 0$, où le choix des λ_i est d'ailleurs imposé; elle est libre car la relation implique $\lambda_i = 0$ (et n'importe quoi) pour tout $i \in \emptyset$; voir plus loin.

vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie doit aussi en être un[80].

Bien sûr celui qui raisonnerait en physicien n'aurait pas besoin de la base vide. Mais de l'espace nul, oui : un système peut n'avoir aucun degré de liberté. En fait la description d'un système n'a besoin d'une base qu'à partir de la dimension 2.

Dans la même veine, on notera qu'un espace affine peut être vide[81]. De cette façon une intersection de sous-espaces affines en sera un, de même que les images directes et inverses de sous-espaces affines par des applications affines. La dimension de l'espace affine vide est -1; il dispose du repère affine vide.

L'ensemble vide est l'élément neutre de la réunion, comme 0 l'est pour l'addition et 1 pour la multiplication [82]. On ne doit pas avoir peur d'écrire des formules qui se ramèneraient à

$$\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0 \quad , \quad \prod_{i\in\emptyset} x_i = 1$$

dans un cas particulier. On apprend que l'initialisation d'une addition répétée se fait à 0; celle d'une multiplication répétée à 1.

Notamment, le produit des nombres entiers de 1 à n vaut 1 si $n = 0$; on trouve ainsi une nouvelle fois la *convention*¶ sur la factorielle.

Dans le même ordre d'idées, quand il s'agit de présenter une démonstration par récurrence, il est de bon ton de la démarrer au plus petit indice possible. L'ensemble vide fait alors souvent son apparition.

On notera encore que, dans la droite achevée $[-\infty, +\infty]$, la borne inférieure de la famille vide est $+\infty$ et sa borne supérieure $-\infty$; c'est ce qui résulte de la définition. Ainsi la borne supérieure n'est-elle pas toujours plus grande que son homologue inférieure.

Maintenant il arrive que l'on ait besoin de faire l'hypothèse que l'ensemble que l'on considère soit *non vide*. C'est le cas d'un espace compact sur lequel toute fonction réelle continue doit atteindre ses bornes; d'un espace métrique complet pour lequel toute application contractante dans lui-même doit posséder un point fixe. Chaque fois que la conclusion est l'existence d'un élément particulier, il faut s'attendre à devoir supposer qu'un certain ensemble est non vide.

---

[80] On ne peut pas à la fois définir un espace vectoriel de dimension finie comme étant de type fini, dire qu'un espace vectoriel de dimension finie admet une base et que l'espace nul n'en admet pas.

[81] Un tel espace sera appelé pseudo-affine par certains; le qualificatif affine serait réservé aux espaces non vides, lesquels possèdent une direction et sont définissables par une équation $f(x) = 1$, où f est une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E.

[82] D'ailleurs le nombre cardinal 0 est l'ensemble vide.

Bibliographie

Audin (Michèle) .- *Conseils aux auteurs de textes mathématiques*, en ligne à l'adresse
http://www-irma.u-strasbg.fr/˜ maudin/newhowto.ps

Cheney (Ward) .- *Advice for students writing reports, theses and dissertations*, en ligne à l'adresse
http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/writing/advice.pdf

Godement (Roger) .- *Sur la rédaction et la dactylographie des textes de T.P.* , Paris, novembre 1967,
introuvable

Goss (David) .- *Some Hints on Mathematical Style*, en ligne à l'adresse
http://www.math.ohio-state.edu/˜ goss/hint.ps

Halmos (Paul) .- *How to write mathematics*, Enseign. Math. **16** (1970), 123-152.

Imprimerie nationale .- *Lexique des règles typographiques en usage à l'Imprimerie nationale*, édité par l'Imprimerie nationale.

The London Mathematical Society .- *Writing Mathematics*, en ligne à l'adresse
http://www.lms.ac.uk/publications/documents/writing.html

Appendice : écrire?

Il est bien difficile de préciser ce qu'on entend par "écrire" en mathématiques. Où commence l'écriture et en même temps s'arrête le gribouillage? Ecrire consiste à se conformer à un certain nombre de codes. Pour la langue française, il y a une académie qui s'en charge, il y a des traités de grammaire et d'orthographe qui les présentent. Mais pour les mathématiques, il n'y a rien de tel, et personne pour jouer le rôle initiateur de Vaugelas. Cela vaut d'ailleurs dans toutes les langues. Alors comment faire?

Reprenons l'exemple de notre langue. La référence, le "trésor" comme on peut dire, qui sert à l'établissement des dictionnaires et des traités de grammaire, est le patrimoine littéraire accumulé depuis quelques siècles.

Remarquons tout de suite qu'il s'agit de textes de grands auteurs s'adressant à un large public. Il ne s'agit pas de l'expression de tout un chacun, expression la plus part du temps orale. Nous retiendrons donc déjà ceci.

Dans le passage à l'écriture, il y a un effort d'élévation de la qualité, dans l'imitation de ce qui se fait de mieux.

Ce patrimoine littéraire est cependant trop riche pour être utilisé tel quel dans une phase d'apprentissage, comme la fin de l'école élémentaire et le début du collège, pour prendre un exemple. On en retirera des termes et locutions considérés comme vieillis ainsi que d'autres qui seraient insuffisamment stabilisés. On ne demandera pas à l'élève de jouer "à la manière de" ni de torturer la langue pour explorer de nouveaux modes d'expression écrite. On ne lui permettra pas non plus des tournures acrobatiques qu'on réserve à la poésie. Par ailleurs, il conviendra de limiter les codes à apprendre, ce qui conduira à appauvrir provisoirement la langue.

Bref, on prendra modèle dans ce qu'il y a de consensuel, considérant des auteurs comme Jean de la Fontaine ou Alphonse Daudet, sans exclure des extraits de la presse actuelle. En même temps on s'attendra, pour la production des élèves, à des textes qui n'auraient pas surpris Jean Racine et ne surprendraient pas tel auteur moderne. Pour l'un comme pour l'autre, cette production serait seulement jugée un peu plate.

On n'admettra pas les dérives de certains milieux qui, tout en utilisant une langue commune et non spécialisée, se croient par exemple obligés d'employer des termes anglo-saxons à profusion, pensant probablement faire plus sérieux de la sorte. On ne tiendra pas compte, en général, des effets de mode. C'est sur une base pérenne que l'on se fondera.

On retiendra donc ceci.

Les codes régissant l'écriture dans la phase d'apprentissage sont encore moins permissifs que ceux qui servent aux lettrés.

