A la mémoire de Lucien Waelbroeck

La dualité dans les EVT de Bourbaki : entre exposition et création

par Jean-Pierre Ferrier

Avant tout nous devons mentionner un point important. En nous faisant partager leurs souvenirs, Roger Godement, Jacques Dixmier et Pierre Cartier nous ont permis d'y voir plus clair dans la stratégie adoptée pour les rédactions tardives, précisant notamment les contraintes auxquelles Bourbaki était soumis et les objectifs qu'il entendait atteindre. L'information qu'ils nous ont donnée nous a été particulièrement précieuse et nous les en remercions.

§1.– Méthodologie

Au moment où, à la fin des années 30 et sur la lancée de Stefan Banach, le groupe Bourbaki entreprenait la rédaction de ses EVT, on pouvait croire l'Analyse fonctionnelle générale vouée à un brillant avenir. Au sortir de la guerre, avec le succès naissant de la théorie des distributions, cet avenir s'annonçait sans doute plus glorieux encore. On ne peut pas en dire autant aujourd'hui : on n'attend plus de l'outil des EVT qu'il résolve des problèmes cruciaux de l'Analyse mathématique. Pour autant le concept conserve toujours une place dans les fondements, comme un cadre commode pour présenter beaucoup de problèmes. A l'intérieur des EVT en général, ces remarques s'appliquent avec encore plus d'acuité au chapitre de la dualité.

Par ailleurs le livre des EVT ne passe pas pour l'un des plus réussis de ceux qu'aura produits Bourbaki. Et à l'intérieur de ce livre, le chapitre de la dualité peut sembler particulièrement laborieux, même s'il serait difficile de lui opposer un exposé en tout point convaincant.

Il faut bien voir qu'avec ses EVT le groupe Bourbaki s'attaquait à un sujet pour lequel il lui a fallu beaucoup créer. Il n'a pas pu bénéficier du même recul que sur d'autres thèmes. Mais c'est précisément cela qui confère un intérêt hors du commun aux EVT pour étudier l'entreprise à laquelle s'est attaché le groupe. Et c'est particulièrement vrai à propos de la dualité.

1. L'objet du chapitre.

Avec les diverses rédactions qui se sont suivies pour produire les premières éditions du livre, avec les échanges entre les membres du groupe qui sont relatés dans la *Tribu*, nous avons en effet la chance d'entrer dans la Science en gestation. A propos de la dualité plus encore que dans d'autres chapitres, nous y trouvons à la fois des hésitations, un sens aigu de la critique, un esprit collectif et beaucoup d'enthousiasme, même de la part des algébristes du groupe.

De fait l'ensemble dont nous disposons avec le fonds archivé est d'une richesse infiniment plus grande que le contenu des éditions elles-mêmes, images figées à un moment donné de l'état de la réflexion du groupe. En nous appuyant sur ce trésor, nous allons tenter de comprendre la démarche créatrice. Mais nous allons aussi tenter, à chaque occasion, d'aller un peu au-delà, d'accompagner la dynamique dont ont fait preuve les concepteurs là où elle entr'ouvre des portes, de révéler peut-être un corpus qui contient parfois son propre dépassement. C'est rendre à Bourbaki l'hommage qu'il mérite.

Nous n'avons pas tenté d'appliquer au thème de la dualité la méthode de travail consistant à analyser d'abord les rédactions une à une pour les comparer ensuite. La matière est en effet bien trop entremêlée. En réalité nous avons procédé en plusieurs étapes.

Dans un premier temps nous avons décortiqué l'ensemble des rédactions jusqu'à la première édition des EVT comprise, en insistant sur les premiers états, ceux datant d'avant la guerre. Nous y avons associé toutes les informations pouvant être tirées des exemplaires disponibles de la *Tribu*. Ce faisant nous avons exploré avec leur auteur différentes perspectives ouvertes, lesquelles n'ont pas toutes été exploitées jusqu'au bout ni toutes reprises dans les textes ultérieurs.

Dans un deuxième temps, nous avons tenté d'organiser cette information riche et même un peu foisonnante, inventaire des diverses possibilités qui étaient à la disposition des rédacteurs, afin de cerner les conditions dans lesquelles ils ont effectué leurs choix. Pour ce faire nous nous sommes notamment appuyés sur le travail de clarification effectué par le séminaire Banach[1] de Christian Houzel.

Cela nous a conduit à une grille de lecture, laquelle est, pour des raisons pratiques, donnée en appendice[2]. Dans cette dernière peuvent apparaître des propriétés ne figurant pas explicitement dans les diverses rédactions et éditions. Cependant la grille ne sera jamais étrangère au travail du groupe Bourbaki lui-même; elle en fera toujours partie, au moins au titre de prolongement naturel.

2. L'utilisation des sources.

Partant de cette grille, nous avons analysé, thème par thème, les divers écrits jusqu'à la première édition. Précisément nous avons considéré la matière des premières rédactions, à savoir R-1 et R001, de celles d'après 1949, notamment le chapitre III de R105, le chapitre IV de R106 (état 3) et R128 (état 4), devenu III dans R145 (état 5) puis IV dans R088 (état 6) et R173 (état 7), et de l'édition de 1953-1955. Nous avons complété cette analyse par l'examen des éditions ultérieures, celles de 1966-1967 et de 1981, sur les questions déjà considérées par les précédentes et seulement pour y chercher une confirmation ou un changement dans les orientations prises. Sauf exception, nous ne bénéficions pas, en effet, de l'information sur les travaux du groupe postérieurs à 1953. Nous avons intégré, à titre de rédaction alternative, le cours d'Alexander Grothendieck à São Paulo[3] et comparé avec le séminaire Banach déjà cité et l'article d'Houzel pour le dictionnaire de mathématiques de l'Encyclopaedia universalis[4].

[1] Houzel 1972.

[2] Voir l'appendice "espaces disqués".

[3] Grothendieck 1958.

[4] Houzel 1978.

Nous avons encore fait quelques brèves incursions dans les premières rédactions du chapitre sur les espaces fonctionnels du livre de topologie générale, chapitre portant le numéro 10 dans les éditions du Traité. En effet on y retrouve souvent le même questionnement que dans le livre des EVT.

Par ailleurs, nous avons également placé en appendice[5] une exploration de thèmes chers à Gustave Choquet et une enquête, de pure fiction, sur le fameux théorème des noyaux de Laurent Schwartz. Notre intention n'a pas été de faire une étude historique de l'influence que l'un et l'autre ont pu avoir, ce qui appellerait d'autres développements[6], mais d'en apprécier les conséquences sur le Traité, quant à la façon d'exposer et quant aux occasions de créer.

L'ordre dans lequel nous avons considéré les différents concepts correspond ainsi à une vision achronique du sujet, paradoxalement très proche des premières rédactions cependant.

Nous n'avons donc pas du tout cherché à faire œuvre historique. Nous nous intéressons à la problématique de l'exposition, de l'organisation, notamment pour repérer à quels moments cette problématique peut conduire à la création scientifique. Nous nous appuierons bien sûr sur des éléments historiques établis ailleurs[7], aussi bien à propos des travaux qui ont précédé le chantier des Eléments de ceux qui lui sont contemporains. Nous avons, par ailleurs, considéré l'Histoire de l'analyse fonctionnelle de Dieudonné[8], plus précisément son chapitre VIII sur les espaces localement convexes et la théorie des distributions, mais moins en qualité de traité historique que parce qu'il nous éclaire sur la vision que son auteur, principal artisan du livre des EVT, a de son propre travail.

---

5 Voir les appendices "prolongement-séparation" et "noyaux".

6 Entre EVT et distributions on constaterait en effet une double captation.

7 Concernant les travaux de Riesz, Banach, Von Neumann, Kolmogorov, Krein, Smulian, Mackey.

8 Dieudonné 1982.

§2.– Autour de la dualité

1. Problématiques

Au départ, l'intérêt pour l'espace dual est certainement né de l'étude des équations linéaires, équations qui sont indissociables de l'analyse fonctionnelle et dont l'étude est présente dès les premiers travaux de cette branche des mathématiques.

On retrouve, très logiquement, cette motivation dans le livre de Stefan Banach[1]. Son auteur y étudie le dual, espace des *fonctionnelles linéaires*, en pensant aux systèmes d'équations linéaires. C'est ainsi qu'il introduit le transposé, qu'il nomme *conjugué*, d'un opérateur. Surtout c'est dans ce cadre que les grands théorèmes, comme le théorème dit d'homomorphisme ou celui de Banach-Steinhaus, trouvent leur place naturelle.

Bourbaki lui-même considère ce thème dans la toute première rédaction. D'ailleurs, un peu après, Dieudonné publie une note sur le sujet, comparant les homorphismes faibles et forts[2]. Il s'agit, dans le langage moderne, de caractériser les morphismes stricts par dualité. Cependant lesdites équations seront assez vite abandonnées dans la poursuite du projet, jusqu'à l'édition de 1981 où elles reverront le jour dans la ligne de la note de Dieudonné et dans un cadre plus général. Parallèlement l'étude des opérateurs sera elle-même retirée des objectifs du livre.

Le dual pour étudier l'espace.

Une autre motivation pour l'espace dual est donnée par Banach. Dans le cadre des espaces normés, il tire du dual un énoncé de **densité**, faisant alors jouer à son théorème d'extension, connu sous le nom de Hahn-Banach, *un rôle analogue au théorème de Weierstraß sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes*. Il montre[3] en effet qu'un élément adhère à un sous-espace vectoriel si et seulement si toute fonctionnelle nulle sur le sous-espace est nulle en cet élément.

Par ailleurs, de façon très générale, faire des éléments d'un espace localement convexe des fonctions sur un autre espace correspond à une **vision géométrique**, qu'on trouvera notamment exposée dans les travaux de Trèves[4]. C'est ainsi que, pour exploiter des propriétés de compacité, l'on interprète les éléments de l'espace comme des fonctions continues sur des parties convenables du dual. Le cours de Grothendieck ou l'édition des EVT de 1981 présentent de cette façon les théorèmes de Smulian, Eberlein ou Krein[5]. Notamment le premier énoncé se tire presque directement du plongement

$$\overline{A} \to \prod_n \mathcal{C}_s(H_n)$$

où les H_n sont des disques équicontinus faiblement fermés du dual E' de l'espace localement convexe métrisable E et où A est une partie faiblement relativement compacte de E. Maintenant ces théorèmes sont absents des premières rédactions et éditions. Il faut attendre l'édition de 1981 pour les trouver.

---

1 Banach 1932.

2 Dieudonné 1940.

3 Banach 1932, chapitre IV, §3, théorème 6, p 58.

4 Trèves 1967.

5 Grothendieck 1958, chapitre 5, §3, pp 374 et suivantes.

Dans tous les cas, utiliser le dual pour mieux comprendre un espace nécessite de connaître ce dual. Il faut déjà préciser ce que signifie pour un espace d'être candidat à être le dual d'un espace donné. Il faut encore savoir donner des conditions pour qu'il soit effectivement ce dual.

Faire jouer à un espace le rôle d'un dual.

Si l'on veut faire d'un espace un dual, on note déjà que ledit espace est candidat à être le dual de son propre dual.

C'est dans ce sens que travaille Banach, toujours dans le cadre des espaces normés, sur la lancée de son théorème d'extension pour lequel il envisage une version s'appliquant au dual. Au chapitre VIII de sa monographie, il introduit ainsi les sous-espaces vectoriels *régulièrement fermés* du dual[6], définis comme les orthogonaux d'une partie de l'espace direct. Il y a donc déjà dans son travail la tentative de faire jouer à l'espace et à son dual des rôles symétriques.

Un autre effort, dans cette même idée de symétrie entree l'espace et le dual, apparaît dans les travaux de Köthe et Toeplitz[7], dans le cadre particulier d'un espace de suites E et d'un espace E^* faisant office de dual, lorqu'ils définissent une topologie forte sur l'espace direct E par polarité.

En fait, la question de savoir si tout sous-espace vectoriel fermé est régulièrement fermé est équivalente à la réflexivité; Banach la résout pour un espace normé séparable[8]. Plus précisément, il caractérise les sous-espaces régulièrement fermés, introduisant la notion de sous-espace *transfiniment fermé*, notion peu commode cependant et vouée à être bientôt éclipsée par la topologie faible de Bourbaki.

Dans ce qui précède, on considère pour un espace normé son dual normé, lequel est muni de la norme d'opérateur. On sait qu'un tel dual est toujours complet. En revanche un espace normé complet E n'est pas nécessairement un dual normé. Des exemples contraires sont connus au moins depuis les travaux de Frédéric Riesz. L'espace E pourrait-il être alors le dual d'autre chose que d'un espace normé? Par exemple, peut-on mettre son dual normé E' une structure moins forte que celle que fournit la norme, autorisant donc moins de formes linéaires qui joueront le rôle de formes linéaires continues, structure qui fasse de E le dual de l'espace E' ainsi modifié?

C'est, paradoxalement, parce que la topologie faible n'est pas encore mise en place par Bourbaki, que Banach, puis plus tard Krein et Smulian[9], vont s'attaquer à ce problème. De son côté Bourbaki aura résolu la question de façon radicale, avec la topologie faible, pour un espace quelconque. Cependant il va reprendre la question pour un espace complet, en cherchant une topologie moins faible que la topologie faible pour le même résultat. Le sujet, qui tourne autour de ce qu'on qualifiera de théorème de Banach-Dieudonné, se retrouvera dans toutes les éditions, y compris celle de 1981, après avoir subi quelques généralisations. Il faudra toutefois attendre Grothendieck[10] pour qu'il connaisse un début de solution vraiment satisfaisante.

[6] Banach 1932.

[7] Köthe, Toplitz 1934.

[8] Banach 1932.

[9] La convergence faible n'était pas encore associée à une topologie.

[10] Grothendieck 1950.

De nouveaux espaces.

Un autre intérêt de la dualité, qui apparaîtra historiquement plus tard et que Bourbaki ne pourra pas connaître au moment de la mise en route du livre des EVT mais qui va beaucoup l'influencer un peu avant que sortent les premières éditions, sera la construction de nouveaux espaces. Ces derniers seront introduits comme les duaux d'espaces fonctionnels adéquats.

C'est ainsi qu'on définit, aujourd'hui, les distributions. On se donne un espace vectoriel de fonctions-tests et on considère des formes linéaires convenables sur ce dernier. Pour les distributions générales, l'espace de fonctions-tests est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. L'idée a été avancée par Serguei Sobolev[11] le premier. Il faudra cependant attendre Laurent Schwartz pour que le problème soit explicitement posé en des termes d'analyse fonctionnelle, dans le cadre précis d'une dualité entre EVT[12].

La différence avec ce qui précède est qu'on n'est plus du tout dans le cadre des espaces normés. L'espace de fonctions-tests, que Schwartz note $\mathcal{D}$, n'est qu'un intermédiaire, mais il faudra lui donner une structure précise pour parler de formes linéaires qu'on qualifiera de continues. Maintenant, même si c'est le dual $\mathcal{D}'$ seul qui nous intéresse, l'étudier demandera de connaître son propre dual, pour lequel un candidat naturel est justement $\mathcal{D}$.

On trouve ainsi, avec les distributions, la dualité au deux bouts de la chaîne. D'une part pour définir l'espace, qui n'est pas un espace ordinaire de fonctions, et d'autre part pour l'étudier.

En réalité, cet exemple fait même apparaître une problématique plus riche. Au départ, on considèrera, par exemple, la dualité sur $\mathbf{R}$ entre $\mathcal{D}$ et l'espace L^1_{loc} des fonctions intégrables sur tout compact. Définir les distributions ne sera pas seulement introduire un dual, ce sera construire un morphisme $L^1_{\text{loc}} \to \mathcal{D}'$ et un endomorphisme d de $\mathcal{D}'$ transposé de l'endomporphisme $-d$ de $\mathcal{D}$. Ainsi la dualité est-elle au cœur même de l'introduction des distributions, nous fournissant même une stratégie toute écrite pour les présenter.