Il semblerait que ce qu'on vient de remarquer soit valable pour l'apprentissage dans bien des domaines artistiques. Cela l'est aussi pour le contenus des enseignements scientifiques, pour lesquels on écarte à la fois ce qui est dépassé et le dernier cri, conservant ce qui est pérenne. Ce qui vaut pour le fond vaut sans doute aussi pour la forme.

Prenons maintenant l'écriture des mathématiques. La transposition n'est pas facile. En effet les textes mathématiques s'adressent à un public spécialisé d'un niveau varié et toujours assez étroitement défini. On remplacera les grands auteurs par les grands mathématiciens. Mais qui prendra-t-on pour leurs lecteurs? Puisque nous envisageons l'apprentissage des mathématiques au lycée et à l'université, un bon lectorat pourrait être le corps des professeurs de mathématiques du lycée. Les textes auxquels ils seront confrontés seront les meilleurs traités de l'enseignement supérieur, ceux dont ils peuvent sans effort saisir le rythme, l'articulation générale. Ils ne peuvent pas les comprendre de but en blanc, sauf en refaisant leurs études, mais ils doivent les comprendre avec l'aide de quelqu'un qui leur donnerait le sens des termes techniques utilisés. Et cela devrait aussi pouvoir être le cas pour les bons élèves du lycée.

Cela étant, nous pouvons donc avancer l'idée suivante.

Comme pour l'écriture en général, l'écriture mathématique suppose un effort d'élévation, pour tendre vers le meilleur.

En mathématiques le rapport entre l'oral et l'écrit serait remplacé par le rapport entre le brouillon et la copie, ou l'ouvrage servant de modèle. Il est vrai que les brouillons ont tendance à disparaître. Dans ces conditions, il n'est peut-être pas étonnant que l'écriture elle-même disparaisse.

Maintenant, qui seront Jean de la Fontaine et Alphonse Daudet? Une possibilité parmi d'autres, pour les mathématiques françaises, serait de retenir Henri Cartan et Roger Godement. L'un et l'autre ont un souci permanent du lecteur. Maintenant les textes produits au niveau auquel nous sommes placés, notamment les manuels du lycée ou les ouvrages de première année universitaire, n'auraient pas dû surprendre Henri Poincaré et ne devraient pas surprendre Jean-Pierre Serre. Tout au plus le premier aurait pu y trouver un petit défaut de fluidité et le second de concision.

L'impératif de trouver une référence consensuelle et de se limiter à des règles simples va se retrouver dans l'écriture des mathématiques au niveau que nous avons considéré. Aussi est-il naturel de conclure de même.

Comme pour l'écriture en général, en phase d'apprentissage l'écriture mathématique obéit à des règles moins permissives que celles qu'observent les professionnels.

En tout cas tout ce qui pourrait passer pour surprenant pour quelques grands mathématiciens n'a certainement pas sa place au niveau que nous avons considéré. On ne permettra pas à un débutant des extravagances que le mathématicien confirmé ne se permettrait pas, au prétexte que le premier apprend. On placera seulement le débutant dans des situations beaucoup plus simples et on le confrontera à des règles plus claires, moins sujettes à exception, donc plus contraignantes.

Pour compléter le parallélisme avec la langue commune, on pourrait assimiler certains usages de l'enseignement actuel à l'insupportable jargon des commerciaux. On pense faire plus savant en utilisant quelques symboles pêchés dans des ouvrages avancés, alors que les vrais spécialistes savent s'en passer. Il ne faut pas prendre ces usages pour règle.

S'il y a une spécificité pour l'écriture mathématique, c'est précisément dans son rapport à la langue courante. Au long de l'apprentissage, le sens des termes en mathématiques a d'abord le sens commun pour se spécialiser progressivement. Pour l'écriture il faut sans doute faire de même.

Au début des apprentissages l'écriture mathématique doit éviter de se spécialiser inutilement.

Cela veut dire qu'on doit différer l'utilisation du symbolisme quand il n'est pas indispensable.

Appendice : évoluer?

La langue évolue. La façon d'écrire les mathématiques évolue également. Bourbaki n'écrit pas comme écrivait Poincaré, ce que certains regrettent. D'ailleurs Bourbaki n'écrit pas en 1970 comme il écrivait en 1940.

Faut-il en déduire que l'on doive laisser les évolutions se faire et se contenter de les observer cherchant, à chaque période, à identifier les expressions dominantes?

La réponse est non. L'évolution naturelle va dans le sens de la confusion et de l'appauvrissement. Même l'introduction de mots nouveaux se fait souvent en oubliant des mots anciens souvent plus conformes à l'esprit de la langue, voire plus évocateurs.

Voici quelques exemples d'évolution de la langue française qui ne sont pas particulièrement bénéfiques.

Depuis la fable du Singe et du Chat de La Fontaine, on sait que "tirer les marrons du feu" signifie qu'on se brûle les doigts pour le bénéfice d'un tiers. Aujourd'hui certains comprennent par là qu'on récolte enfin ce que l'on a vaillamment semé, qu'on recueille les fruits de son dur labeur. Il y a donc déjà beaucoup de façons de le dire. Sans doute le retrait des marrons évoque-t-il chez eux le gâteau que l'on sort du four. Mais déjà on perd une nuance importante, la difficulté du travail de préparation. Car jeter les marrons au feu est facile; c'est les retirer qui pose problème. De plus, en employant à tort la référence à la fable, on se prive d'une image pour illustrer la situation qui la mérite.

Depuis longtemps également, on sait qu'une "coupe sombre" est une coupe qui laisse la forêt sombre, donc qui retire peu d'arbres. A l'inverse une "coupe claire" laisse la forêt claire, retirant beaucoup d'arbres. Nombreux sont aujourd'hui ceux qui parlent de "coupe sombre" pour un retrait important; c'est la connotation négative de l'adjectif sombre, celle de la "sombre brute", qui est à l'origine de l'erreur. L'ennui est qu'il en résulte confusion et appauvrissement. Aujourd'hui "coupe claire" et "coupe sombre" sont synonymes.

Bref, dans l'un ou l'autre cas, il est difficile d'admettre l'inculture comme un motif légitime de l'évolution de la langue.

A l'inverse, il peut arriver qu'une proposition judicieuse, choisie après mûre réflexion, s'impose sans difficulté dans le usages. C'est le cas du mot "informatique" par exemple.

Tout cela ne veut pas dire que la langue doive rester immobile et qu'il faille s'accrocher désespérément aux usages anciens. Cela veut simplement dire qu'il faut trier, ne pas accepter n'importe quoi au nom de la mode.

En mathématiques, il faut opérer de temps à autre des révisions. A la différence de la langue courante, cela ne concerne qu'un domaine restreint. En revanche la concertation entre niveaux et la concertation internationale devraient être recherchées. Or ce n'est le cas ni pour l'une ni pour l'autre. Souvent une petite poignée de gens peu cultivés vient faire la loi.