Evidemment la question délicate à résoudre va concerner le type de structure qu'il faut considérer sur les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ pour l'avancement de la théorie. Nous en parlerons le moment venu.

Nous constatons que les motivations pour la dualité ne manquent donc pas. Cependant Bourbaki va concentrer, de plus en plus, son effort à la résolution du problème de la réflexivité. Quand un espace est-il son bidual, c'est-à-dire le dual de son dual? D'ailleurs, comme nous le constaterons, la question peut être interprétée de plusieurs façons et Bourbaki se focalisera sur l'une d'elles.

---

11 Sobolev 1938.

12 Le principe problème a été de mettre une topologie sur l'espace $\mathcal{D}$.

2. Ingrédients.

Le **moteur** de la dualité dans les EVT reste le théorème de Hahn-Banach. Contrairement à une idée répandue — on lit que *c'est Hahn-Banach* dans la Tribu en date de 1952[13] — il n'est pas incontournable pour établir le théorème des bipolaires. Il l'est, certes, pour appliquer ce dernier, pour savoir que, dans la dualité entre E et son dual E', toute partie convexe fermée est faiblement fermée. De cela résulte qu'**un espace localement convexe a toujours la topologie duale de la bornologie de son dual** — celle des parties équicontinues — ou, s'il est séparé, qu'il se plonge toujours dans ce que nous considérerons comme son bidual naturel.

Une parenthèse s'impose sur l'**équicontinuité**. Peut-être parce qu'elle est liée à une bornologie, Bourbaki marque quelques hésitations à ce propos. Déjà la Tribu[14] de 1947 notait ceci, à propos du livre de topologie générale : *l'équicontinuité est-elle intéressante en soi, ou seulement dans la mesure où elle entraîne la compacité?* On verra d'ailleurs que Grothendieck lui-même l'a oubliée pour son théorème sur la topologie intermédiaire.

Précisément, il est intéressant de regarder la place que Bourbaki accorde aux parties uniformément équicontinues dans son livre de Topologie générale. On s'attendrait à le voir en parler dès le chapitre II. Or il n'en est rien; c'est toujours le cas dans l'édition de 1961. Sa version du théorème de Heine[15] ne concerne qu'une application continue. Dans l'édition de 1961 il faut attendre le chapitre X pour entendre parler d'équicontinuité et d'uniforme équicontinuité[16], les deux définitions étant données l'une après l'autre[17], et pour avoir l'extension du théorème de Heine[18]. Or les ensembles uniformément continus de fonctions numériques sont intimement liés aux écarts continus, lesquels sont introduits aux chapitre IX. Cela n'a pas intéressé Bourbaki, lequel a par exemple besoin d'introduire une espace fonctionnel pour établir l'extension du théorème de Heine.

La **compacité faible** apparaît comme un élément important, sans doute à l'excès, dans la façon dont Bourbaki traite la dualité. Dans son histoire de l'Analyse fonctionnelle, Dieudonné attribue l'avancée réalisée par Bourbaki à l'utilisation de quatre ingrédients, laissant peu de doutes à ce sujet :

a) la topologie faible dans une dualité abstraite,

b) la compacité pour les espaces topologiques généraux, définie par Alexandroff et Urysohn en 1924,

c) sa caractérisation en termes de limites suivant un réseau, introduites par Moore et Smith en 1922, ou un filtre, suivant Bourbaki et Cartan,

d) le théorème de Tychonov, qui date de 1930.

Fait curieux, la compacité faible de la boule unité du dual d'un espace de Banach et la caractérisation associée des espaces normés réflexifs, données à juste titre dans cet ouvrage comme une progrès apporté en 1938 Bourbaki par rapport à Banach, ne se lisent pas directement dans les rédactions.

[13] Tribu NBT028, p 12, 1952.

[14] Tribu NBT 015, 18-20 janvier 1947, p 4.

[15] Chapitre II, §4, n°2, théorème 2, p 228.

[16] Chapitre X, §2, n°1, pp 21 et suivantes.

[17] Chapitre X, §2, n°1, définition 1 et 2, pp 20-21

[18] Chapitre X, §2, n°1, corollaire 2, p 24.

Dans la dualité abstraite entre deux espaces vectoriels, une propriété simple mais centrale est déjà la précompacité faible des parties simplement bornées. Elle est établie dès le départ dans la rédaction R001[19]. On en tire la compacité faible relative d'une partie faiblement bornée du dual d'un espace de Fréchet[20], puis la compacité faible relative des parties fortement bornées, notamment des boules du dual d'un espace normé[21].

Dans les rédactions R106 et R128, on montre qu'une partie faiblement bornée du dual d'un espace de Fréchet est équicontinue avant de conclure, par Ascoli, à sa compacité relative pour la convergence compacte ou faible[22].

Dans la rédaction R145 la compacité faible du polaire dans le dual d'un voisinage de 0 est renvoyée au chapitre I, §4. Dans la rédaction R088, on établit la compacité faible des parties équicontinues et faiblement fermées du dual d'un espace localement convexe; en gros, on démontre le théorème de Tychonov avec les ultrafiltres[23].

Dans la rédaction R173 et dans l'édition de 1955 en revanche, la relative compacité des parties équicontinues du dual d'un espace localement convexe est déduite du théorème plus général relatif à $L(E,F)$[24]. On utilise le plongement dans l'espace produit F^E, qui renvoie directement au théorème de Tychonov.

Cependant, comme les rédactions depuis R001 le préparaient, cette édition dégage aussi la **complétude** d'une partie équicontinue et fermée, dans le cadre plus général de l'espace $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ où F est quasi-complet[25]. Dans la dualité, la complétude joue un rôle bien plus central que la compacité. Cette dernière semble incontournable dans la théorie de Mackey, comme on peut le penser en lisant Bourbaki, voire Grothendieck. Cela s'explique, sachant que l'un et l'autre ignoraient le fait suivant, mis en lumière par François Chargois : par Hahn-Banach, la somme de deux disques faiblement bornés et complets est du même type. Par ailleurs, la théorie s'adapte au cas des corps maximalement complets[26] que Bourbaki appelle linéairement compacts.

Un autre ingrédient est la **théorie de Baire**. Elle intervient, de façon essentielle, dans la résolution des équations. Par exemple, un morphisme d'espaces localement convexes

$$u : E \to F$$

est strict dès que son noyau a pour orthogonal l'image de son transposé

$$u' : F' \to E'$$

et que E est bornologique au sens de Bourbaki.

En attendant l'édition de 1981 qui traite du sujet, l'emploi de la théorie de Baire ou du théorème de Banach-Steinhaus, l'un et l'autre très répandus dans les EVT de Bourbaki, est surtout lié au rôle tenu par les tonneaux. Nous en parlerons en détail à propos de la dualité forte.

19 Chapitre II, §1 proposition 5, p 66.
20 Chapitre III, §1, proposition 6, p 86.
21 Chapitre III, §1, théorème 3 et son corollaire, p 116.
22 Chapitre IV, §2, n°2, théorème 2, p 13; resp. p 107.
23 Chapitre IV, §2, n°5, proposition 6, p 28.
24 Chapitre IV, §2, n°2, proposition 2, p 65 et Chapitre III, §3, n°5, cor. de la proposition 4, p 23.
25 Chapitre III, §3, n°7, théorème 4, p 30.
26 Houzel 1972, séminaire Banach, chapitre 3, introduction, 2), définition 3, p 121.

§3.– Stratégies

1. Au carrefour de traditions

De façon générale, on peut considérer que Bourbaki a cherché, dans son traité, à prendre le meilleur des traditions en vigueur en mathématiques et qu'il y est souvent parvenu.

Dès les premières rédactions, Bourbaki se singularise par rapport à la tradition dominante en Analyse. Cette dernière privilégie une stratégie qui pourrait être qualifiée d'*agglutinante légère*.

On cherche à ajouter de nouveaux résultats à ceux qui sont connus, donc par agglutination, sans introduire des problématiques fondamentalement nouvelles ni mettre en place des outils particulièrement lourds. On s'attachera avant tout à résoudre des questions très difficiles. Aux algébristes les structures, aux analystes les démonstrations délicates pourrait-on dire, assez superficiellement bien sûr. Il faut reconnaître qu'un analyste comme Lennart Carleson est assez représentatif de cette tradition.

Avec elle, on est cependant assez loin des EVT de Bourbaki. Quoi qu'on puisse penser du livre, il faut admettre que Bourbaki s'est toujours employé à dégager des structures aussi pertinentes qu'il était possible.

Maintenant les rédactions d'après-guerre des chapitres III et IV, fortement influencées par les besoins de la toute nouvelle théorie des distributions, montrent que les EVT de Bourbaki ont parfois emprunté à une tradition déployant une stratégie *agglutinante lourde* et qu'ils en sont même un exemple typique.

On ne cherche toujours pas à introduire des problématiques fondamentalement nouvelles, mais on développe un outillage lourd pour attaquer les problèmes.

Laurent Schwartz a très bien expliqué la façon personnelle dont il élargissait le domaine de ses connaissances et compétences. C'est en partant d'un noyau solidement acquis qu'il cherchait à comprendre les faits nouveaux qui lui étaient présentés, les réinterprétant alors à sa manière. En quelque sorte le noyau secrétait les sucs qui allaient digérer la matière nouvelle et étrangère. C'est d'ailleurs probablement ce que chacun, à son niveau, fait en permanence. On ne comprend qu'en reconstruisant et on reconstruit en utilisant des schémas connus. Cette reconstruction est évidemment source d'améliorations et donc de progrès.

L'originalité des EVT est que Bourbaki rencontre, avec le théorème de Hahn-Banach et la participation de Choquet, une tradition peu représentée en Analyse, développant une stratégie qu'on pourrait qualifier d'*élévatrice légère*. C'était surtout la tradition de l'Algèbre avant l'arrivée de Grothendieck.

La stratégie consiste à sortir un problème donné de son contexte traditionnel, pour l'examiner de façon nouvelle, en prenant de la hauteur, du recul, en le débarrassant de tout ce qui peut être inutile pour ne garder que ce qui en fait l'essence, donc en le généralisant. En même temps la généralisation, le choix d'un nouvel angle de vue, ne donnera pas lieu à des constructions trop systématiques. La légèreté de cette démarche n'empêche pas que soient obtenus des théorèmes profonds et difficiles.

On peut la résumer en disant qu'au lieu d'éclairer un problème par de multiples projecteurs placés tout près, on préfère disposer un projecteur unique mais bien placé.

Quand Gustave Choquet disait qu'il fallait se placer dans la situation la plus générale possible pour attaquer un problème, ce n'était pas pour prôner la généralisation à tout prix, c'était pour atteindre une forme de pureté dans laquelle tout devait se décomposer et recomposer harmonieusement.

Les EVT de Bourbaki ne montrent pas beaucoup d'exemples de cette stratégie. On peut cependant y rattacher la merveilleuse démonstration de la finitude de la dimension d'un EVT localement précompact par passage au quotient, démonstration qui plaisait beaucoup à Choquet et serait due à Serre.

Cette tradition en annonce peut-être une autre, qui mettrait en avant cette fois une stratégie *élévatrice lourde*. Cette dernière est personnifiée par Grothendieck et bien expliquée par Dieudonné.

Devant chaque problème, on oublie tout pour mettre en place l'outillage naturel que le problème en quelque sorte attendait, comme le rocher sur la plage attend que la mer vienne l'éroder. C'est une grande construction qu'il faut faire, c'est toute une hyperstructure qu'il faut bâtir, souvent de manière inattendue, pour voir les choses sous l'angle le plus propice et les comprendre en profondeur.

On reprend l'idée de placer le projecteur de façon idéale, mais on ne répugne pas à la construire tout un échaffaudage pour cela, l'élevant par tranches successives, dans le respect permanent de la "nature des choses" bien entendu.

Le chapitre sur la dualité proprement dite montre cependant que Bourbaki n'a pas accompagné Grothendieck et n'a été qu'effleuré par cette nouvelle tradition pour son livre des EVT.

Le chapitre qui aurait pu illustrer cette tradition était évidemment celui des produits tensoriels topologiques, si Bourbaki avait bien voulu le retenir dans ses dernières éditions. Malheureusement, cela ne s'est pas fait. Même la notion d'espace nucléaire, qui aurait pu faire le lien entre le chapitre V, consacré aux espaces hilbertiens, et les précédents, est absente du livre.

A un degré très mineur, on peut considérer que la notion d'espace disqué introduite par Christian Houzel relève de cette stratégie. On complique un peu la structure, simplement parce que c'est la nature des problèmes qui le veut, et on se simplifie beaucoup la tâche. Bourbaki est passé à côté, non pas pour des raisons d'intendance cette fois, mais pour ne pas y avoir cru. A l'inverse, Grothendieck, toujours lui bien sûr, sans aller jusqu'au bout de son raisonnement à une époque où il n'était peut-être pas encore aussi audacieux qu'il l'a été plus tard, a au moins fait comme si.

Plus fondamentalement, Bourbaki ne cherche pratiquement jamais à expliquer les objets généraux à l'aide de modèles particuliers simples. Il ne fait qu'assez tard le lien explicite entre les espaces convexes généraux et les espaces semi-normés. Or un espace localement convexe n'est jamais qu'un pro-objet de la catégorie des espaces semi-normés (dont les morphismes sont les applications linéaires continues). Evidemment le dual d'un pro-objet est un ind-objet. Cela signifie que la dualité amène naturellement à la considération d'autres types d'espaces que les espaces localement convexes. Il est vrai que la dualité n'avait pas été suffisamment explorée à l'époque des premières rédactions des EVT. On ne connaissait pas, semble-t-il, de duaux d'un autre type que les espaces directs. On n'avait pas l'exemple des algèbres de Banach, dont le dual de Gel'fand est un espace topologique compact.

2. Une vision catégoricienne?

On entend couramment dire que Bourbaki aurait manqué le virage des catégories. Comme si le groupe avait été réfractaire à cette façon nouvelle et profonde de penser les mathématiques. On explique, le plus souvent, l'opposition de Bourbaki par le trouble que la théorie des catégories jetait dans les fondements. Il est vrai que le traité est le seul ouvrage intégrant complètement la logique formelle dans un cours de mathématiques et que la question est donc plus que sérieuse. Cependant il y avait, en même temps, une raison plus simple et déjà radicale : reprendre la totalité du traité était, de toute façon, impensable.

Très justement, Pierre Cartier nous a fait remarqué que le travail de Bourbaki est venu en appui de l'installation des catégories dans la pensée mathématique. En effet, c'est un champ expérimental que cette théorie a trouvé avec la rédaction du traité, notamment et contre toute attente avec celle des livres de topologie et des EVT. C'est ainsi qu'a pu être clarifiée l'articulation entre catégories et structures. On disposait, chose nouvelle, d'exemples de structures différentes mais pertinentes portées par un même ensemble. Il ne faut pas opposer systématiquement catégories et structures. D'ailleurs, comme Cartier l'a rappelé également, Bourbaki n'est pas un chasseur de structures. Le seul membre du groupe à l'être était Ehresmann. C'est plutôt la classification, le catalogage qui intéressaient Dieudonné.

De toute façon, pour les questions qui nous occupent ici, les catégories ne sont absolument pas indispensables. Les objets sont des ensembles munis de structures et les morphismes sont toujours des applications d'un ensemble sous-jacent dans un autre. Il est bien un exemple d'objet produit qui n'est pas porté par l'ensemble produit : c'est le cas dans la catégorie dont les objets sont les espaces normés et dont les morphismes sont les applications qui diminuent la norme. Cependant il faut aller chercher un produit infini et cela n'est en rien contradictoire avec les structures. D'ailleurs on trouvera en appendice une présentation des espaces disqués qui, contrairement au séminaire Banach, ne doit rien aux catégories[1], du moins tant qu'on ne s'attache qu'à la lettre du discours. En pratique, le choix du cadre des catégories invite à considérer un certain nombre de ces dernières, pour mettre en évidence des foncteurs et leurs propriétés. A l'inverse, le choix du cadre des structures invite plutôt à l'économie. Il faut dégager un type de structure suffisamment souple, sur lequel on se concentrera, pour accueillir les propriétés dont on a besoin. Cela oblige peut-être à cerner de plus près la nature des objets sur lesquels on va travailler, ce qui n'est pas toujours une mauvaise chose dans une perspective plus ou moins pédagogique.

C'est donc seulement sur la présence d'une vision catégoricienne dans le traité qu'il convient de s'interroger, privilégiant le fond sur la forme. Or on peut dire que Bourbaki a toujours eu cette vision, même dès le départ et bien avant l'émergence de la théorie par conséquent.

La lecture de premières rédactions montre en effet le goût affirmé de Bourbaki pour les procédés systématiques. Nous allons prendre quelques exemples pour étayer notre propos, exemples qui ne sont pas tirés du livre des EVT lui-même mais qui ne lui sont pas complètement étrangers non plus.

[1] Voir la rédaction (état 1).

Prenons l'introduction des structures uniformes telle qu'on peut la trouver dans la première version du chapitre II de topologie générale[2]. Bourbaki considère la donnée d'une application de $E \times E$ dans un espace filtré avant de considérer le cas où cet espace est la demi-droite réelle positive munie du filtre des voisinages de zéro, ce qui le conduit progressivement à la définition d'un écart et aux espaces métrisables.

Peut-être l'idée de départ était-elle d'envisager comme espace filtré un groupe topologique, ce qui aurait permis de définir une structure générale par un "écart" unique. Un espace localement convexe réel ferait d'ailleurs l'affaire à l'arrivée. On peut l'imaginer quand on sait qu'André Weil a été inspiré par l'étude faite sur les groupes par Pontryagin[3]. Ce n'était cependant pas la bonne voie, laquelle renvoie plutôt à la définition par une famille d'écarts, laquelle repose sur une construction qu'on doit aussi à André Weil. Aujourd'hui on dirait qu'un espace uniforme est une limite projective d'espaces écartisables, ou un foncteur particulier de la catégorie des espaces métriques dans celle des ensembles. Cependant on noterait que déjà André Weil construisait ses écarts par le plongement dans un produit d'espaces écartisables, alors que Bourbaki a préféré retenir une démonstration plus centrée sur l'espace lui-même[4]. En tout cas Bourbaki ne reprendra pas son idée d'espace filtré dans les rédactions qui suivront. Au moins la tentative témoigne-t-elle d'une recherche permanente de la perfection.

Prenons encore la première rédaction du chapitre sur les espaces fonctionnels de topologie générale, qui fait suite à un manuscrit de Claude Chevalley sur les espaces fonctionnels et dont le contenu est intimement lié aux EVT[5]. Pour mettre une structure uniforme sur un espace de fonctions définies dans X, Bourbaki se donne un ensemble de filtres sur X. Il considère la structure dont un système fondamental de voisinages est défini comme suit. Etant donnés un entourage V de l'espace d'arrivée et un filtre $\mathfrak{F}$ de l'ensemble donné, on leur associe l'ensemble des couples (f, g) tels qu'il existe un ensemble A du filtre pour lequel $(f(x), g(x))$ soit dans V pour x dans A. On peut ainsi parler de "convergence uniforme au voisinage d'un point".

Malheureusement cela n'apporte pratiquement rien par rapport au cas particulier où les filtres sont tous associés à des parties. Cela ne cadre pas non plus avec les tentatives de Chevalley pour définir des modes de convergence uniforme un peu plus forts que la convergence en un point ou sur une partie. Par la suite, Bourbaki ne considérera donc plus que ce cas particulier. Sa tentative malheureuse a cependant un mérite. Elle montre qu'il n'a pas peur de sortir des sentiers battus.

Dans cette affaire, l'ironie est que la donnée d'un ensemble de filtres pouvait, en filigrane, préfigurer la considération simultanée d'une bornologie et d'une topologie sur le même espace vectoriel, c'est-à-dire une structure d'espace disqué au sens de Christian Houzel. On peut très bien présenter cette dernière, du moins dans le cas où la bornologie est saturée, à partir d'un ensemble de filtres; ce sont les filtres des voisinages uniformes des parties bornées; une base d'un de ces filtres est constitué par les ensembles $B+V$ où B est une partie bornée fixe et V un voisinage variable de 0. Or le mélange des structures eût été, comme on le verra, le bon point de vue pour armer un espace d'applications linéaires continues.

---

2 Weil 1937.

3 Weil 1937.

4 Voir la rédaction (état 2).

5 Voir la rédaction (état).

Pour compléter notre argumentaire, considérons un exemple pris dans le livre d'algèbre, celui de la définition du produit tensoriel de deux modules tel qu'elle est donnée dans l'édition de 1947 du chapitre 3 d'algèbre linéaire, laquelle reprend la rédaction R040 (état 4) établie suivant les directives du congrés de juin 1945[6].

Dans cette version, la présentation comme solution d'un problème universel n'est pas aboutie, puisqu'on n'impose pas dès le départ l'unicité de la factorisation et qu'on la déduit de la condition pour l'image d'être génératrice. Cependant la démarche est si merveilleusement expliquée qu'on en vient à ne pas regretter l'erreur, sachant d'ailleurs que la corriger en respectant l'ordonnancement du discours n'est pas si simple. En tout cas il n'est pas possible que le rédacteur se soit exprimé comme il l'a fait en acceptant la formule du bout des lèvres. Plus tard, lorsque les problèmes universels auront été ajoutés au chapitre IV du livre de théorie des ensembles, le renvoi sera d'une sécheresse attristante.

Ainsi, au moins dans les premières rédactions d'analyse comme plus tard dans celles d'algèbre, l'inclinaison de Bourbaki pour les procédés systématiques est-il avéré. On le trouvait notamment chez Cartan, y compris dans ses cours à l'ENS. En revanche il n'est pas sûr que les rédactions des EVT d'après-guerre témoignent toutes du même goût.

Nous avons parlé des problèmes universels. Il faut bien admettre qu'on n'en trouve pas la trace dans les EVT de Bourbaki. Dans l'édition de 1953, la définition des produits renvoie au livre de topologie générale et les autres cas de limite projective sont supposés couverts par les topologies initiales; la question est reprise dans le cas localement convexe[7]. Les limites inductives sont traitées, dans le cas localement convexe, à partir des structures finales[8]; cependant seul le cas des limites inductives de sous-espaces d'un espace vectoriel donné est envisagé à cette occasion.

Il nous faut donc corriger légèrement l'inclinaison catégoricienne que nous avons attribué à Bourbaki dans la rédaction de son livre des EVT. En effet toutes les constructions qu'il envisage se font d'abord sur les ensembles sous-jacents, sur lesquels on vient poser une structure. Ainsi les produits d'espaces topologiques, vectoriels topologiques, localement convexes reposent-ils tous, a priori, sur l'ensemble produit. Il faut dire, comme l'a rappelé Pierre Cartier, que la découverte, avec les variétés algébriques, d'un produit qui n'est pas porté par l'ensemble produit, a été une grande surprise. Au moment de rédiger ses EVT, Bourbaki ne disposait pas de cette expérience. On ne peut pas lui en faire le reproche.

Heureusement, il ne semble pas que Bourbaki soit tombé dans un piège beaucoup plus grave, celui de croire que la structure d'un espace particulier pris en exemple puisse dépendre d'un quelconque arbitraire. Tous les exemples qu'il présente, sauf pour fabriquer des contrexemples, arrivent tout armés. C'est notamment le cas pour les limites inductives qui seront proposées dans l'édition de 1981[9].

Nous aurons encore une occasion de relier le traité aux catégories, sur le thème des EVT, à propos de la complétude, telle qu'elle est définie pour les espaces uniformes. Nous en parlerons à propos des espaces d'applications linéaires.

6 Bourbaki 1958 et BKI 02-3.1, chapitre III, §1, n°2, proposition 1, p 4.

7 Bourbaki E53, chapitre I, §1, n°9, proposition 15, p 19 et chapitre II, §2, n°2, p 59.

8 Bourbaki E53, chapitre II, §2, n°2, p 60.

9 Bourbaki E81.

3. La question des bornologies.

Si l'on jette un regard moderne sur le sujet, il est évident que la généralisation des espaces normés peut se faire dans deux directions opposées. Pour une application linéaire entre deux espaces normés, en effet, il est équivalent de dire qu'elle est continue, i.e. que l'image inverse de tout voisinage de zéro est un voisinage de zéro, ou qu'elle est bornée, i.e. que l'image directe de toute partie bornée est bornée. La norme est caractérisée, à équivalence près, aussi bien par les voisinages de zéro que par les parties bornées.

En privilégiant les voisinages, on obtient les espaces vectoriels topologiques localement convexes, qui sont des limites projectives d'espaces semi-normés. En privilégiant les parties bornées, on privilégie les espaces vectoriels bornologiques de type convexe, qui sont des limites inductives des mêmes espaces.

Maintenant il faut bien voir qu'au moment où Boubaki attaquait la rédaction de ses EVT la question était toute tranchée. Le premier modèle d'espace fonctionnel non normable avait été l'espace de Fréchet-Montel des fonctions holomorphes dans un domaine du plan complexe. C'est, par exemple, cet espace qui fournissait le cadre adapté pour résoudre le problème d'optimisation conduisant au théorème de représentation conforme de Riemann.

Quant aux espaces plus généraux, comme Dieudonné l'explique dans son Histoire de l'analyse fonctionnelle, ce n'est pas du côté de Fréchet ou Banach que Bourbaki regardait, mais de celui de Janos von Neumann ou de l'école russe, de ceux qui ont utilisé avant 1934 en Analyse les concepts de topologie introduits par Félix Hausdorff.

Bourbaki lui-même avait achevé son livre de topologie générale où il avait introduit les groupes topologiques. C'est bien naturellement que les espaces vectoriels topologiques avaient leur place dans le projet. D'autant plus que si la convergence peut être décrite par une topologie dans des situations variées, elle n'a de description bornologique que dans le cas des espaces vectoriels. Avec les structures uniformes d'André Weil et les filtres d'Henri Cartan, Bourbaki avait, comme on l'a vu dans les précédents chapitres, les outils pour généraliser de façon efficace les espaces de Fréchet.

Il reste que les structures topologiques sont mal adaptées à l'étude des limites inductives. C'est ainsi que les espaces de germes sont naturellement bornologiques. Lorsque l'analyse fonctionnelle intervient en géométrie analytique, comme dans les travaux de Christian Houzel, ce sont ainsi les structures bornologiques qui sont privilégiées. Pour le moment il nous suffit de noter que ces travaux sont ultérieurs non seulement aux rédactions, mais aux premières éditions.

L'édition de 1981 n'a pas cette excuse. Elle donne bien en exemple un espace de germes, celui des fonctions analytiques au voisinage d'une partie compacte[10]. Cependant il est traité comme un espace localement convexe, avec les complications à la clé.

Une autre limitation est imputable aux structures topologiques, qui concerne la théorie spectrale. Les algèbres topologiques à multiplication continue sont en effet des limites projectives d'algèbres normées. Leur étude spectrale se ramène trivialement à celle de ces dernières. En revanche les algèbres bornologiques à multiplication bornée sont des limites inductives d'espaces normés, mais pas d'algèbres normées. Les spectres ne sont plus compacts, ni limites de parties compactes. Elles sont notamment adaptées à la théorie spectrale des opérateurs non bornés.

[10] Chapitre III, §1, n°7, exemple d), p III.10.

Il y a une variante de cette limitation. L'espace normé des fonctions holomorphes bornées sur un domaine est peu utilisable, surtout en plusieurs variables. Dès la dimension 2, une domaine pseudoconvexe peut ne pas être le domaine d'existence d'une fonction bornée. Si l'on ne veut pas passer directement à l'espace de toutes les fonctions holomorphes, pour les énoncés comme les théorèmes de Cartan par exemple, ce sont des structures bornologiques qu'il faut considérer. Par exemple, ce qui est vrai en croissance quelconque le reste essentiellement en croissance *polynomiale*, i.e. en croissante dominée par une puissance négative de la distance au bord dans le compactifié.

Dans un ordre d'idées voisin, l'édition de 1981 donne un autre exemple de limite inductive. C'est l'espace des fonctions de la classe de Gevrey[11]. Mais lui aussi est traité en tant qu'espace localement convexe.

Ce n'est pas un hasard si les structures bornologiques ont été inventées par Lucien Waelbroeck, dans sa thèse intitulée *Etude spectrale des algèbres complètes*[12]. C'est là qu'il introduit les *ensembles*, *espaces* et *algèbres à bornés*, dont les *espaces complets* et les *algèbres complètes*, ces derniers devenant plus tard les *b-espaces* et les *b-algèbres*. Le séminaire Banach parlera de son côté d'*ensembles* et d'*espaces bornologiques*.

Dans les années 60, comme Cartier le rapporte, le groupe Bourbaki était au courant des travaux de Waelbroeck, lesquels avaient été exposés par Cartan lors d'un congrès. Il resterait à savoir de quels travaux il s'agissait, ce qu'il y avait de nouveau par rapport à l'exposé de février 1956 du même Cartan au Séminaire Bourbaki sur la théorie spectrale des C-algèbres commutatives. Par ailleurs, Louis Boutet de Monvel, qui a participé au travail du groupe sur la suite à donner aux EVT, s'y intéressait aussi; il participait à un petit séminaire clandestin tenu à l'ENS au milieu des années 60, où il avait été question d'en parler.

Cependant, si Boutet de Monvel avait pointé l'intérêt des bornologies à cette époque, c'était parce qu'il avait en vue la théorie spectrale des opérateurs non bornés. De son côté, Bourbaki avait bien des projets ambitieux pour la suite de ses EVT. Il y avait d'abord le théorème de représentation intégrale de Choquet, qu'il a finalement intégré dans son livre après un gros travail de simplification. Il visait aussi les produits tensoriels topologiques de Grothendieck, lesquels avaient fait forte impression. Surtout, dans la perspective des représentations de dimension infinie des groupes de Lie, il pensait à la théorie spectrale des opérateurs continus. Mais sans aller jusqu'aux opérateurs non bornés bien sûr.

Dans le même temps, Adrien Douady travaillait aussi pour le groupe. Il aurait donc pu aiguiller Bourbaki vers les bornologies qui interviennent naturellement en géométrie analytique avec les espaces de germes. Mais sans doute était-il davantage préocuppé par les déformations d'espaces normés.

Ainsi Bourbaki n'a-t-il jamais trouvé l'occasion de voir les structures bornologiques dans un cadre leur conférant une quelconque légitimité.

Par ailleurs il faut bien voir que, dans les années 70, les bornologies n'avaient pas précisément bonne presse, du moins en France. On avait fait un peu trop de tapage à leur sujet. Pour donner une idée de la position commune à leur égard, il suffit de citer un passage du commentaire des Math. Reviews sur l'ouvrage *Bornologies and Functional Analysis* d'Henri Hogbe-Nlend paru chez North-Holland en 1977.

11 Chapitre III, §1, n°7, exemple c), p III.10.

12 Waelbroeck 1960.

Much of the material of this book could be found in a book on locally convex spaces — only the language has changed. Of course, that does mean that many will not find bornologies as a conceptual aid in the study of topological vector spaces.