C'est ainsi qu'on a entendu parler, il y a quelques années, d'une distinction entre "pourcentages instantanés" et "pourcentages d'évolution". S'il y avait une distinction importante à faire, cela irait dans le sens de l'enrichissement. Comme cela n'est pas le cas, c'est un alourdissement insupportable qui en résulte.

On a aussi assisté à la modification du sens qui a été donné au mot “conjecture”. Précisons tout de suite qu'il ne s'agit pas d'un terme mathématique : on l'utilise pour décrire l'activité des mathématiciens.

Au départ le mot latin *conjectura* désigne ce que l'on peut déduire, peut-être un peu hâtivement. Ainsi *conjectare rem aliqua re* signifie : conjecturer quelque chose à partir d'une autre chose. La conjecture est ainsi ce que l'on pressent, mais toujours en liaison avec autre chose, l'idée de déduction étant bien présente.

La langue française n'a retenu que le côté incertain de la conjecture, qui est une hypothèse, un soupçon. En être “réduit aux conjectures” est très péjoratif : on ne peut que formuler de vagues hypothèses.

En mathématiques, le mot s'est spécialisé, reprenant un peu de son sens latin primitif. Une conjecture est un énoncé qu'on a cherché à établir mais sans y parvenir, dont on a souvent tiré à l'avance des conséquences. Insistons sur le fait qu'il s'agit du *résultat* d'un travail au même titre qu'un nouveau théorème; mais c'est le résultat d'un travail infructueux, au moins partiellement.

On ne formule pas de conjecture pour soi-même, du moins pas pour y réfléchir dans l'instant qui suit, on en formule surtout pour les autres, de même qu'on publie les théorèmes qu'on pense avoir établi. Alors la conjecture, qui termine le travail de l'un, peut être le point de départ du travail d'un autre. On s'attaque à une conjecture de la même façon qu'on cherche à généraliser un théorème.

Aujourd'hui, *au lycée*, suivant la mode qui consiste à singer les pratiques savantes, on a mis en exergue les attitudes de recherche et commencé par importer les termes en usage chez les mathématiciens professionnels. C'est ainsi qu'est apparue la conjecture, ce qui ne serait certes pas grave si ce n'était pas à l'occasion du triptyque observer/conjecturer/démontrer. La conjecture est devenue non plus ce que l'on jette avec (une base solide), mais ce que l'on jette pour voir (si on pourrait le démontrer). Ici l'évolution du sens traduit une incompréhension profonde de l'activité mathématique. C'est en cela qu'elle doit être rejetée.

Appendice : au tableau.

Notre propos concerne l'écriture des mathématiques, telle qu'on souhaite la rencontrer dans les manuels ou dans les devoirs des élèves. A plusieurs reprises, cependant, nous avons fait allusion à l'écriture du professeur au tableau pour nous interroger.

Regardons comment un mathématicien expose une matière savante à l'occasion d'une conférence. Il utilisera au tableau à peu près tous les symboles, quantificateurs et connecteurs logiques par exemple, dont nous avons dit qu'il fallait à tout prix les éviter. Comment peut-on alors concilier nos prescriptions avec la tradition savante? Ou, plutôt, pourquoi n'y a-t-il aucune raison de prendre cette tradition en compte sans discernement pour définir la façon d'enseigner?

Un premier élément concerne la matière elle-même. Celle des conférences concède une part très importante aux énoncés. Ces derniers présentent des hypothèses et conclusions variées, souvent particulièrement complexes. C'est presque exclusivement là qu'on trouve le symbolisme logique dont on a parlé. Dans les démonstrations, le plus souvent esquissées, on ne trouvera guère que des diagrammes, ces figures qui prennent une place considérable dans les mathématiques d'aujourd'hui. L'exploitation desdites figures se fait essentiellement oralement. Les diagrammes se complètent progressivement. C'est au point que le résultat final ne permet pas de reconstituer la démarche.

A l'inverse, le professeur doit insister, devant ses élèves ou ses étudiants, sur les démonstrations et sur la résolution des exercices, laquelle n'est qu'une occasion particulière de démontrer. Si l'on s'inspire de la tradition savante en regardant de près, on retiendra que seules les figures, équations ou figures géométriques, doivent occuper le tableau. Les articulations logiques autour des figures doivent faire partie de l'explication orale. Cela ne vaudra pas, bien sûr, lorsqu'il s'agira de présenter un modèle rédactionnel, situation qu'on ne rencontre pas dans les séminaires. Là il faudra tout écrire, sans abréviation.

Un second élément concerne la nature de l'acte d'exposition. Dans une conférence on s'adresse à des pairs, à des auditeurs qui ont, en principe, la même culture mathématique fondamentale que l'orateur. L'un comme les autres savent très bien que l'on n'écrira jamais de la même façon pour une revue ou une monographie. Au tableau, les symboles sont simplement des abréviations; ils font gagner du temps et de la place. L'un comme les autres connaissent parfaitement la signification de ces symboles, pour les avoir rencontrés dans leur cadre véritable, qui est celui de la logique formelle.

En revanche, lorsqu'un professeur s'adresse à des élèves ou à des étudiants, un contrat didactique implicite veut qu'il soit un modèle. La façon dont il écrira au tableau pourra être reproduite dans une copie sans pénalité. Aussi ne pourra-t-il pas se permettre d'écrire n'importe comment. Ce précepte ne s'applique pas qu'aux mathématiques. On se doute que le niveau de langue des textes littéraires n'est pas celui de la cour de récréation. Cependant, quand le professeur de lettres parle à ses élèves, il fait très attention à son expression et, en classe, c'est une exigence semblable qu'il a pour les élèves.

Evidemment le professeur de mathématiques n'emploiera pas au tableau des symboles qu'il n'aura pas expliqués. Cependant, dès lors qu'il aurait, par exemple, expliqué le sens du symbole d'implication logique, même s'il ne l'utilise pas lui-même, il devra permettre aux élèves de s'en servir. Sinon, pourquoi en aurait-il parlé? En fait, la seule façon de parler sans risque de ce genre de symbole est de présenter la logique formelle dans toute sa rigueur, ce dont n'a pas besoin dès le berceau évidemment. Une fois les règles de la logique formelles étudiées, on comprendra aisément que cette dernière n'a pas vocation à gouverner l'écriture des mathématiques ordinaires.

Comme c'est très souvent le cas, c'est une méconnaissance des mathématiques qui a provoqué une copie caricaturale de certaines pratiques savantes dans l'enseignement de tous les niveaux.

C'est ainsi que le triptyque observer/conjecturer/démontrer, dont nous avons déjà parlé, s'est imposé dans la pédagogie moderne, alors que mathématiciens, comme les scientifiques, n'observent jamais sans idée à l'avance, qu'ils ont souvent des intuitions et qu'il s'y prennent à deux fois pour formuler une conjecture, et qu'ils sont payés pour savoir que démontrer par derrière n'est pas acquis.

C'est ainsi que certains adeptes de "l'intelligence du calcul" ont cru qu'en laissant aux machines le calcul proprement dit, on permettait à l'élève de se concentrer sur la partie noble, qui est le raisonnement. Cela explique l'importance exagérée qui est accordée à une certaine "logique pour elle-même", à l'écart du calcul proprement dit — alors qu'on parle par ailleurs de "calcul des prédicats". C'est oublier que le calcul, pris au sens large, accueille la plus grande part de l'intelligence. Que cette algèbre, celle des équations ou des diagrammes, a été faite pour penser à la place de celui qui la déroule.

C'est également ainsi que l'on a cru que faire des mathématiques se réduisait à s'exprimer dans un langage. On a confondu le début de la théorie des ensembles de Bourbaki, consacré à la mathématique formelle, avec l'écriture des mathématiques. On a cru qu'il n'y avait qu'une seule façon de faire des mathématiques, que c'était produire un texte codé auquel on ne pouvait ni ajouter ni retirer quoi que ce soit, et qu'il ne pouvait y avoir de différence entre des explications au tableau, un travail au *brouillon*¶ et la rédaction définitive.

Le malheur est que cet appauvrissement de l'expression dans l'enseignement des mathématiques a fini par déformer les élèves, puis les étudiants, puis les enseignants eux-mêmes. Aujourd'hui les étudiants attendent partout un cours magistral écrit au tableau, des solutions écrites au tableau pour leurs exercices. En les recopiant sans comprendre, ils ont le sentiment de progresser. En même temps ils restent occupés, donc calmes. Il faut certainement occuper les étudiants, mais il y a peut-être de meilleures façons de le faire.

En attendant il est aussi difficile de faire un cours en s'appuyant sur un textbook que d'imposer, en travaux dirigés, aux étudiants de rédiger eux-mêmes la solution. Tout le monde a fini par céder à l'exigence étriquée de confort imposée par les étudiants, celle d'un cours au tableau identique à leur propre production et identique à ce qu'ils attendent des manuels, lesquels cessent évidemment d'être d'authentiques ouvrages, pour prendre la forme d'innommables polycopiés.

On ne leur rend pas un véritable service. Ils sont incapables d'utiliser le brouillon et le paient au moment de présenter les concours. Suivant le cas les brouillons sont de véritables copies ou les copies d'infâmes brouillons.

Parallèlement à cela, on n'apprend plus, à l'université notamment, à mener élégamment un calcul, évitant un nombre exagéré d'intermédiaires. On ne donne pas non plus l'habitude de tracer des figures. Des étudiants préparant le CAPES en arrivent à faire une leçon comprenant une construction géométrique sans dessiner de figure. Ainsi la "logique pour elle-même" a-t-elle conduit à la destruction du support sur lequel la logique s'est toujours exercée.

Même si nous nous sommes bien gardés de faire des propositions pour l'école élémentaire, c'est pourtant déjà là qu'il faut chercher le début de l'appauvrissement de l'expression. Les exercices en classes pour lesquels il faut remplir des trous dans une feuille polycopiée retirent à l'activité de résolutions des exercices une grande partie de ses mérites.

Autrefois, les bons maîtres pratiquaient, en calcul, la méthode de l'ardoise. Un exercice étant posé, chacun devait chercher, utilisant un côté de l'ardoise pour formuler les opérations et un autre pour les poser. Une fois qu'un élève croyait avoir répondu, il montrait sa solution au maître, lequel vérifiait que les bonnes opérations avaient été choisies et la correction du résultat. Si tel était le cas, l'élève était convié à écrire la solution sur son cahier. Mais là, opération par opération, il écrivait la justification dans une ligne de présentation, suivant le modèle ci-dessous.

bénéfice = prix de vente moins prix d'achat

52F - 45F = 7F.

On trouvait déjà la dualité oral et écrit, le premier restant intérieur évidemment.

Appendice : promotion

Au départ l'intention des auteurs du lexique était juste de donner quelques conseils de rédaction. Cependant il est vite apparu qu'on ne pouvait pas complètement séparer le fond de la forme. La façon d'écrire les mathématiques dépend étroitement de la façon dont on les pense. Or, sur ce sujet, il n'y a pas d'accord général. Pour ce qui est des niveaux considérés, il y en a même de moins en moins. Par ailleurs, l'écriture des mathématiques n'a de sens que s'il existe un contenu pour la justifier. Or l'existence d'un contenu cohérent est de moins en moins évidente.

Il est un phénomène assez troublant dans l'enseignement actuel. Chaque fois qu'une activité reçoit une dénomination plus valorisante, sa présence dans les faits se réduit en proportion.

La valorisation emprunte souvent un vocabulaire en provenance des milieux de la recherche. L'ennui est que chaque fois que quelque chose s'échappe du monde savant pour se répandre dans l'enseignement, y compris dans celui des universités, seule la partie la plus malheureuse se transmet, et avec un succès alors foudroyant.

Peut-être est-ce parce que l'écart entre le monde savant et le monde enseignant est trop grand. Le second ne comprend pas toujours le message envoyé par le premier alors que le premier ne se doute pas qu'il ne sera pas compris par le second. C'est certainement une question de formation des maîtres. Mais le monde savant a émis, à cette occasion, une fausse bonne idée, celle d'obliger les enseignants et futurs enseignants à lire des opuscules présentant des théories à la mode. Or ce n'est pas d'un savoir superficiel qu'il faut se draper, utilisant à profusion des termes ésotériques, mais de pratiques qu'il faut s'imprégner. Heureusement, les mathématiques sont la discipline où l'on peut le plus tôt s'exercer à une activité de savant. Résoudre un bon exercice, y compris à l'école primaire, en est déjà un exemple. Mais cette évidence semble oubliée.