Revenons à la genèse du traité. Ce ne sont évidemment pas des questions de géométrie analytique ou de théorie spectrale qui ont orienté Bourbaki dans ses premières rédactions. Ce dernier n'a jamais eu à considérer les bornologies comme une alternative aux topologies. S'il l'est a rencontrées, c'est de l'intérieur même de la théorie des EVT. Sur ce point sa stratégie est stabilisée dès la rédaction R145, qui date de janvier 1951 et qui marque l'état 5 du chapitre III sur la dualité.

Les parties bornées d'un espace vectoriel topologique ont été introduites par Andrei Nikolaevitch Kolmogorov et Janos von Neumann dès 1935[13]. Ce sont les parties bornées dites canoniques du séminaire Banach et de la dernière édition des EVT. Bourbaki commence à les considérer sérieusement après la guerre, avec l'étude du dual d'un espace de Fréchet.

Cependant les EVT donneront à Bourbaki une autre occasion de rencontrer des bornologies. Pour autant il ne les considèrera toujours pas pour elles-mêmes; cette fois-ci elle serviront seulement à définir des topologies. On sait que sur l'espace dual d'un espace vectoriel topologique E, ou plus général sur un espace d'applications linéaires continues sur E, il n'y a aucune topologie évidente au départ. Très généralement, les topologies sur les espaces généraux de fonctions sont définies par la convergence uniforme sur des parties identifiées. Ainsi est-on amené à se donner un système de parties sur E, ce que fait Bourbaki dès sa première rédaction du chapitre de topologie générale sur les espaces fonctionnels. Il y pose même très précisément les bases des bornologies telles que les écrira Waelbroeck. Nous reprendrons cette question plus loin.

Bourbaki a donc découvert ou redécouvert progressivement les bornologies avec l'avancement des rédactions d'après-guerre. Au départ il ne pouvait pas apercevoir l'intérêt d'en faire une structure à part ou même, chose plus raisonnable pour le chapitre III du livre des EVT, de les intégrer explicitement à la structure topologique. C'est donc bien naturellement qu'il est amené à chercher, dans certains cas, une autre voie que celle qui peut paraître la plus pertinente aujourd'hui. Autrement dit, même s'il ne faut pas y voir d'intention particulière, tout se passe comme s'il cherchait à minimiser leur rôle. De fait il y parvient de plusieurs façons. Mais, paradoxalement, en voulant économiser un petit enrichissement à la structure d'espace localement convexe, Bourbaki sera amené à beaucoup parler des parties bornées.

C'est tellement vrai que l'édition de 1981 comporte un grand tableau figurant les *principales bornologies sur le dual d'un espace localement convexe E*[14]. Pas moins de huit bornologies y sont mentionnées. Au moins y fait-il figurer enfin la seule qui soit naturelle sur un dual, celle des parties équicontinues, alors que jusque-là sa démarche a précisément consisté à l'occulter.

On notera que Bourbaki évite de prendre une bornologie comme donnée de départ. A l'inverse, comme on le constatera pour la dualité faible comme pour la dualité intermédiaire, partir d'une bornologie est une stratégie intégrée par Grothendieck. Mais ce dernier n'ira pas jusqu'à l'assumer dans son discours.

13 De façon un peu différente, les deux définitions étant équivalentes.

14 Bourbaki E81, EVT IV.76, tableau II.

§4 Prolongement et séparation

La question du prolongement des formes linéaires continues et de la séparation des ensembles convexes est cruciale pour la dualité. Pour la traiter la stratégie de Bourbaki a beaucoup évolué. Même si elle obéira toujours à une logique indiscutable.

Après l'énoncé donné dans le livre de Banach, relatif au prolongement d'une forme linéaire majorée par une fonction sous-linéaire, i.e. additive et positivement homogène, bien des variantes sont apparues sous la plume de Bourbaki, qu'on peut classer ainsi.

D'un côté il y a les versions *abstraites*, énoncées dans un espace vectoriel sans topologie, qui s'opposent aux versions *concrètes*, lesquelles concernent un espace déjà muni d'une topologie vectorielle, voire localement convexe.

D'un côté il y a les formes *analytiques*, relatives au prolongement d'une forme linéaire ou à un problème voisin, qui s'opposent aux formes *géométriques*, qui concernent la séparation d'un ensemble convexe.

Un tribu[1] de 1948 fait un inventaire assez complet de ces différentes formulations. Voici ce qu'on y trouve; nous y avons juste ajouté le classement.

Versions abstraites	*Versions concrètes*
formes analytiques (prolongement)	
forme linéaire et semi-norme	forme linéaire continue
formes géométriques (séparation)	
un ensemble convexe	un ouvert convexe et un point
dont les points sont internes	un fermé convexe et un point
deux ensembles convexes	deux ensembles convexes fermés
formes analytico-géométriques (prolongement et positivité)	
	forme de Krein

On notera dans cette liste une forme, dite de Krein, qui est à la fois analytique et géométrique : il s'agit du *prolongement d'une forme linéaire définie dans un sous-espace V, positive dans $V \cap C$, où C est un cône convexe ayant un point intérieur*. Cette dernière précision en fait une version concrète.

On noterait encore que cette tribu suggère de donner en exercice une démonstration du théorème de Hahn-Banach s'appuyant sur la compacité de la sphère. Déjà Cartan, dans une tribu de 1947[2], proposait une démonstration en dimension 2 par connexité.

On trouvera une classification en appendice[3], qui envisage encore d'autres possibilités. On y fait apparaître que toutes les formulations sont équivalentes, non pas du point de vue logique — sauf à considérer un corps de base général, car elles sont toutes vraies pour le corps $\mathbf{R}$ — mais du point de vue de l'exposition. On passe en effet assez facilement de l'une à l'autre. Du moins n'a-t-on pas besoin d'appliquer une nouvelle fois le lemme de Zorn. Si bien qu'il est très difficile de faire un choix comme point de départ.

[1] Tribu non numérotée, DELT 003, fonds Jean Delsarte, juin 1948, 37 p.

[2] Tribu n$^\circ$, NBT 014, 8-11 novembre 1947.

[3] Voir l'appendice "prolongement-séparation", §5, n$^\circ$5, p 62.

Partant d'une version abstraite.

Le principal avantage que présente une version abstraite comme point de départ est de ne pas avoir à attendre d'avoir défini une topologie vectorielle pour parler de Hahn-Banach. Bourbaki pourra donc placer le sujet dans un "bloc convexe" au début du livre, bloc qui a été retiré du "livre élémentaire" en 1947[4]. C'est ce qu'il fait dans les premières rédactions et c'est ce qu'il préconise encore en 1948 : les versions abstraites sont données au chapitre II quand les versions concrètes le sont au chapitre III.

Faut-il voir dans ce choix l'application d'une stratégie générale? D'après Christian Houzel, Bourbaki vise toujours le plus bas niveau de généralité ... compatible avec ses ambitions. Ce n'est certainement pas une plus grande généralité qu'il vise avec des versions abstraites. En revanche il respecte un principe suivant lequel on doit toujours, à difficulté égale, énoncer un résultat dans le cadre le plus pauvre possible. On retrouve ce souci à bien des occasions dans le livre des EVT.

Par ailleurs, choisir en même temps une forme géométrique permet d'obtenir directement l'énoncé géométrique et concret dont Bourbaki fera un usage permanent, à savoir la séparation, dans un espace localement convexe, d'une partie convexe fermée et d'un point extérieur à cette partie par une forme linéaire continue.

En réalité, la rédaction R-1 commence tout simplement par reproduire la version, abstraite et analytique, du livre de Stefan Banach[5]. Cependant cette dernière est très vite interprétée en termes géométriques[6], tout en restant abstraite.

Précisément, avant même d'énoncer, Bourbaki y considère des ensembles convexes $\overline{C}$ contenant 0 et dont l'intersection avec une demi-droite vectorielle est un segment non réduit à 0, autrement dit des ensembles convexes absorbants et fermés sur toute droite vectorielle. Il montre que ces ensembles correspondent aux $p \leq a$, où p est une fonction sous-linéaire et $a > 0$, puis énonce que passe un hyperplan d'appui par tout point x_0 tel que $p(x_0) = a$.

Plus loin il définit un *corps convexe* comme une partie convexe fermée possédant un point intérieur. Plus loin encore, il énonce le théorème de prolongement pour les espaces normés et en déduit que par tout point de la frontière d'un corps convexe passe un hyperplan d'appui, d'abord pour un espace normé, puis pour un *espace linéaire*, i.e. pour ce qui sera plus tard un EVT[7].

Bourbaki a donc cherché très tôt du côté d'une version géométrique abstraite. Il en donne une[8] dans la rédaction R001, laquelle n'est jamais qu'une adaptation du théorème de Banach, la démonstration reposant sur le lemme de Zorn, à ceci près qu'il perd un peu en généralité, puisque la fonction *indicatrice* — la jauge — d'un ensemble convexe est toujours positive. Bourbaki assume son choix, jusqu'à imposer à une fonction positivement homogène d'être toujours positive[9] , alors que la fonction sous-linéaire du livre de Banach ne l'était pas nécessairement.

4 Voir la tribu NBT 014, 8-11 novembre 1947.

5 §1, théorème 1 (Hahn-Banach), p 11.

6 §1, corollaire 2, p13.

7 §3, proposition 4, p 41.

8 Chapitre I, §1, théorème 1 (Hahn-Banach), p 13.

9 Chapitre I, §1, définition 2, p 5.

Cependant donner une forme géométrique est plus délicat en version abstraite qu'en présence d'une topologie. On part d'un ensemble convexe A supposé *équilibré* par rapport à un point a, dans le sens que son *indicatrice* en ce point — sa jauge — est finie; autrement dit A est absorbant en a. On doit supposer que la variété linéaire V à séparer de A ne pénètre pas dans A, dans le sens qu'elle ne contient aucun point interne de A, autrement dit si elle laisse la trace de A du même côté de V dans la variété engendrée par V et a.

Or les notions introduites de point *interne* ou de *coque* — points intérieurs ou à l'extrémité d'une demi-droite issue de a, autrement dit vérifiant $p(x) < 1$ ou $p(x) = 1$ pour la jauge p en a — dépendent du choix du point a. En revanche, en présence d'une topologie, pour un *corps convexe* notamment, les points internes par rapport à un point intérieur sont simplement les points intérieurs et la coque est la frontière; tout est intrinsèque.

Enfin les versions abstraites sont associées à des inégalités larges quand les versions concrètes le sont à des inégalités strictes. Un exemple dans $\mathbf{R}^3$ est donné dans R001 pour éclairer la limitation[10] : dans le cas où V ne rencontre pas A, l'hyperplan obtenu n'a pas forcément cette propriété. La correspondance n'est donc pas parfaite.

Ce sont ces complications techniques qui font la faiblesse de la stratégie géométrique abstraite et expliquent probablement pourquoi elle sera abandonnée par la suite.

Partant d'une version concrète.

L'édition de 1953 des EVT de Bourbaki tourne résolument le dos aux tentatives des premières versions, pour partir d'une version géométrique et concrète, relative à la séparation d'un ensemble ouvert convexe non vide[11], celle donnée par Minkowski pour un espace normé. La démonstration utilise un argument de connexité qui la simplifie. Elle est plus courte et moins explicite que son homologue abstrait des premières rédactions.

L'énoncé le plus utile — relatif à la séparation des parties convexes fermées d'un espace localement convexe — en est une conséquence immédiate[12].

La forme analytique est donnée, en application, pour une semi-norme[13] : ici p définit une topologie, ce qui rend la situation concrète. La forme générale du livre de Banach est donnée en exercice[14].

Grothendieck, dans son cours de São Paulo qui suit de près la première édition des EVT, ne se démarque guère de Bourbaki sur ce point. Il se contente de la version géométrique concrète[15] et donne juste après la version analytique semi-normée[16]. Seule différence notable, l'énoncé du théorème de Hahn-Banach précède immédiatement son utilisation, sachant que la dualité est traitée assez tôt dans le cours.

On noterait une bizzarerie dans le cours de Grothendieck. Il envisage en effet une variante plus "concrète" de la forme analytique semi-normée puisqu'il suppose donnée une topologie vectorielle et demande à la semi-norme p d'être continue. Il fait en même temps la remarque que la topologie ne sert à rien et que c'est pour cela qu'il ne précise pas que les formes linéaires sont elles-mêmes continues.

[10] Chapitre I, §1, remarque, p 18.

[11] Chapitre II, §3, n°1, théorème 1 (Hahn-Banach), p 69.

[12] Chapitre II, §3, n°3, proposition 4, p 73.

[13] Chapitre II, §5, n°7, théorème 1 (Hahn-Banach), p 101.

[14] Chapitre II, §5, exercice 16, p 105.

[15] Chapitre II, §6, théorème de Hahn-Banach I, p 92.

[16] Chapitre II, §6, théorème de Hahn-Banach II, p 94.

Voilà qui peut étonner. Il faut savoir cependant qu'il ne voit pas d'autres applications que dans le cadre des EVT et c'est un souci d'homogénéité qui le conduit à se donner une structure topologique vectorielle. Il est encore plus rigoureux sur ce plan que Bourbaki, jusqu'à l'absurde ici.

Un autre choix.

L'édition de 1965 change encore de stratégie. Plutôt que d'avoir à choisir entre une forme analytique et une forme géométrique pour commencer, Bourbaki choisit de donner un énoncé plus général dû à Gustave Choquet[17] : dans un espace vectoriel préordonné contenant un sous-espace vectoriel cofinal V, on peut prolonger une forme linéaire positive sur V en une forme linéaire positive sur l'espace entier.

Cet énoncé permet d'obtenir l'une et l'autre des formes considérées auparavant. Il est *analytico-géométrique*, analytique par la considération d'une forme et géométrique par celle d'un préordre, défini par un cône convexe. En même temps il est évidemment abstrait. C'est un peu la réponse à la quête d'une forme géométrique abstraite qui a hanté les premières versions. Par ailleurs il faut voir qu'il y a a priori avantage à remplacer les parties convexes par des cônes convexes dans beaucoup de situations. Le cône engendré par la partie $C \times \mathbf{R}$ dans $E \times \mathbf{R}$ est une alternative à la jauge de C. L'avantage est que le construction est canonique; le choix d'un point a disparu. Par ailleurs on sait que les cônes convexes n'admettent pas nécessairement une base, une semelle dirait Bourbaki.

Cela étant, Bourbaki décline tout de suite la version analytico-géométrique sous une forme concrète[18] qui est celle de Krein, avant de donner juste après la forme analytique du livre de Banach[19].

L'édition de 1981 est conforme à la précédente. Ironie du sort, alors que Bourbaki tient enfin la version abstraite qu'il cherchait, il a depuis longtemps abandonné le "bloc convexe" dans l'organisation de son livre.

Et encore un autre.

Il y a encore une autre formulation possible du théorème de Hahn-Banach. Notons d'abord que, pour bien faire, la forme analytique doit être énoncée pour une prénorme, à savoir une fonction ayant les propriétés d'une semi-norme mais pour laquelle on accepte la valeur $+\infty$. Cela n'a rien de surprenant quand on a remarqué que l'ensemble des points où une prénorme est finie est un sous-espace vectoriel. En dehors de ce dernier la seule contrainte est la linéarité.

De la même façon il conviendrait d'autoriser la valeur $+\infty$ pour une fonction sous-linéaire. Cependant la formulation du livre de Banach ne peut pas s'étendre à une fonction sous-linéaire quelconque. Un contrexemple est facile à donner[20].

On noterait que Bourbaki évite en général la valeur $+\infty$. En topologie générale, il l'autorise pour un écart, mais pas pour une distance. Les premières rédactions des EVT ne considèrent que des fonctions finies. Il change cependant d'avis un point, comme une tribu[21] de 1951 en témoigne : *on admet les fonctions convexes à valeurs +infini (mais non −infini).*

---

[17] Chapitre II, §2, n°1, proposition 1, p 63.

[18] Chapitre II; §3, n°1, corollaire, p 64.