Il est, par exemple, clair que, dès le plus jeune âge, faire des mathématiques consiste à réfléchir, à chercher, parfois à tâtonner, à reprendre. Autrefois il ne venait à l'idée de personne d'employer un mot ronflant pour désigner ce type bien naturel d'activité.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il y a quelques décennies et à l'initiative d'une Inspection générale alors pleine de bonnes intentions, on s'est mis à parler d'*attitude de recherche*. Il faut dire que les promoteurs des mathématiques dites "modernes" avaient oublié l'importance des exercices. Pourtant, parallèlement, les exercices sont devenus de plus en plus stéréotypés, au point qu'il n'y a plus rien eu à chercher. D'ailleurs c'est au même moment qu'on a vu disparaître les brouillons. Aujourd'hui il n'est pas rare de voir des étudiants préparant l'écrit de l'Agrégation se mettre à écrire sur leur copie sans avoir la moindre idée de la façon dont ils pourront résoudre la question. Probablement pensent-ils que le stylo trouvera tout seul.

Nous aurions dû nous méfier. On parlait d'attitude. C'est comme pour l'*attitude de lecteur* qui prime sur la capacité de lire pour les nouveaux chercheurs en sciences de l'éducation; pour avoir une attitude de lecteur, rien n'interdit de tenir le journal à l'envers.

Plus récemment, on s'est mis à parler de *conjecturer*. Nous avons déjà longuement disserté là-dessus. Là il s'agissait d'une promotion de taille, parce que les mathématiciens eux-mêmes ne parlent pas de conjectures pour leurs innombrables intuitions. Mieux vaut pour celui qui formule une conjecture que quelqu'un ne lui envoie pas la réponse dans la foulée sur le réseau. Bref, chaque élève est donc maintenant l'égal de Riemann ou de Hilbert.

Or que recouvre exactement l'action de "conjecturer" au lycée? On a trouvé ce verbe associé au verbe "observer", dans le projet d'épreuve expérimentale pour le baccalauréat. Ici il faut prendre le dernier verbe au sens noble, comme celui que prend l'observation dans les sciences. Sachant qu'il s'agit en pratique d'ouvrir les yeux devant un écran d'ordinateur. Quand à "conjecturer", il s'agit juste de dire ce que l'on voit.

Les deux verbes composent un triptyque avec le "verbe démontrer", dont nous avons déjà parlé. Cependant on comprend bien qu'épuisé par l'observation et la conjecture, on ne se pose plus la question de démontrer. C'est bien ce qui se passe. Dans l'épreuve expérimentale considérée, la troisième partie était laissée dans l'ombre. Dans les exemples proposés ici ou là, la démonstration est donnée par le professeur.

Jadis, on étudiait les "lieux géométriques" sans avoir besoin de tout ce decorum. Il y avait de quoi chercher, avec les deux temps de l'étude. En même temps on expliquait bien le rôle mineur de ce qu'on appelait non pas une conjecture mais la devinette. Car deviner ne fournit généralement aucune piste pour démontrer. On insistait sur l'enquête : chercher les points, les longueurs, les angles, les rapports qui sont fixes, par exemple.

Résumons-nous. Avec le fameux triptyque "observer/conjecturer/démontrer", on n'observe plus, on ne cherche plus, on ne démontre plus.

Il est vrai que le verbe "conjecturer" a été vulgarisé par des mathématiciens illustres, las de constater que les étudiants ne voulaient plus réfléchir, oser, s'engager sur quoi que ce soit. Ils tenaient à expliquer que les théorèmes ne tombaient pas tout seuls sous leur plume et que l'activité préliminaire d'investigation pouvait paraître ingrate, mais que c'était la part la plus noble de leur métier. Dans la foulée, ils leur ont fait cadeau d'un terme en usage dans leur milieu pour les motiver. Ils en ont même pas mal rajouté, en même temps qu'ils ont largement simplifié, dans une intention certainement très louable. Le résultat de la démarche est pourtant exactement à l'inverse de l'intention des illustres promoteurs.

En focalisant l'attention sur un point qui leur paraissait, à juste titre, important, ils en ont mis de côté d'autres, qu'ils pensaient aller de soi. Or l'objet des mathématiques n'est pas tant de démontrer des théorèmes que de dégager des outils et des méthodes — qui s'appuieront sur des théorèmes et des démonstrations, mais qui en appelleront aussi d'autres. On n'a pas besoin d'être Grothendieck pour le comprendre. Le risque, avec les petits concours comme les olympiades, est de laisser croire que faire des mathématiques consiste à trouver des astuces. Les mathématiciens illustres qui s'expriment ont accumulé un immense bagage, quand ils n'ont pas forgé de nouveaux outils par eux-mêmes. Ils ont oublié de dire que quelqu'un de complètement démuni ne peut absolument rien découvrir. C'est ainsi que certains pédagogues, comme ceux qui ont décrit les compétences du "socle commun", ont pu croire qu'on pouvait dissocier l'entraînement à la résolution de problèmes de toute considération de contenu.

Les remarques que nous venons de faire ne sont pas sans relation avec l'écriture des mathématiques. Ce n'est pas un hasard si nous avons insisté sur la démonstration. A l'intérieur du discours démonstratif lui-même, nous avons privilégié, dans la façon de le concevoir, ce qui peut s'apparenter à la présentation d'un calcul, ce qui met en valeur l'application de méthodes. Par ailleurs, chaque fois que l'option se présentait, nous avons choisi ce qui traduisait le mieux l'effort préalable d'investigation, au détriment d'une exposition aseptisée, ne laissant aucun indice sur la façon de l'obtenir. Nous n'avons pas eu peur de préconiser, chaque fois que se peut, un discours évocateur, au risque de prendre quelques distances avec ce que certains pensent être la rigueur.

Prenons un autre exemple. Jusqu'il y a quelques décennies, les exercices de mathématiques pouvaient très bien prendre pour cadre un problème de sciences expérimentales. Cela valait surtout pour l'école élémentaire et le collège, puisqu'on faisait de la physique au lycée, une physique qui n'était pas encore débarrassée des équations et qui empruntait beaucoup aux mathématiques, que ce soit pour la mécanique, l'optique géométrique ou le courant alternatif. Cependant, au lycée et en classes préparatoires, la mécanique du point était traitée dans le cours de mathématiques.

Depuis quelque années, on parle abondamment, dans notre enseignement, de *modélisation*. On prétend même que le règne de Bourbaki est révolu, que "les mathématiques ont changé" et que ce sont désormais les mathématiques appliquées qui sont à la pointe de la science. En même temps, la mise à l'écart de tout ce qui toucher, de près ou de loin, aux sciences expérimentales, laquelle a commencé avec l'avénement des fameuses "mathématiques modernes", n'a fait qu'empirer. Les mathématiques sont plus "épurées" qu'elles ne l'ont jamais été. Cela ne gêne pas les tenants de la modélisation, pour qui des mathématiques tournant sur elles-mêmes s'appliquent à tout naturellement, comme par magie.

Avec la théorie des probabilités, on a réussi l'exploit de faire passer pour "appliqué" un discours on ne peut plus désincarné. Il se trouve, en effet, que l'on parle de modèle probabiliste pour désigner la donnée abstraite d'un ensemble, d'une tribu et d'une mesure, ce qu'appelle encore un espace probabilisé. Le tour de force consiste à appeler "modélisation" le choix arbitraire d'un modèle, alors que le problème résidait dans l'adaptation à une situation donnée. Pour tel petit problème probabiliste de la vie courante, sans ambiguïté ni piège, on nous fait croire que le résultat dépend du choix du modèle.

Le lecteur de notre lexique constatera que nous n'avons consacré qu'une entrée à la rédaction des mathématiques dans un contexte expérimental. Nous sommes, en effet, lucides; ce n'est pas la priorité des collègues à qui nous nous adressons.

Nous pourrions multiplier les exemples. On impose aujourd'hui les notations ensemblistes pour les "ensembles de nombres", alors qu'on ne traite plus de lieux géométriques. On parle de logique et on introduit le symbolisme correspondant, alors qu'on n'a plus l'occasion de raisonner. L'innovation la plus récente concerne l'algorithmique. On aurait pu s'attendre à y voir une chance, pour les élèves, de mettre en œuvre une démarche constructive. Or c'est le contraire qui se passe. Au milieu d'un enchevêtrement de détails techniques, lié à la considération de langages hâtivement conçus, on demande seulement à l'élève de se repérer approximativement dans des programmes préalablement écrits.

Une mention spéciale est à réserver à l'*interdisciplinarité*. Nous avons déjà parlé des relations entre les mathématiques et les sciences expérimentales à propos de la modélisation. L'interdisciplinarité est une autre façon de jeter un voile pudique sur les divergences de fond entre les différents objectifs disciplinaires. Certains sont allés jusqu'à dire, pour la défendre, qu'elle fournissait une occasion de se parler, en salle des professeurs, entre enseignants de spécialités différentes.

En réalité l'idéologie dominante mettrait surtout en avant les relations entre les mathématiques et les disciplines non scientifiques. Considérons donc cet aspect particulier. Autrefois, dès l'école, l'enseignement des mathématiques et celui du français étaient en parfaite harmonie. On pouvait enseigner, au collège, à des élèves sachant lire, connaissant la structure des propositions et des phrases. On pouvait s'appuyer sur la logique interne de la langue pour raisonner. On n'avait pas peur d'admettre que le raisonnement n'était pas réservé aux seules mathématiques. En même temps, on attendait des élèves qu'ils produisent, en mathématiques comme dans toutes les disciplines, des devoirs écrits dans une langue correcte. Il semblerait que cela ne soit plus possible aujourd'hui. Ce serait la raison pour laquelle on insisterait tant sur le symbolisme, pensant rééquilibrer les chances entre des élèves dont le niveau, en français, est incertain. Evidemment tout cela se poursuit au lycée, et après. Ainsi l'interdisciplinarité affichée entre les mathématiques et les humanités cache-t-elle très exactement le contraire de ce qu'elle devrait signifier.

Ce n'est pas un hasard si nous avons préféré, dans la rédaction, la langue courante au symbolisme chaque fois que ce dernier n'apportait rien, à savoir chaque qu'il n'entrait pas dans un calcul.

Ce faisant nous rejoignons ce que nous avons dit à propos de la démonstration. En effet, deux options s'opposent pour penser les mathématiques au niveau d'un débutant.

Ou bien, comme nous le suggérons, le fondement des mathématiques est le raisonnement et le raisonnement est d'abord le calcul intelligent. Dans le cas, on mêle un calcul utilisant le symbolisme à des explications utilisant la langue usuelle.

Ou bien, comme ce serait plus ou moins le cas aujourd'hui, l'objet principal des mathématiques serait la présentation de "vérités" écrites dans un "langage approprié". Dans un tel cas, il n'est rien besoin de démontrer, et, par conséquent, il n'est pas utile de savoir calculer. En revanche, il faut montrer qu'on est capable de s'exprimer en utilisant un maximum de symbolisme, de s'inscrire dans l'ésotérisme d'un "langage approprié". En même temps, pour les symboles, il n'est absolument pas besoin de connaître le premier mot des règles permettant éventuellement de calculer avec. L'enseignement aura pour objectif de répandre le plus grand nombre de définitions et de notations, déflorant sans vergogne quantité de sujets.

Le calcul étant parfois incontournable, on le laissera aux machines, lesquelles ne sont pas soumises à l'obligation d'expliquer comment elles travaillent. Or ce serait une question très intéressante. Un moteur de calcul formel, par exemple, concentre beaucoup d'intelligence humaine. Par conséquent l'utiliser comme une boîte noire ne laisse à l'homme que les tâches stupides.

Il arrive, malgré tout et par habitude, que l'on demande des démonstrations. L'important sera alors de s'assurer que toutes les assertions sont écrites dans le "langage approprié", garantie supposée de rigueur et de clarté. En revanche les articulations n'auront pas à être soignées.

Une question toute bête vient alors naturellement à l'esprit. Dans la résolution d'un problème, on va, de toute façon, se fixer une stratégie — le plus souvent on choisera une méthode, voire on a enchaînera plusieurs — et on lèvera, un après l'autre, les obstacles sur le chemin. Supposons qu'on y parvienne; dans le cas contraire, il faudrait repartir autrement. Si l'on s'en tient à la première option, la rédaction de la démonstration tombera essentiellement toute seule. Quel bénéfice y a-t-il alors à produire un discours dans l'esprit de la seconde option? Comment se fait-il que l'exigence en soit si répandue?

Il faut croire que l'exercice n'est pas si difficile qu'il en a l'air. Ecartons, en effet, le cas considéré dans la discussion sur le brouillon, où la stratégie naturelle donne le résultat, mais à peu près seulement, quand il y reste un petit obstacle gênant, comme division possible par zéro; il faudra alors reprendre les choses dans un autre sens, ce qui nous laisse dans le cadre de la première option. Ce qu'on demande, pour se placer dans la seconde, est une petite remise en ordre et, surtout, une mise en forme convenable de l'expression. Celui qui a du métier, comme celui qui propose un sujet de concours, s'en sort sans difficulté. Est-ce tellement plus compliqué pour l'élève? Ce dernier aura tôt fait de repérer les exigences de l'enseignant et il s'y conformera ... formellement. Mais, parfois, au-delà du raisonnable : en écrivant $S = \{1, 2\}$, par exemple, sans donner le sens de S. Cependant il n'y a pas de miracle; l'effort de formalisation se fera au détriment de la réflexion. Un jour à la préparation au CAPES, un candidat résolvait un système par implications successives. A la question de savoir si l'on obtenait, à la fin, un système équivalent, il n'a eu aucun mal à répondre : il suffit de placer partout des signes d'équivalence. N'est-ce pas efficace?