[19] Chapitre II, §3, n°2, théorème 1 (Hahn-Banach), p 65.

[20] Voir l'appendice "prolongement-séparation", §8, n°6, p 64.

[21] Tribu NBT 027, Royaumont, 4-9 octobre 1951, p 11.

Voici la nouvelle forme annoncée : si p, q sont des prénormes et f une forme linéaire sur l'espace vectoriel E, vérifiant $|f| \leq p + q$, on peut écrire f sous la forme $g + h$, où g, h sont linéaires et vérifient $|g| \leq p$, $|h| \leq q$.

Cette propriété était connue, au moins pour des semi-normes, au moment de la tenue du séminaire Banach, c'est-à-dire en début d'année 1964. Cependant on ne savait pas la démontrer à cette époque autrement qu'en adaptant la démonstration par induction de la forme analytique. Pour cette raison il a paru inutilement compliqué d'en parler à ce moment là.

Indépendamment, la propriété avait été annoncée, toujours pour des semi-normes, par V. Strassen[22], mais les membres du séminaire ne connaissaient rien de sa méthode. Au même moment, une démonstration élégante, à partir de l'énoncé du livre de Banach, était proposée par Choquet[23] en réponse au questionnement du séminaire Banach. Malheureusement cette dernière, qui n'a été donnée que dans un courrier privé, était spécifique au corps des nombres réels.

On ne s'était pas rendu compte que ledite propriété de décomposition de Strassen était parfaitement équivalente à la forme analytique prénormée, le passage dans un sens et dans l'autre étant essentiellement trivial et valable pour un corps valué complet quelconque[24]. Sachant que le théorème de Hahn-Banach traduit une propriété d'ante-exactitude du foncteur dual, la propriété est pourtant on ne peut plus naturelle.

Précisément, si $p \wedge q$ désigne la prénorme borne inférieure de p et q, on a une suite exacte

$$0 \to E_{p+q} \to E_p \oplus E_q \to E_{p\wedge q} \to 0 \ ,$$

où la seconde flèche est l'application $x \mapsto (x, x)$ et la troisième l'application $(x, y) \mapsto x - y$. Les flèches sont ici des morphismes stricts, sous-espace à gauche et quotient à droite, dans la catégorie dont les morphismes sont les applications linéaires diminuant, au sens large, la prénorme.

Par dualité, on obtient une suite

$$0 \to E'_{p\wedge q} \to E'_p \times E'_q \to E'_{p+q} \to 0$$

dont l'exactitude à gauche est évidente et dont l'exactitude à droite, pour un corps de base injectif, est la propriété de décomposition considérée.

Il ne serait absolument pas absurde de partir de la propriété de décomposition pour énoncer le théorème de Hahn-Banach. D'un autre côté, elle met en évidence l'importance de l'énoncé analytique dans un espace semi-normé ou plutôt prénormé.

La question du corps de base.

Bourbaki a toujours pris comme point de départ du théorème de Hahn-Banach une formulation spécifique au corps des nombres réels, comme l'était déjà celle du livre de Banach. Maintenant il est difficile de savoir s'il y a eu là une réelle intention. En effet le seul énoncé pour lequel on peut chercher s'il s'étend à un autre corps est la forme qu'il appelle analytique, celle du prolongement d'une forme linéaire majorée par une semi-norme.

---

[22] Référence à trouver

[23] Voir l'appendice "prolongement-séparation", §8, n°1, proposition 4, p 57.

[24] Voir l'appendice "prolongement-séparation", §8, n°3, proposition 2, p 59.

Cela étant la question de savoir s'il fallait, de façon générale, se limiter au corps des nombres réels pour traiter la dualité a été longtemps débattue. Elle a été tranchée en 1952, comme une tribu[25] de cette époque le relate. Le groupe se plaint de la longueur du chapitre IV et dit ceci.

Une des principales raisons de ces longueurs est qu'il faut redémontrer, pour les topologies faibles sur un corps discret, toutes les propriétés vues au chap. I, §2 et qui sont fausses pour une topologie quelconque sur un tel corps.

Et il conclut ainsi.

On pourrait éventuellement alléger en déclarant qu'on ne s'intéresse pas aux corps discrets, mais alors on renonce à parler des linéairement compacts, dont les possibilités d'application en Algèbre ne sont pas négligeables.

Une tribu[26] de 1953 entérine la décision.

On décide de ne faire le §1 [du ch. IV] que sur **R** *ou* **C**. *Les linéairement compacts seront développés en Algèbre quand il y aura lieu (le n° 7 peut d'ailleurs être abrégé, l'idée générale étant simplement d'ajouter "linéairement" aux démonstrations sur les compacts ...*

La cause est entendue.

Quel ordre pour l'exposition?

Bourbaki se limitera donc au cas des nombres réels. Comme l'appendice sur le prolongement et la séparation le montre en détail, dans ce cas tous les énoncés peuvent se déduire les uns des autres sans recourir à l'induction transfinie.

Dans ces conditions on peut choisir de partir du plus simple, à savoir la forme analytique semi-normée et d'en déduire successivement la forme analytico-géométrique, la forme analytique abstraite et la forme géométrie concrète.

On peut aussi partir du plus central, qui est la forme analytique abstraite, pour en déduire d'une part la forme analytico-géométrique et la forme géométrique concrète.

Il reste que le chemin le plus court, celui que Bourbaki a fini par choisir, consiste à partir de la forme analytico-géométrique et d'en déduire successivement la forme analytique anstraite et la forme géométrique concrète.

Par ailleurs nous avons dit qu'il convenait aussi de considérer des fonctions sous-linéaires prenant la valeur $+\infty$. Or la formulation de Choquet permet beaucoup plus aisément de gérer les difficultés inhérentes à cette extension.

On établira donc en premier, comme Bourbaki, la forme analytico-géométrique de Choquet. D'une part on en déduira la forme analytique abstraite du livre de Banach, puis sa version analytique semi-normée et l'énoncé de décomposition associé. D'autre part on en tirera la forme analytico-géométrique de Krein, puis la forme géométrique concrète; pour cette dernière il suffit de se ramener à une sous-variété homogène et de prendre le cône engendré par la partie ouverte convexe à séparer par un hyperplan homogène.

La seule question qui se discute est l'utilité d'énoncer la forme de Krein et celle de Banach. Cependant il faut remarquer que leur coût démonstratif est strictement nul dans la stratégie indiquée.

---

[25] Tribu NBT 022, Celles sur Plaine, 8-16 mars 1952.

[26] Tribu NBT 031, p 16.

Ainsi Bourbaki a-t-il fini par trouver le “bon cadre” pour le théorème de Hahn-Banach, objectif qui a été le sien pour l’ensemble de son traité et qui le distingue de beaucoup de textes concurrents.

La rencontre avec une tradition.

Il serait intéressant de connaître le cheminement postérieur à 1953 que Bourbaki a emprunté sur le sujet. Certainement l’intervention de Choquet a-t-elle été déterminante. Mais comment ce dernier a-t-il été amené à dégager sa propre version? Il l’a exposée à son séminaire de 1962, à propos du problème des moments. Est-ce en revisitant ce vieux problème qu’il a été conduit à reprendre le théorème de Hahn-Banach? On peut douter qu’il n’ait pas eu aussi d’autres raisons.

En tout cas, à l’occasion du théorème de Hahn-Banach, le groupe Bourbaki aura rencontré la tradition que nous avons qualifiée d’élévatrice légère.

En quoi la forme analytico-géométrique constitue-t-elle un progrès conceptuel? Il n’est pas très facile de répondre.

Mettre l’accent sur une formulation géométrique, au sens ordinaire du terme, en Analyse, relève d’une philosophie qui remonte à David Hilbert et Erhard Schmidt. En même temps, c’est peut-être aussi une tradition française. Par ailleurs, en dimension 2, la séparation par une tangente est plus visuelle que la conservation exacte d’une norme. Il est certain que le groupe Bourbaki a toujours fait ce choix.

En principe, une formulation géométrique a le mérite d’être plus intrinsèque qu’une formulation analytique comparable. C’est bien le caractère du théorème de prolongement des formes linéaires positives. Un cône convexe abstrait a quelque chose de plus intrinsèque que le graphe d’une fonction sous-linéaire.

Surtout, le théorème en question n’a pas besoin d’une topologie ambiante pour être formulé. Il est donc plus pur que les versions que nous avons qualifiées de concrètes.

Donc Bourbaki aura accompli un cycle complet, commençant par la quête d’un énoncé, passant par beaucoup d’hésitations, puis se fixant sur un choix répondant à sa préoccupation première. Nous retrouverons à d’autres occasions ce paradoxe : les intuitions initiales du groupe Bourbaki ont fini par se révéler être les bonnes.

§5.– Espaces d'applications linéaires

La décision de faire un chapitre spécial pour les espaces d'applications linéaires continues entre deux espaces vectoriels topologiques n'était pas évidente. Les premières rédactions s'intéressent directement au dual. Ce n'est qu'après la guerre que le chapitre en question est apparu.

Il est tout à fait logique de parler des espaces d'applications dans le cas général avant de s'intéresser au cas particulier où l'espace d'arrivée est le corps de base. Ce n'est pourtant pas ce que fait Grothendieck dans son cours de São Paulo. La raison est que ce dernier utilise très vite la dualité comme outil, bien avant d'introduire les classes particulières d'espaces. D'ailleurs le fascicule de résultats sur les EVT écrit par Serre avant la première édition commence par donner les énoncés essentiels de la théorie avant de fournir quelques définitions relatives à certaines catégories d'espaces. Cette entorse à l'ordre logique — évidemment impensable dans le traité lui-même — a le mérite de rendre la lecture de ce fascicule bien plus agréable que celle du livre lui-même.

Bourbaki accompagne son choix par le souci d'énoncer le plus de résultats qu'il est possible dans le cadre général. Cela va le conduire à en répéter un certain nombre au moment d'aborder la dualité proprement dite. Il faudra attendre la rédaction de 1981 pour la suppression des redites, lesquelles avaient malgré tout le mérite de faciliter la lecture du chapitre suivant.

1. Une double contrainte

Comme nous venons de le dire, Bourbaki a choisi de traiter les espaces d'applications avant la dualité. En même temps il est absolument clair qu'il le fait en pensant avant tout à la dualité.

Le chapitre était cependant soumis à une autre contrainte de compatibilité, du fait de sa relation avec le chapitre X sur les espaces fonctionnels du livre de topologie générale. De façon évidente, la convergence dans un espace d'applications linéaires continues relève, comme cas particulier, de la convergence dans un espace d'applications continues, ou plutôt uniformément continues.

Dans la première rédaction du chapitre X en question dont nous disposions, qui est numérotée R031 et qui serait l'état 1, le chapitre est séparé en deux parties, constituant les chapitres VII (structures uniformes dans les espaces fonctionnels) et VIII (espaces fonctionnels). Le changement de numérotation des chapitres facilite la datation à l'aide de la Tribu[1], puisqu'en 1944 il est décidé d'arrêter la topologie au chapitre VII qui traitera les espaces fonctionnels et qu'en 1945, au contraire, on repousse le sujet au delà des chapitres VII et VIII, qui sont maintenant consacré aux groupes $\mathbf{R}^n$ et aux nombres complexes.

S'il est certain que le chapitre X a été écrit assez tôt, cela ne permet cependant pas de savoir quel livre a influencé quel autre, entre les espaces uniformes d'une part et les EVT de l'autre. Vraisemblablement c'est une influence mutuelle qu'il faut retenir.

---

[1] Voir notamment les tribus NBT 09bis, 1943,
NBT 010, 15 avril 1944, NBT 011, 10-18 septembre 1943
et NBT 012, 19 juillet 1945.

La rédaction R031 dont nous venons de parler introduit déjà un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties. Les conditions suivantes seront fixées pour la suite[2].

I a. La réunion de deux ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

II a. Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

III a. Tout point de E appartient à au moins un ensemble de $\mathfrak{S}$.

La dernière propriété a été imposée pour avoir un espace d'applications qui soit séparé, sachant que l'espace d'arrivée est toujours supposé complet, donc probablement séparé suivant les conventions d'alors.

La seconde rédaction archivée sur le sujet est numérotée R032 et ce serait l'état 3. Le chapitre s'appelle maintenant VIII, ce qui suppose que sa rédaction n'est pas beaucoup plus récente. Plusieurs changements sont apparus, à commencer par les conditions imposées à l'ensemble $\mathfrak{S}$, qui sont désormais les suivantes[3]. Elles seront maintenues par la suite.

(F'$_{\mathrm{I}}$) Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

(F'$_{\mathrm{II}}$) La réunion de deux ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

L'ordre des deux premières conditions a été changé. Ce n'est pas tout à fait innocent et cela porte témoignage d'une forme de perfectionnisme : on commence par les propriétés qui ne concernent qu'un argument.

L'essentiel est cependant la suppression de la troisième condition. C'est lié au fait que l'espace uniforme d'arrivée est maintenant quelconque. Surtout c'est la conséquence du changement de point de départ. Dans l'état 1, Bourbaki s'était, comme nous l'avons dit ailleurs, un peu fourvoyé dans des ensembles de filtres. Ici il part de la convergence sur une partie A donnée. Evidemment la troisième condition doit être abandonnée.

Que faut-il penser de cela? Faut-il, par exemple, considérer que l'on doive parler de la convergence sur un compact avant d'introduire la convergence sur tout compact? Dans un premier temps Bourbaki, pragmatique, avait répondu non. Puis il s'est ravisé. Aujourd'hui nous privilégierions ce qui est naturel, c'est-à-dire fonctoriel et nous donnerions raison à la première version. Nous retrouverons le même débat à propos des espaces vectoriels. C'est la raison pour laquelle nous devions l'ouvrir ici.

En fait les trois propriétés du début définissent une bornologie. Ici nous voulons juste indiquer pourquoi la troisième condition, qu'a imposée Lucien Waelbroeck en introduisant le concept, est à nos yeux importante.

Cette condition, comme nous l'avons dit, est liée à la séparation. Elle permettra de dire que si F est séparé alors $L(E, F)$ l'est aussi. Surtout, ce qui est beaucoup plus important, elle assurera que si F est complet, alors $L(E, F)$ est également complet, du moins à un détail près dont nous parlerons aussi. Ici "complet" signifiera "séparé complet". C'était l'idée de départ de Bourbaki. C'est aussi celle que défend Christian Houzel. La complétude sans séparation n'est pas à mettre en avant, parce que là où il y a un foncteur adjoint du fonction d'inclusion c'est pour la sous-catégorie des espaces uniformes composée de ceux qui sont complets et en particulier séparés.

Nous avons placé dans une petite annexe quelques considérations sur les espaces fonctionnels (non linéaires) qui précisent certains points[4].

[2] R031, chapitre VII, §1, pp 3 et 4.

[3] R032, chapitre VIII, §1, n°2, p 113.

[4] Voir l'appendice "espaces fonctionnels", §11, p 98.

2. L'évitement des bornologies

La bornologie obéit à la topologie.

Il n'est pas étonnant que les premières bornologies considérées soient celles qui dérivent directement de topologies. Il y a des parties bornées naturelles dans un EVT, dites *parties bornées canoniques*, à savoir les parties absorbées par tout voisinage de zéro.

C'est la bornologie canonique de E qui permettra notamment de définir ce qu'on appelle son *dual fort*, espace auquel Bourbaki va attacher beaucoup d'importance et nous reparlerons en détail plus loin.

Les parties bornées canoniques apparaissent dans les rédactions de l'après guerre. C'étaient sans doute au départ les parties sur lesquelles les semi-normes structurelles étaient bornées. La rédaction 106, qui date de 1949, en fait déjà largement usage à propos du dual fort d'un espace de Fréchet[5].

La définition des "dits" ensembles bornés est intégrée au chapitre III sur la dualité dans la rédaction R088 et elle est à cette place dans les éditions de 1955 et 1967[6].