Reprenons un exemple donné à propos du passage à la *limite*¶. Il s'agit d'établir celle de $x^2 - x - 1$ quand x tends vers $+\infty$. Voici une première façon, correcte, de présenter les choses.

Pour tout x réel non nul, on a

$$x^2 - x - 1 = x^2(1 - 1/x - 1/x^2) .$$

On en déduit alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x - 1 = +\infty .$$

Cette présentation relève indiscutablement de la seconde option. Chaque assertion est formulée de façon rigoureuse. En revanche, on ne dit pas comment on déduit l'une des assertions de l'autre. Quelqu'un de tant soit peu averti saura le faire. Mais on pourrait aussi bien lui donner directement le résultat.

On voit clairement ce qu'il faut faire pour arriver à un texte de ce genre à partir d'un autre, plus explicatif. L'enseignant gommera les indications, données oralement par exemple, qu'il ne saura pas transcrire sous une forme précise, "adaptée" comme on dit. De son côté, l'élève saura qu'on ne lui demande aucune explication. Il conclura sur le modèle d'exemples semblables, prenant le risque de voir des similitudes là où il ne faudrait pas.

Voici une autre présentation, correcte également.

On sait qu'un polynôme admet toujours une limite, finie ou infinie, en chacun des deux infinis, égale à celle de son monôme de plus haut degré. On peut conclure comme suit.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty .$$

On notera que l'écriture du symbole "lim" est ici parfaitement licite, compte tenu de l'explication préalable. Il y a, malheureusement, deux écueils. D'abord on s'appuie sur un théorème très particulier, relatif aux polynômes et fractions rationnelles, lequel tue effectivement l'exercice. Si l'on avait remplacé -1 par $\cos x$, on n'aurait pas pu s'en sortir, alors que la factorisation fournissait le résultat.

Surtout, cette façon d'employer un théorème ad hoc, qui est effectivement donné au lycée dans notre cas, fait prendre aux élèves une très mauvaise habitude, celle d'écrire, sans réfléchir, le symbole "lim" et de tenter de calculer avec, ce qui non seulement incorrect, mais dangereux.

Connaissant ledit théorème, il eût été beaucoup plus naturel de réduire la solution à ce qui suit.

Le comportement en $+\infty$ du polynôme est déterminé par son monôme de plus haut degré; par suite il admet la limite $+\infty$ en ce point.

A l'entrée indiquée, nous avons mentionné une solution adoptée par les élèves eux-mêmes. Elle n'est pas très appréciée, mais elle est calculatoire et relève de la première option.

Si l'on voulait résoudre, par un calcul limpide, l'exercice proposé, il suffirait de connaître les notations de Landau et les règles qui s'y attachent. On écrirait ce qui suit.

$$x^2 - x - 1 = x^2(1 - 1/x - 1/x^2) = x^2(1 + o(1)) \sim x^2 \ .$$

On pourrait ajouter $\to +\infty$ à droite de la ligne, pour la compléter. Un *enchaînement*¶ dans lequel les relations qui s'enchaînent sont de moins en moins contraignantes — égalité, équivalence, puis limite — ne présente pas de difficulté d'interprétation.

Il est certainement beaucoup plus utile de disposer de ces outils que de savoir jongler avec les quantificateurs. Pourquoi les étudiants ne les acceptent-ils pas ? Est-ce parce que c'est déjà le cas des collègues?

En tout cas le petit calcul reposant sur la distinction des formes indéterminées peut être compris comme un premier pas dans cette direction. Il n'est pas aussi déshonorant que beaucoup le pensent.

Pour conclure, il est bien certain qu'en choisissant la dernière option notre tâche aurait été simplifiée. Elle n'aurait même plus eu de sens.

Appendice : calcul

A plusieurs reprises, nous avons parlé du calcul comme la part la plus noble des mathématiques. En même temps, nous avons dit prendre ce terme en un sens très large. Voyons, de plus près, ce que cela signifie pour nous.

Au collège, on rencontre le *calcul algébrique* dans la résolution des équations du premier degré. En réalité, il commence même un peu avant la résolution proprement dite. La mise en équation comporte déjà une part de calcul.

Ce calcul est fondé sur un certain nombre de règles, qui constituent le socle de l'algèbre élémentaire. Ce sont ces mêmes règles que l'on retrouve pour mettre sous forme canonique une fonction homographique ou, plus tard au lycée, à l'occasion de l'équation du second degré.

On peut déjà noter que le calcul n'est pas une fin en soi. C'est un outil qu'on appelle à l'occasion d'un problème. Surtout il s'inscrit dans une stratégie. Ici c'est la méthode "algébrique"; il n'y a pas beaucoup de liberté, mais il faut, quand même, choisir l'inconnue. Ce rôle d'outil du calcul a conduit certains pédagogues à en minimiser l'importance. On pourra confier le calcul aux machines et se concentrer sur la fonction de stratège. C'est oublier qu'un bon stratège doit bien connaître le métier de l'homme de troupe. Dans la résolution "algébrique" des petits problèmes, il faut savoir ce qui est susceptible d'un tel traitement. On ne peut pas séparer le calcul et l'appel au calcul. Quand on choisit l'inconnue, il faut savoir qu'on va pouvoir tout calculer à partir de cette dernière.

La *géométrie élémentaire* occupe toujours une place importante au collège. Le raisonnement traditionnel y prenait une forme assez semblable à un calcul. Il s'agissait d'obtenir, de proche en proche, des égalités de longueurs ou d'angles, en appliquant les cas d'égalité des triangles, les caractérisations des parallèles et d'autres propriétés annexes. Le raisonnement s'appuyait sur une figure, dont le rôle était de synthétiser l'information à un moment donné. En fait, comme on le retrouverait dans des thématiques plus savantes, c'est d'une figure dynamique qu'il s'agira. L'état final ne fournit pas la progression. Autrement dit un lecteur scrupuleux devrait refaire la figure en lisant le texte qui l'accompagne.

Plus tard les outils vont s'enrichir, avec le calcul vectoriel ou le calcul en coordonnées. On retrouve une forme plus classique de calcul à cette occasion.

Un autre enrichissement peut venir de l'utilisation des transformations. Si l'on ne considère qu'une seule transformation à chaque fois, il n'y a guère de différence avec la géométrie traditionnelle. Cependant on peut composer les transformations, ce qui nous fait entrer dans un nouveau calcul et justifie l'introduction de cet outil.

Le raisonnement géométrique élémentaire n'est pas déprécié comme peut l'être le calcul algébrique. Il n'apparaît pas clairement qu'il puisse être au service d'une stratégie. Par ailleurs, dépassé notamment par la géométrie vectorielle, il ne présente pas un intérêt tel qu'on ait cherché à l'intègrer dans l'intelligence artificielle. La pédagogie moderne a tendance à simplement le délaisser au profit de la construction automatisée, qui n'en est qu'un petit sous-produit, mais pour laquelle il a été facile de créer des logiciels adaptés et que l'on peut alors tenter d'insérer dans une problématique bâtie à cette fin.

Ici ce que nous avons assimilé à un calcul dépasse largement à ce qui va être considéré comme des stratégies.

C'est avec Descartes que débute l'algébrisation de la géométrie et l'utilisation de vrais calculs dans le domaine. Dans l'enseignement d'aujourd'hui, on retrouve cet aspect, dans un contexte un peu modifié, avec les vecteurs et les coordonnées. La géométrie algébrique réelle, qui en est le prolongement savant, a justifié qu'on s'intéresse au traitement informatique du sujet. Cependant on est encore loin de l'enseignement secondaire, voire universitaire.

Avec la multiplication des outils mis à la disposition des élèves, leur utilisation nécessite une réflexion beaucoup plus riche. Il n'y a pas d'opposition entre le calcul et la stratégie, au contraire. Les étudiants ont beaucoup de mal à introduire une base judicieusement choisie pour traiter un exercice de géométrie. D'où cela vient-il. Peut-être, tout simplement n'ont-ils pas bien assimilé l'outil.

Au lycée, l'*analyse élémentaire* repose sur le calcul des dérivées. L'étude du signe, pour déterminer les variations d'une fonction, est, elle même, une forme de calcul. Que le résultat soit présenté sous la forme d'un tableau n'y change rien.

On calcule également des intégrales et, dès le lycée mais surtout un peu plus tard, on résout des équations différentielles. Le calcul reprend une forme plus classique.

La spécificité de l'analyse, qu'on rencontre surtout au début de l'université, tient cependant dans un nouvel exercice, celui consistant à majorer et à minorer. Ce n'est jamais qu'une extension du calcul algébrique élémentaire, sur lequel il s'appuie par ailleurs.

La notion de limite, introduite avec plus ou moins de bonheur au lycée, puis reprise avec plus ou moins de soin à l'université, est présentée comme l'ouverture sur un monde nouveau. En réalité c'est le passage à la limite qui est important. Or ce dernier est indissociable du calcul.

Le calcul différentiel n'échappe pas à l'automatisation, mais cela ne concerne l'enseignement qu'assez marginalement. L'écueil vient de ce qu'on l'a perçu à tort comme un outil au service de la réalisation d'une représentation graphique. Or une telle représentation, ou du moins ce qui semble en être une, est très facile à obtenir d'une machine. C'est ainsi qu'on inversé la problématique, faisant alors l'impasse sur l'outil. L'analyse du lycée se concentrera sur l'interprétation d'une représentation.

Si l'on regarde le programme de mathématiques de l'actuelle licence, on y trouvera essentiellement du calcul : calcul différentiel et intégral, calcul en variable complexe, calcul dans les groupes et anneaux.

L'exception viendrait de quelques petits raisonnement de topologie générale, lesquels embarrassent d'ailleurs les étudiants. Cependant, si l'on met de côté quelques exercices théoriques destinés à l'assimilation du cours, la topologie générale intervient surtout en situation. Elle s'articule donc étroitement avec le calcul, lequel peut concerner des majorations ou des passages à la limite.

Résumons-nous. On trouve le calcul partout. C'est la charpente qui soutient les mathématiques.

Appendice : figures

Nous prenons ici le mot “figure” dans le sens d’une représentation plus ou moins symbolique et non pas dans celui qu’il prend, assorti du qualificatif “géométrique”, qui est celui d’une configuration.

L’erreur fondamentale est de penser qu’une figure est un but en soi. Si tel était le cas, on pourrait se poser la question de l’intérêt de la réalisation de figures dans l’apprentissage, et envisager de les faire produire par des machines. En géométrie on ne demande plus à l’élève de construire “la figure”. Les seules constructions qu’on lui demande sont celles qu’il peut réaliser avec un logiciel dédié. En analyse on ne lui demande plus de dessiner “la courbe représentative”. On lui donne accès à celle que peut produire un calculateur.

Or la figure n’est là qu’associée au raisonnement, dont elle est une part indissociable. La figure dessinée par l’homme n’est pas de même nature que celle que produit une machine. Elle n’est absolument pas réaliste. Elle est symbolique : elle contient explicitement, sous forme codée, les informations que l’on veut avoir sous les yeux. Ou bien elle sert d’appui au raisonnement, portant les hypothèses et ce que l’on a tiré en un instant donné, ou bien elle lui sert de conclusion, portant une synthèse des résultats obtenus.

La figure que l’on trace en géométrie porte mention des égalités de côtés et d’angles. Elle n’a pas une vocation de patron : on ne mesure aucune valeur sur cette figure. D’ailleurs la figure peut être fictive, représentant une configuration ne pouvant exister. De toute façon, on commence souvent à la tracer sans tenir compte toutes les informations la concernant, lesquelles peuvent être portées symboliquement après coup sur une réalité qui ne leur correspond pas toujours. Cette figure peut ainsi représenter une configuration implicite.

A l’inverse la figure affichée par un logiciel de géométrie dynamique est à peu près exacte. D’ailleurs, c’est sur elle qu’on cherche des informations comme l’alignement de certains points ou la concurrence de certaines droites, la présence d’angles droits, l’appartenance d’un point à un cercle etc. Par ailleurs, la figure est toujours bâtie à partir d’une construction explicite, pas seulement sur des informations dans le désordre. Du moins si l’on joue le jeu, puisqu’on peut toujours tricher en ajustant certains points, perdant alors le seul bénéfice de l’opération.

La courbe représentative d’une fonction résume les variations, quelques valeurs et tangentes remarquables, éventuellement les asymptotes. Elle n’a pas vocation à remplacer la fonction : on ne peut y lire aucune valeur.

Le graphe qu’affiche une calculatrice est exact dans les limites en précision et en extension, lesquelles sont définies par la machine et par son utilisation. Elle ne fait pas nécessairement apparaître les informations que l’on attend. Lorsque la courbe est donnée dans un énoncé, cependant, on part du principe que c’est le cas, qu’on dispose de “l’information complète” comme on dit, ce qui ne signifie pas grand chose.