L'édition de 1981 apporte des changements évidents. On y définit une *bornologie* sur un ensemble abstrait[7]. Cependant, par opposition à Waelbroeck ou Houzel sur ce point, il n'est pas imposé à une bornologie d'être couvrante, i.e. d'admettre automatiquement les ensembles finis comme ensembles bornés. Surtout aucun nom n'est donné à la structure ni aucun usage n'en est fait. Tout de suite on définit les parties bornées d'un EVT et, dans le cas localement convexe, de ce qui maintenant appelé la *bornologie canonique*. Plus généralement, dans le cas localement convexe toujours, on introduit les *bornologies adaptées*[8] auxquelles on impose d'être convexes et stables par passage à l'adhérence, comme dans le séminaire Banach.

Bref, malgré un titre de paragraphe ambitieux, *bornologie dans un espace vectoriel topologique*, la philosophie sur le sujet subit peu de changements. D'une certaine façon même, la tentative de compromis opérée ne va pas dans le sens de la lisibilité. Le parti-pris précédent allait peut-être coûter cher à Bourbaki, mais il avait sa cohérence.

La topologie s'impose dans les limites inductives.

Revenons au cas où les bornologies prennent l'avantage sur les topologies, qui est celui des limites inductives. Bourbaki n'a pas négligé ces limites, mais il va éviter le passage par les structures bornologiques, se contentant de considérer des cas particuliers.

Les limites inductives apparaissent dans la rédaction R106, pour une suite d'espaces de Fréchet dont chacun s'identifie à un sous-espace du suivant; c'est alors le cas de chaque terme dans la limite et les parties bornées canoniques de la limite le sont dans l'un des termes[9]. L'édition de 1953-1955 traite au chapitre II le cas des espaces localement convexes généraux[10]; la limite inductive est dite *stricte*. Le chapitre III reprend la caractérisation des parties bornées canoniques d'une telle limite[11].

[5] Chapitre IV, §2, n°2, p 106.

[6] Chapitre III, §2, n°1, définition 1, p 2 et 4; n°2, proposition 2, p 3 et 6; proposition 4, p 5.

[7] Chapitre III, §1, n°1, définition 1, p EVT III.1.

[8] Chapitre III, §1, n°2, proposition 1, p EVT III.3.

[9] Chapitre IV, §3, n°1, proposition1, p 133 et proposition 2, p 134.

[10] Chapitre II, §2, n°5, proposition 3, p 64.

[11] Chapitre III, §2, n°4, proposition 6, p 8.

Ces parties bornées sont précisément celles de la limite inductive bornologique, c'est-à-dire de la limite prise dans la catégorie des espaces vectoriels bornologiques de type convexe. Cette dernière est triviale. Cependant Bourbaki ne peut pas en profiter : il se place juste dans une situation où le cadre topologique permet de la récupérer.

L'édition de 1965 va plus loin, traitant le cas d'une limite de suite d'espaces localement convexes, comme cas particulier de structure finale[12]. Les limites inductives sont illustrées par des exemples dans l'édition de 1981. A ceux déjà indiqués, on peut ajouter celui[13] de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}^n$.

Il y a peut-être eu quelque hésitation à propos de ces limites. Dans la Tribu[14] de 1951, il est dit qu'*on réserve les limites inductives jusqu'à l'examen d'un exposé de Grothendieck*. Mais l'hésitation n'a apparemment pas duré.

La topologie reprend le dessus.

Pour contourner les structures bornologiques, Bourbaki s'intéresse aux espaces localement convexes qu'il appelle *bornologiques* et qui sont ceux pour lesquels les disques bornivores sont des voisinages de zéro. Ce sont les espaces *normaux* du séminaire Banach, qu'on peut aussi bien décrire par leur topologie que par leur bornologie[15].

Pour ces espaces on peut retrouver la topologie à partir de la seule connaissance des parties bornées. Si faut en passer par la bornologie, on saura alors récupérer, après coup, un résultat concernant la topologie.

Les espaces bornologiques apparaissent en fait dans les commentaires qui terminent la rédaction R128, mais ils y sont appelés *bornographiques*. Ce sont ceux pour lesquels *toute partie convexe qui par homothétie peut avaler tout ensemble borné*, parties appelées *bornivores* dans le séminaire Banach, sont des voisinages de zéro[16].

A partir de la rédaction R145, ils sont appelés bornologiques[17]. On les retrouve dans l'édition de 1955 en exercice[18]; puis dans le corps du texte dans l'édition de 1981[19].

Entretemps il leur est arrivé d'être contestés; on lit dans la Tribu[20] de 1951 qu'*on réduira la place des bornologiques.*

---

12 Chapitre II, §4, n°6, proposition 9, p 79.

13 Bourbaki E81.

14 Tribu NBT 027, Royaumont, 1-9 octobre 1951.

15 Voir l'appendice “espaces disqués”, §9, n°4, p 72.

16 Chapitre II, §1, définition, p 28.

17 Chapitre II, §4, théorème 2.

18 Chapitre III, §2, exercice 12), p 13.

19 Chapitre III, §2, p III.12.

20 Tribu NBT 27, Royaumont, 1-9 octobre 1951, p 8.

3. Structure des espaces d'applications linéaires.

Les espaces d'applications linéaires ne sont pas vraiment étudiés dans les premières rédactions. Ensuite le contenu a peu changé, jusqu'à l'édition de 1981 comprise. La principale différence entre Bourbaki et Grothendieck est que le premier a traité ces espaces avant la dualité, ce qui était logique puisque l'accent était mis sur le dual fort.

De façon générale, si E et F sont des EVT, pour faire de l'espace vectoriel $L(E, F)$ un EVT, Bourbaki est amené, dans la rédaction R145, à adjoindre à E un système $\mathfrak{S}$ de parties bornées. Il définit l'espace $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ comme l'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{S}$[21]. Plus tard et par une étrange précaution, dans la rédaction R088 et l'édition de 1955, il n'impose pas tout de suite aux parties d'être bornées et considère la compatibilité de cette topologie avec la structure vectorielle de $L(E, F)$.

La stratégie a été précédée par la considération de cas particuliers. Mettons de côté les convergences simple et forte dans un espace d'opérateurs; la description topologique de la première, dite paradoxalement forte, remonte à Neumann. Dans la rédaction R106, on considère dans le dual fort d'un espace de Fréchet, les topologies $\mathcal{T}_s$ de la convergence simple, $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme sur les parties relativement compactes et $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées[22].

Cependant considérer un système $\mathfrak{S}$ quelconque change la nature du problème. Auparavant il ne s'agissait que de quelques bifoncteurs (s), (c) et (b) de (elc)$\times$(elc) dans (elc). En se donnant un système sur E sans souci d'universalité, on enrichit la structure. L'option est confirmée par le chapitre 10 sur les espaces fonctionnels du livre de Topologie générale : on y donne en exemple le cas où $\mathfrak{S}$ est une partie A de E ou l'ensemble des parties finies de A. C'est cohérent avec le fait, dans le cas des EVT, de ne pas imposer au système $\mathfrak{S}$ de comprendre les points ou, dans l'édition de 1981, à une bornologie d'être couvrante. Ce faisant, Bourbaki rompt avec le principe suivant lequel la structure des espaces de morphismes est entièrement donnée par les objets de départ et d'arrivée.

C'est bien la donnée d'un espace vectoriel, d'une topologie et d'un système de parties bornées qui va définir le type d'objet avec lequel Bourbaki travaille à partir du chapitre III des rédactions d'après-guerre ou du second volume des deux premières éditions. Or il y a une notion pour cela. Il s'agit des *espaces disqués* de Christian Houzel, que le séminaire Banach appelait *espaces vectoriels topologiques et bornologiques de type convexe*[23].

Retenons que si E et F sont des espaces disqués, alors $L(E, F)$ est l'espace des applications linéaires continues et bornées de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E et de la bornologie des parties équicontinues et équibornées. Dans le cas considéré au chapitre III du livre des EVT, l'espace F est topologique : on en fait un espace disqué en lui adjoignant sa bornologie canonique; les applications linéaires continues à valeurs dans F sont alors bornées et les ensembles équicontinus de telles applications sont alors équibornés.

On peut s'interroger sur les raisons qui ont poussé Bourbaki à cacher cette structure dont il manie tant d'exemples. Et pourquoi Grothendieck lui-même ne l'a pas fait. En conséquence on s'interdit de nommer des propriétés faisant intervenir à la fois E et $\mathfrak{S}$.

[21] Chapitre III, §1, n°1, proposition 1, p 187.

[22] Chapitre IV, §2, n°1, p 10.

[23] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°5, p 72.

La rédaction de 1981 aurait pu profiter d'un plus grand recul sur le sujet. Mais peut-être fallait-il maintenir une certaine cohérence avec les textes précédents. Et le sujet commençait à lasser.

Des structures parasites à camoufler.

Le choix de Bourbaki sera conforté si l'excroissance incongrue que représente la donnée du système $\mathfrak{S}$ ne vient pas parasiter outre mesure les propriétés des espaces d'applications linéaires continues. Il s'intéresse très vite à des conditions sur les espaces E, F concernés et des propriétés des espaces $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ qui seront, sous ces conditions, largement indépendantes du choix de $\mathfrak{S}$.

Evidemment ce ne peut être le cas pour la topologie de $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$. C'est donc, paradoxalement, vers sa bornologie canonique que Bourbaki va se tourner, **comparant les parties bornées** et établissant une propriété qui sera utile pour la dualité.

En préambule Bourbaki va être amené à vérifier que les parties bornées canoniques de $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ sont aussi les parties équibornées lorsque E est muni de la bornologie $\mathfrak{S}$ et F de la bornologie canonique. On en trouve déjà cette remarque énoncée dans la rédaction R145[24]. On la retrouve dans la rédaction R088 et dans l'édition de 1955[25].

Cependant c'est la comparaison de ces parties bornées entre elles, lorsqu'on fait varier $\mathfrak{S}$, qui intéresse surtout Bourbaki. L'idée n'est pas nouvelle. On la trouve déjà, pour les topologies simple et forte dans leurs espaces de suites, chez Köthe et Toeplitz.

Dans la rédaction R145 il est montré que les parties bornées sont les mêmes pour la convergence simple et pour la convergence sur des parties disquées bornées complètes, donc sur les disques bornés canoniques si E est complet[26]. Dans la rédaction R088, comme dans l'édition de 1955, la complétude de E est simplement remplacée par la quasi-complétude[27].

Nous n'allons pas évoquer pour le moment la démonstration, car nous reparlerons du sujet à propos de la dualité forte, où il trouve sa place naturelle.

Il y a en effet plus significatif que l'étude des ensembles bornés de $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$. De même qu'une bornologie sur E définit sur E' ou $L(E,F)$ une topologie, de la même façon une topologie sur E définit sur E' naturellement une bornologie, celle des parties équicontinues.

C'est à **échapper aux parties équicontinues** que Bourbaki va s'employer; on en reparlera dans la section qui suit. Il ne les considère pas comme les parties bornées naturelles qu'elles sont; il préfère chercher des conditions les liant aux parties bornées canoniques des $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Tout sort en fait de l'étude du cas particulier où E est un espace de Fréchet et la matière est déjà dans la rédaction R001. On y établit qu'une partie du dual d'un espace de Fréchet est équicontinue si et seulement si elle est bornée en chaque point; en fait c'est le cadre plus général des fonctions à valeurs dans un espace localement convexe qui est traité[28]. De cette façon les parties équicontinues sont évacuées.

---

[24] Chapitre III, §1, n°3, proposition 2, p 190.

[25] Chapitre III, §3, n°4, proposition 3, resp. p 9 et p 21.

[26] Chapitre III, §1, n°3, théorème 2, p 191.

[27] Chapitre III, §3, n°4, théorème 1, resp. p 9 et p 21; corollaire 1, resp. p 10 et p 21.

[28] Chapitre III, §1, proposition 4, p 84.

La rédaction R106 franchit un pas. On y annonce que, lorsque E est un espace de Fréchet, les parties bornées pour $\mathcal{T}_b$ et $\mathcal{T}_s$ sont les mêmes, parce que ce sont aussi les parties équicontinues[29]. Il en résulte que ce sont aussi les parties bornées pour la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence compacte. On peut lire ceci : *on peut donc parler d'ensemble borné dans cet espace sans spécifier pour quelle topologie*. Cela explique bien la philosophie.

Par la suite, **avec les espaces tonnelés**, Bourbaki rend le procédé systématique. Il introduit une notion qui va devenir centrale : un tonneau est un disque fermé absorbant et un espace est tonnelé si tout tonneau est un voisinage de 0.

Le virage est pris avec les commentaires qui suivent la rédaction R128. On y introduit la notion d'espace *fort*, qui sera celle d'espace tonnelé ensuite[30]. La raison en est donnée : *un espace $\mathcal{LF}$ est tonnelé alors qu'il n'est ni Fréchet ni même Baire*. La découverte avait fait l'objet d'une publication[31] de Bourbaki lui-même, lequel se félicite d'avoir pu remplacer par un axiome la construction représentée par les limites inductives.

Dès 1951 et jusqu'à l'édition de 1967, les espaces tonnelés sont introduits avant même les ensembles bornés, soit avant le chapitre III des rédactions, soit en début de chapitre dans les éditions de 1955 et de 1967[32].

L'édition de 1981 change malgré tout la présentation. Les espaces tonnelés ne sont présentés qu'au §4 du chapitre III, après les parties bornées, les espaces bornologiques et les espaces d'applications linéaires continues, ce qui est beaucoup plus rationnel.

Le succès des espaces tonnelés est lié au fait que *tous les espaces rencontrés sont tonnelés*, comme on le lit dans la Tribu[33] de 1952. On tenait la propriété qui allait tout faire marcher sans avoir à corriger la structure considérée.

On va **camoufler les parties équicontinues**; dès la rédaction R145, il est montré que, pour E tonnelé, les parties simplement bornées de $L(E, F)$ le sont canoniquement. Le même énoncé se retrouve dans la rédaction R88 et les éditions de 1955 et de 1967. L'édition de 1981 n'apporte pas de nouveauté; la question est juste repoussée plus loin.

Nous retrouverons cette dernière question à propos de la dualité forte. Plus généralement, nous reprendrons plus en détail le thème des espaces tonnelés à cette ocasion.

Complétude et quasi-complétude.

Le premier théorème du paragraphe sur les espaces d'applications de la rédaction R145 concerne la complétude de $L(E, F)$ lorsque F est (séparé) complet; elle a lieu si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées canoniques et si l'espace E est bornologique[34]. C'est en fait un théorème sur l'espace des applications linéaires bornées d'un espace vectoriel bornologique (un evb) dans un espace vectoriel topologique (séparé) complet. La propriété pour E d'être bornologique permet de le transposer.

Sinon la complétude de l'espace $L(E, F)$ fort a déjà été envisagée dans la rédaction R106 lorsque F est complet et que E est un espace de Fréchet[35]. Comme un espace métrisable est bornologique, c'est un cas particulier de l'énoncé précédemment évoqué.

29 Chapitre IV, §2, n°1, théorème 1, p 104.

30 §2, définition.

31 Bourbaki 1950, pp 5-16.

32 Chapitre III, §1, n°1, définition 1, p 1.

33 Tribu NBT 028, Celles-sur-plaine, 8-16 mai 1952.

34 Chapitre III, §1, n°2, théorème 1, p 189.

35 Chapitre IV, §2, n°1, proposition 1, p 103.

Dans le cadre général des espaces disqués, même lorsque l'espace d'arrivée est complet, voire lorsque c'est le corps de base, l'espace $L(E, F)$ n'est en général pas complet, mais seulement *quasi-complet* : il admet un système fondamental de disques bornés qui sont complets pour la structure uniforme induite par la topologie[36].

Bourbaki ne considère la quasi-complétude que pour des espaces localement convexes et leur bornologie canonique : il demande qu'un système fondamental de parties bornées canoniques soient complètes; la bornologie reste soumise à la topologie. Pour autant il a conscience de l'importance de la notion. La Tribu[37] de 1951 indique ceci : *on s'aperçoit (p34) que quasi-complet est plus important que complet dans la pratique*.

La notion d'espace quasi-complet ne semble pas présente dans la rédaction R145. Elle apparaît dans la rédaction R088[38] et se retrouve dans toutes les éditions.

Cependant il faut se ramener aux parties équicontinues pour établir la quasi-complétude de $L(E, F)$. Ainsi voit-on réapparaître les espaces tonnelés : *le dual d'un tonnelé est quasi-complet*, lit-on dans la Tribu[39] de 1953. C'est le cas dans la rédaction R088[40], comme cela le restera, malheureusement, jusque dans la dernière édition.

Le véritable théorème de quasi-complétude est pourtant bien présent dans les EVT de Bourbaki. On le trouve déjà caché dans la rédaction R001, où il est dit dans le texte[41] que l'adhérence faible d'une partie équicontinue est complète. Cela pour énoncer que les parties bornées du dual faible d'un espace de Fréchet sont exactement les parties faiblement relativement compactes[42]. Ensuite la question semble provisoirement oubliée.

A partir de l'édition de 1955, cette quasi-complétude est reléguée plus loin dans les généralités sur les espaces d'applications linéaires, dans un paragraphe sur les parties complètes de $L(E, F)$ [43]. Très logiquement, la quasi-complétude à la Bourbaki en est déduite quand E est tonnelé[44], ce qui est malgré tout un progrès.

Dans l'édition de 1981, la question des parties complètes de $L(E, F)$ est reprise au même endroit que dans les éditions précédentes[45]. La conséquence sur la quasi-complétude canonique est reportée plus loin encore[46]. L'ordre est plus satisfaisant, mais l'énoncé privilégié est toujours le mauvais.

Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas rectifié le tir alors qu'il avait un argument rêvé pour le faire et qu'il avait déjà accompli une grande partie du chemin? Le groupe ne pouvait plus ignorer, dix ans après la parution du séminaire Banach et plus de quinze ans après sa tenue, les structures bornologiques et leurs liens avec la topologie. Peut-être les connaissait-il même trop bien. En effet, ces dernières n'avaient pas très bonne presse, à la suite de l'engouement peu productif qu'elles ont connu entre 1970 et 1980 et qui est très vite retombé par la suite.

---

[36] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°6, théorème 2, p 74.

[37] Tribu NBT 027, Royaumont, 1-9 octobre 1951, p 8

[38] Chapitre III, §2, n°4, définition 2.

[39] Tribu NBT 29, Pelvoux-le-Poet, 25 juin-8 juillet 1053, p 11.

[40] Chapitre III, §3, n°7, théorème 3, p 14.

[41] Chapitre III, §1, bas de la p 85.

[42] Chapitre III, §1, proposition 6, p 66.

[43] Chapitre III, §3, n°7, théorème 4, p 30.

[44] Chapitre III, §3, n°7, corollaire 2, p 31.

[45] Chapitre III, §3 n°8, proposition 11, p EVT III.22.

[46] Chapitre III, §4, n°3, théorème 2, p III.27.

§6.– Les différentes dualités

Nous parlons ici de la dualité dans les EVT au pluriel, ce qui peut sembler étrange à propos de Bourbaki, puisque, comme on le verra, ce dernier tentera d'imposer une vision unique sur le sujet.

Cependant la dualité est bien déclinée au pluriel dans les premières rédactions, celles d'avant 1940. Nous nous inspirerons de la classification initiale, laquelle nous semble correspondre, paradoxalement, à l'interprétation la plus moderne. Cela nous a conduit à proposer la présentation suivante.

- Dualité abstraite.
- Dualité faible.
- Dualité intermédiaire.
- Dualité forte.

Précisément les premières rédactions ont dégagé, avec plus ou moins de bonheur, les trois premières, alors que les dernières rédactions et les différentes éditions ont tout organisé autour de la dualité forte, ne sachant pas toujours très bien placer le reste de la matière.

Si l'on regarde l'Histoire, il faut sans doute considérer que c'est la dualité forte qui a été étudiée en premier. Dans le cadre des espaces normés, il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace dual. La caractérisation du dual des espaces L^p, pour $1 < p < \infty$, remonte à Frédéric Riesz[1]. Cependant, avec le passage aux EVT généraux, il n'y avait plus de façon aussi limpide de définir le dual. Pour cette raison la dualité dite forte sera éclipsée pour un temps. Nous verrons d'ailleurs ce qu'il faudra en penser, à la lumière de ce que nous avons dit à propos de la nature des espaces d'applications linéaires.

Même dans le cas des espaces normés, Banach lui-même n'est pas arrivé à caractériser les espaces duaux dans le cas général[2]. C'est ce qui explique le recours à un chemin de traverse qui lui fera considérer ce que Bourbaki appellera dans ses premières rédactions la dualité intermédiaire; nous en reparlerons en détail. C'est dans cette même direction qu'on travaillé notamment Krein ou Smulian[3].

En réalité c'est Bourbaki qui a ouvert la voie à la caractérisation des espaces normés duaux, en introduisant la topologie faible[4]. C'est ainsi que la dualité faible, du moins sous sa forme aboutie que l'on doit à Bourbaki, n'est-elle arrivée qu'après les dualités forte et intermédiaire.

Maintenant, pour poser le problème de la dualité faible, Bourbaki a innové. C'est d'une dualité abstraite entre deux espaces vectoriels E, F, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire sur le produit $E \times F$ qu'il part. Chevalley a apporté cette idée, dont il voulait faire d'ailleurs la ligne directrice pour l'algèbre linéaire. La démarche est on ne peu plus naturelle. Déjà, dans le cas des espaces L^p, la dualité entre les espaces L^p et L^q, pour des exposants conjugués p, q sans autre restriction, est première. Elle découle simplement de l'inégalité de Hölder et n'a absolument aucun besoin des travaux ultérieurs de Riesz.

[1] Riesz passait par l'intermédiaire de primitives.

[2] Banach 1932.

[3] Précisément parce qu'ils ne connaissaient pas la topologie faible.

[4] Il ne faut pas la confondre avec la convergence faible, connue depuis longtemps.

1. Dualité abstraite.

Une dualité abstraite entre des espaces vectoriels E et F est la donnée d'une forme bilinéaire sur $E \times F$. On la trouve dès la rédaction R001 sous une forme définitive[5]; seule restriction, qui sera maintenue, la dualité est supposée séparante. Certes, dès la seconde page et par exception, on considère la dualité entre un espace localement convexe E et son dual E'; ce qui est appelé topologie faible est ce qui sera appelé plus tard topologie *affaiblie*; d'après Dixmier, c'est à la demande d'André Weil, par une décision prise en 1953 et relatée dans la Tribu[6] : *éviter les adverbes tels que faiblement fortement et dire pour la topologie faible (forte, initiale, affaiblie) de E (ou E′)*, y lit-on.

Le principale interrogation qu'a dû affronter Bourbaki est l'endroit où placer cette dualité abstraite, qu'il appelle faible. Dans les rédactions d'avant-guerre, elle est placée assez tôt : dans R001, elle précède les espaces normés et l'étude de leur dual fort. Dans les rédactions d'après-guerre et la première édition, c'est le contraire; cette dualité est rapprochée de celle des espaces localement convexes, pratiquement intégrée dans R145 et la précédant immédiatement dans le chapitre IV de l'édition de 1955. Maintenant l'édition de 1965 marque un retour au choix d'origine. Le paragraphe §6 sur les topologies faibles est intégré au chapitre II, consacré aussi au théorème de Hahn-Banach.

Grothendieck n'a pas eu ce souci. La dualité précédant les espaces d'applications linéaires, il enchaîne Hahn-Banach, dualité abstraite et dualité localement convexe.

Polarité.

A cette dualité abstraite est associée une polarité, dont l'idée remonte à Köthe et Toeplitz. Si A est une partie de E, son *polaire* A° est l'ensemble des y de F vérifiant

$$\langle x, y\rangle \leq 1$$

dans le cas réel et $\Re\langle x, y\rangle \leq 1$ dans le cas complexe, ce qui revient à se placer dans l'espace réel associé.

Si A est un disque de E on peut remplacer la condition par $|\langle x, y\rangle| \leq 1$; le polaire est un disque de F. Si A est un sous-espace vectoriel de E, on peut remplacer la condition par $\langle x, y\rangle = 0$; le polaire est un sous-espace vectoriel de F, son *orthogonal*.

La rédaction R001 ne considère que l'orthogonal[7]. De la rédaction R105 à la rédaction R145, on introduit un *semi-polaire* $M^{\smile}$ par $\langle x, x'\rangle \leq 1$, le polaire étant le semi-polaire de $M \cup (-M)$[8]. La rédaction R088 définit le semi-polaire par $\langle x, x'\rangle \leq 1$ dans le cas réel et le polaire M° par $|\langle x, x'\rangle| \leq 1$ dans le cas réel ou complexe [9].

Le terme "semi-polaire" devient "polaire" dans la rédaction R173 et défini par $\Re\langle x, x'\rangle \leq 1$ pour unifier les cas réel et complexe[10]. La décision a été prise en 1953 comme le relate la Tribu[11]. A partir de l'édition de 1955 on se limite aux polaires et on ramène le cas complexe au cas réel[12].

---

[5] Livre IV, chapitre II, paragraphe 1, p 57.

[6] Tribu NBT 029, Pelvoux-le-Poet, 25 juin-8juillet 1953, pp 11-12.

[7] Chapitre II, §1, définition 2, p 62.

[8] Chapitre III, §3; n°3, p 86; resp. §2, n°2, définition 1 p 194.

[9] Chapitre IV, §2, n°3, définition 2, p 24 et définition 3, p 26.

[10] Chapitre IV, §2, définition 2, p 27.

[11] Tribu NBT 029, Pelvoux-le-Poet, 25 juin-8 juillet 1953, p 11.

[12] Chapitre IV, §1, n°3, définitions 2 et 3, p 51.

Polarité et structures.

Etant donnée une bornologie sur E *compatible* avec la dualité, définie par un ensemble de disques bornés *simplement bornés sur* F, on lui associe par polarité la topologie sur F, duale, dont un système fondamental de voisinages disqués de zéro est constitué par les polaires des disques bornés ou dont les voisinages disqués de zéro sont les disques de polaire borné. C'est la topologie de la convergence uniforme sur les disques bornés. C'est déjà ainsi, par polarité, que Köthe et Toeplitz définissent une topologie forte sur leurs espaces de suites.

C'est ce que fait Bourbaki dans les éditions d'après-guerre, à ceci près qu'il ne peut pas imaginer que E soit sans topologie. Dans la rédaction R145, il se contente d'introduire, dans le cadre d'un elc E et de son dual E', un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E et de définir un topologie sur E' en renvoyant à la topologie de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{S}$ dans $L(E, F)$[13].

La rédaction R088 marque une hésitation. La topologie en question n'est pas mise en valeur alors qu'elle apparaît dans le théorème de Mackey. Mais le rédacteur indique précisément que la mention de cet énoncé a été rejetée par le congrès de mars 52 et qu'il l'a rétablie. La raison invoquée est que le théorème intervient dans le critère de réflexivité et dans le théorème de Banach sur les formes linéaires faiblement continues sur les équicontinus — alors qu'on verra qu'il est possible de s'en passer.

Dans la rédaction R173, on considère la $\mathfrak{S}$-topologie pour des espaces E, F en dualité abstraite, en considérant F comme le dual faible de G et en renvoyant aussi aux espaces d'applications linéaires[14]. L'édition de 1955 fait de même[15].

Dans l'autre sens, étant donnée une topologie sur E définie par un ensemble de voisinages disqués de zéro, on lui associe par polarité une bornologie sur F, duale, dont un système fondamental de disques bornés est constitué par les polaires des voisinages disqués de zéro ou dont les disques bornés sont ceux dont le polaire est un voisinage de zéro. C'est la bornologie des parties équicontinues.

Cette fois-ci Bourbaki fait tout son possible pour esquiver la chose, comme on l'a vu à propos des espaces d'applications linéaires. On retrouvera les effets de cette omission volontaire lorsqu'on considèrera le dual fort.

Dans le cas des espaces normés, des exemples d'échange de structure par polarité sont connus depuis longtemps. Par exemple, si $1 \leq p \leq +\infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, nous avons cité en introduction la dualité naturelle entre L^p et L^q que procure l'inégalité de Hölder. On a un peu mieux. Les boules unités de L^p et L^q sont polaires l'une de l'autre dans cette dualité, comme il résulte cette fois-ci d'une petite réciproque de l'inégalité évoquée. La propriété vaut sans exclure les valeurs extrêmes de p, q et elle est infiniment plus élémentaire que le fait que chaque facteur soit dual de l'autre, ce qui exige $1 < p < +\infty$.

Etant donné un espace normé E et son dual normé E', on a aussi une dualité évidente entre E et E'. La boule unité de E a celle de E' comme polaire par définition de la norme sur E'. La boule unité de E' a pour polaire celle de E comme il résulte de la version analytique du théorème de Hahn-Banach.

---

[13] Chapitre III, §3, n°1, p 203.

[14] Chapitre IV (état 7), §2, n°3, p 35.

[15] Chapitre IV, §2, n°3, p 68.

Topologie faible et topologie de Mackey.

Lorsqu'on considère sur E la *bornologie fine* $(\mathfrak{s})$, constituée des disques bornés des sous-espaces de dimension finie, ou des enveloppes disquées des parties finies, on obtient, par dualité, la *topologie faible* (σ) sur F, notée $\sigma(F;E)$. C'est la topologie de la convergence simple sur E.

La rédaction R001 définit, dans une dualité abstraite, les topologies faibles $\sigma(E,E')$ sur E et $\sigma(E',E)$ sur E' comme les topologies de groupe (sic) les moins fines rendant continues les formes linéaires associées aux x' de E' et aux x de E, notées $B_{x'}$ et B_x[16]. La condition de groupe disparaît ensuite. Dans l'édition de 1955, les topologies sont encore définies[17] par la continuité des formes linéaires associées aux éléments de F et E.

On peut énoncer : *le bipolaire d'un disque est son adhérence faible.*

Ce **théorème des bipolaires** repose sur Hahn-Banach en dimension finie. On considère un disque D de E et un point a qui n'est pas dans l'adhérence faible de D. Soient des points $b_1,\ldots,b_n$ de F tels que l'ensemble défini par $\langle x-a,b_i\rangle \leq 1$ pour $i=1,\ldots,n$ ne rencontre pas D. Soient G le sous-espace vectoriel engendré par les b_i et G° son orthogonal. Passant au quotient dans E par G°, l'ensemble défini par $\langle \dot{x}-\dot{a},b_i\rangle \leq 1$ pour $i=1,\ldots,n$ ne rencontre pas l'image $\dot{D}$ de D. Il reste à trouver une forme linéaire z sur E/G° vérifiant $z(\dot{a})>1$ et $z(x)\leq 1$ dans $\dot{D}$, et à la représenter par un élément b de G. Alors b sera dans D° et a ne sera pas dans $D^{\circ\circ}$

Dans la rédaction R001, il est montré[18] que le biorthogonal d'une partie est le sous-espace vectoriel faiblement fermé engendré. Dans les rédactions R145 et R088, le théorème des bipolaires est donné pour les semi-polaires et les polaires[19]. Dans la suite, comme dans l'édition de 1955, il est donné est appliqué au biorthogonal[20].

On retient le résultat suivant : *si F est muni de la topologie faible $\sigma(F;E)$, alors l'application naturelle de E dans le dual de F est bijective.*

On le trouve dès la rédaction R001 : dans une dualité abstraite, *les formes linéaires faiblement continues sur E peuvent être représentées par des éléments de E'*[21].

On verra au n°3 la bornologie $(\mathfrak{t})$ sur E des disques *faiblement bornés et complets*, qui donne par dualité la *topologie* $(\tau)=\tau(F;E)$ *de Mackey.* On aura encore ceci : *si F est muni de la topologie de Mackey , l'application de E dans le dual de F est bijective.*

Dans le cas d'un corps localement compact, la bornologie $(\mathfrak{t})$ est celle des disques faiblement compacts. Bourbaki et Grothendieck s'en contentent. Le premier, qui ne formule pas l'énoncé, le démontre ainsi. Soit u une forme linéaire sur F continue pour la topologie de Mackey. Il existe un disque faiblement compact B de E tel que que $|u(x)|\leq 1$ pour x dans B°. Ce signifie que u est dans le polaire de B° dans F', donc dans le bipolaire $B^{\circ\circ}$ de B pour la dualité entre F et F'. Comme la topologie $\sigma(E;F)$ est induite par $\sigma(F';F)$, le disque B est faiblement fermé dans F'. Ainsi $B^{\circ\circ}=B$ par le théorème des bipolaires. Nous en reparlerons.

[16] Chapitre II, §1, définition 1, p 57

[17] Chapitre IV, §1, n°2, définition 1, p 50.

[18] Chapitre II, §1, proposition 2, p 62.

[19] Chapitre III, §2, 2, théorème 1, p 195 et proposition 6, p 196; resp. chapitre II, §2, n°3, proposition 2, p 25 et proposition 3, p 27.

[20] Chapitre IV, §1, n°5, proposition 3, p 52; puis proposition 4, p 53.

[21] Chapitre II, §1, théorème 1, p 60.

2 . Deux modèles pour deux traditions.

On se donne toujours, pour commencer, une dualité abstraite séparante, donc sans structure supplémentaire, entre deux espaces vectoriels E et F.

Comme nous l'avons vu, par polarité, à une structure de type convexe de nature topologique ou bornologique sur un des facteurs correspond une structure de nature opposée sur l'autre. Dans ces conditions, quelle est la nature de la structure qu'il convient de se donner en premier et quelle question doit-on alors se poser?

La version de Bourbaki.

Bourbaki commence par se donner une topologie; ce sera une topologie localement convexe μ sur E, ce qu'on schématise comme suit.

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \mu & & \end{array}$$

Par polarité, il correspond à μ une bornologie *duale* $\mathfrak{m}$ sur F, celle dont un système fondamental de parties bornées est constitué par les polaires des voisinages disqués de 0 dans E. Le schéma se complète en

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \underline{\mu} & & \mathfrak{m} \end{array}$$

où l'on souligné la donnée.

Maintenant Bourbaki se place toujours dans le cas où F est le dual de E, la bornologie $\mathfrak{m}$ étant celle des parties équicontinues; ou bien il cherche à caractériser ce cas, sans s'intéresser d'ailleurs à la bornologie.

La version de Grothendieck.

Grothendieck fait dans son cours de São Paulo le choix exactement inverse. Nous le présentons en échangeant les facteurs. On se donne en premier une bornologie de type convexe $\mathfrak{b}$ sur F compatible, ce qu'on schématise comme suit.

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ & & \mathfrak{b} \end{array}$$

Par polarité, il correspond à $\mathfrak{b}$ une topologie *duale* β sur E, celle de la convergence uniforme sur les disques bornés, pour laquelle un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les polaires desdits disques bornés. Le schéma se complète en

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \beta & & \underline{\mathfrak{b}} \end{array}$$

où l'on a souligné la donnée.

Cela fait, Grothendieck veut notamment caractériser le dual de E muni de β.

Comparaison.

Dans la mesure où Bourbaki n'envisage que le cas où F est le dual E' de E, la donnée qu'il considère entre, comme cas particulier, dans celle que prend Grothendieck. En effet une topologie est toujours canoniquement duale : la topologie sur E est duale de la bornologie équicontinue sur E'.

Il faut cependant noter que Grothendieck, dans son cours, n'attire jamais l'attention sur le fait qu'il opère un choix différent; nous en reparlerons.

3. Dualité faible ou insaturée.

A partir de maintenant, la dualité va mélanger, dans chaque facteur, topologie et bornologie. On travaille donc avec les espaces disqués[22], sachant que si Bourbaki a fait un usage constant, mais implicite, du concept dans son troisième chapitre des EVT, il ne l'a jamais intégré dans sa stratégie, y compris dans les dernières éditions.

La version de Grothendieck.

Cela étant, le cadre de la dualité faible est très simple. Suivant le schéma précédent, on se donne une dualité abstraite séparante entre deux espaces vectoriels E et F.

On se donne également une bornologie de type convexe $\mathfrak{b}$ sur F compatible, à laquelle il correspond, par polarité, la topologie *duale* β sur E.

Cependant l'espace E est aussi naturellement muni de la bornologie fine $\mathfrak{s}$ et l'espace F de la topologie duale σ qui est la topologie faible $\sigma(F,E)$. D'où le schéma complet suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \beta, \mathfrak{s} & & \sigma, \underline{\mathfrak{b}} \end{array}$$

dans lequel on a souligné la donnée. Ainsi E et F apparaissent-ils tous les deux comme des espaces disqués et l'espace E s'identifie-t-il au dual disqué de F : en effet une forme du dual de F est, par hypothèse, faiblement continue, donc représentée par un élément de E; de plus la topologie de E est, par construction, celle du dual.

On notera, en revanche, que les hypothèses assurent seulement que l'espace localement convexe E est un sous-espace du dual de l'espace bornologique de type convexe F, espace des formes linéaires bornées sur F.

Maintenant on a une application naturelle de F dans le dual disqué E' de E, qui est le bidual disqué de F. La question est de déterminer ce dual E' : la réponse est donnée par le résultat suivant, pour lequel on rappelle que le dual d'un espace disqué n'est pas complet en général, seulement quasi-complet.

Théorème (Mackey-Grothendieck). Le dual de l'espace disqué E est le quasi-complété (faible) de F.

Autrement dit le bidual d'un espace disqué faible est son quasi-complété.

Le quasi-complété faible est la réunion des complétés faibles des disques bornés. Plus exactement, c'est, dans le complété faible, la réunion des adhérences faibles des disques bornés, muni, en plus de la topologie faible, de la bornologie engendrée par ces disques, lesquels s'identifient encore aux complétés faibles des disques bornés.

En effet un système fondamental de disques bornés du dual de E est constitué par les polaires dans le dual algébrique de E, qui est faiblement complet, des polaires des disques bornés de F. Par le théorème des bipolaires, ce sont encore les adhérences faibles des disques bornés en question.

En particulier le dual de E s'identifie à F si et seulement si ce dernier est quasi-complet, donc si et seulement si tout disque borné est faiblement relativement complet, ou encore faiblement relativement compact si le corps est localement compact.

Cela signifie encore que la bornologie de F est comprise entre la bornologie fine est la bornologie $(\mathfrak{t})$ de Mackey des disques faiblement bornés et complets.

[22] Voir l'appendice “espaces disqués”, §9, n°1, p 69.

Pour cela il faut voir qu'il s'agit bien d'une bornologie, à savoir que la réunion de deux disques B_1, B_2 faiblement bornés et complets de F est incluse dans un troisième du même type. On renvoie à l'appendice §8 où la propriété, mise en évidence par François Chargois, est établie à partir du théorème de décomposition annoncé au §4[23].

La version du théorème précédent ne sera pas utilisée par Bourbaki, la seule exception concernant la rédaction R001. On y envisage[24] le cas extrême de la dualité de E avec son dual algébrique E^* et on montre que le bidual algébrique est le complété faible de E.

En revanche le théorème ci-dessus est donné, sous les mêmes hypothèses avec E, F inversés, dans le cours de Grothendieck[25] où il est attribué à Mackey. On notera juste une bizzarerie. Le paragraphe dans lequel l'énoncé est donné est intitulé *bidual d'un espace localement convexe*. Or Grothendieck va précisément y caractériser le *bidual d'un espace bornologique de type convexe*. L'emprise topologique était trop forte pour que Grothendieck ait donné un nom à la structure qu'il manipulait.

La version de Bourbaki.

Dans le cadre de la dualité faible de Grothendieck, on fait entrer celle envisagée par Bourbaki, où E est un espace localement convexe muni d'une topologie μ. On cherche à quelle condition F est son dual E', muni de la bornologie naturelle $\mathfrak{m}$ des parties équicontinues. On complète comme précédemment.

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F = E' \\ \mu, \mathfrak{s} & & \underline{\sigma}, \mathfrak{m} \end{array}$$

On peut énoncer.

Corollaire (Mackey). Les topologies sur E compatibles avec la dualité sont des topologies duales d'une bornologie plus fine que la bornologie t de Mackey, ou des topologies comprises entre la topologie τ de Mackey et la topologie faible σ.

Contrairement à ce que Grothendieck envisage, Bourbaki ne considère pas, dans ses EVT, la recherche du bidual, mais seulement des conditions pour que l'espace F s'identifie au dual de E, en ne prenant en compte que l'espace vectoriel sous-jacent.

Le fait de ne pas partir d'une bornologie s'explique surtout par le fait que ces structures n'ont pas été dégagées. Cela n'empêche cependant pas Grothendieck de poser correctement le problème.

La rédaction R001 considère le cas d'un espace normé et de son dual fort. On y donne la condition de réflexivité de Mackey[26] : il faut et il suffit que tout ensemble borné soit faiblement relativement compact. La démonstration s'appuie sur une lemme : la boule unité de l'espace est faiblement dense dans celle du bidual. Ensuite on fait remarquer que la vérification de la condition de Mackey est malaisée et on traite le cas des espaces normés uniformément convexes dont on montre la réflexivité[27].

---

[23] Voir l'appendice "prolongement-séparation", §8, n°3, corollaire 2, p 61.

[24] Chapitre II, §1, p 66.

[25] Chapitre II, n°12, théorème 7.

[26] Chapitre II, §4, théorème 8, p 125 et théorème 7, p 124.

[27] Chapitre II, §4, proposition 8, p 128.

Le cas d'un espace de Fréchet est résolu dans la rédaction R106 avec la même formulation[28]. Cependant, comme pour les espaces normés, on commence par montrer que l'espace se plonge dans son bidual fort, à savoir que sa topologie est induite par celle de ce bidual, si bien que l'énoncé est présenté dans le cadre de la dualité forte et non pas dans celui de la dualité faible.

A partir de la rédaction R145, comme dans la rédaction R088 qui suit, on se donne deux espaces vectoriels F, G en dualité et on cherche à caractériser les topologies localement convexes sur F qui sont compatibles avec la dualité, i.e. telles que le dual de F s'identifie à G comme espace vectoriel. La réponse est fourni par le théorème de Mackey qu'on trouve dans les rédactions R145[29] et R088[30]. Ce doit être la topologie de la convergence uniforme sur un système de parties disquées faiblement compactes.

Comme on l'a dit, le rédacteur signale, en préambule, qu'il a maintenu cet énoncé alors qu'il avait été rejeté sous cette forme par le groupe. Il se justifie en expliquant que cela évite de faire deux fois le même raisonnement, pour la réflexité forte et pour le théorème de Banach.

Ce faisant, il reconnaît que cette dualité faible n'est qu'un outil pour Bourbaki et que c'est bien la dualité forte que ce dernier vise. C'est d'ailleurs pour cela même que le théorème de Mackey avait été rejeté par le groupe dans un premier temps. Jusqu'à ce que Dieudonné reconnaisse que sa présence était nécessaire *parce qu'il illumine le paysage*, comme Dixmier nous l'a rappelé.

La façon dont la problématique de la dualité est décrite dans la Tribu[31] de 1952 est parfaitement édifiante sur ce point. Voici ce qu'on y lit.

Réflexivité. Position du problème : quand une forme linéaire continue sur E' est-elle faiblement continue? Ou : quand E est-il le dual de E' fort? Condition de réflexivité : les bornés de E sont relativement compacts (nécessité par Alaoglu, suffisante triviale). Coïncidence des topologies dans le cas des tonnelés réflexifs et des normes dans le cas des normés (utiliser le §5)

La réflexité est prise ici dans le sens que E coïncide avec le bidual comme espace vectoriel. On notera que la formulation est très voisine de celle de Grothendieck : de E on ne retient que les parties bornées.

L'énoncé sur la compatibilité d'une topologie avec une dualité se retrouve aussi dans la rédaction R173 comme dans l'édition de 1955[32] et les suivantes.

La version disquée.

La dualité faible résout en fait le problème plus général de la dualité disquée. C'est cette version qui aurait dû remplacer la bidualité forte envisagée par Bourbaki. Elle est présentée dans le séminaire Banach et dans l'article de Christian Houzel pour l'Encyclopaedia universalis[33].

Nous y renvoyons le lecteur.

[28] Chapitre IV, §2, n°3, théorème 3, p 113.

[29] Chapitre III, §2, n°3, théorème 2, p 198.

[30] Chapitre IV, §2, n°8, théorème 4, p 32.

[31] Tribu NBT 028, Celles sur Plaine, 2-16 mars 1952, p 13.

[32] Chapitre III, §3, n°3, théorème 2, p 35; chapitre IV, §2, n°3, théorème 2, p 68.

[33] Chapitre 3, II, 3), théorème de Mackey, p 139; resp. théorème de Mackey, p 869.

4. Dualité intermédiaire ou saturée

Nous nous plaçons toujours dans le cadre des espaces disqués, comme nous l'avons fait pour la dualité faible.

Le cadre de la dualité intermédiaire est au départ celui de la dualité faible, avec la même différence entre Bourbaki et Grothendieck. On se donne, pour commencer, une dualité abstraite séparante, entre deux espaces vectoriels E et F.

Nous verrons qu'une version convenable du théorème de Grothendieck sur les formes linéaires continues sur les parties bornées permet de traiter la dualité intermédiaire dans le cas général et non pas seulement dans le cas métrisable.

La version de Grothendieck.

On se donne toujours une bornologie de type convexe $\mathfrak{b}$ sur F, à laquelle correspond la topologie *duale* β sur E.

L'espace E est encore naturellement muni de la bornologie fine $\mathfrak{s}$ et l'espace F de la topologie duale σ qui est la topologie faible $\sigma(E, E')$, ce qu'on résume dans le schéma

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \beta, \mathfrak{s} & & \sigma, \underline{\mathfrak{b}} \end{array}$$

où le soulignement marque la donnée.

Ainsi E et F apparaissent-ils tous les deux comme des espaces disqués et l'espace E s'identifie-t-il au dual disqué de F.

Cette fois-ci, la question est de caractériser le *quasi-dual* de F, qui est l'espace des formes linéaires continues sur les parties bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces dernières et de la bornologie des parties équicontinues sur les parties bornés.

La réponse est donnée par le théorème suivant, qui fait appel à la saturation de la bornologie par rapport à la topologie, opération qui consiste à prendre comme nouvelles parties bornées les parties A telles que, pour tout voisinage V de 0 on puisse trouver une partie bornée d'origine B vérifiant $A \subset B + V$.

Théorème (Grothendieck-Gruson). le quasi-dual de l'espace disqué F est l'espace $\hat{\hat{E}}$ *complété saturé* quant à la bornologie de l'espace disqué E.

Cet énoncé figure dans le séminaire Banach, dans la version générale donnée par Laurent Gruson[34]. On peut l'affaiblir comme suit.

Corollaire (Banach). Si l'espace E est complet, toute forme linéaire faiblement continue sur les parties bornées de F est faiblement continue.

On noterait que Grothendieck a bien établi le premier théorème, qui lui est attribué par le séminaire Banach, dans la situation décrite ici, où l'on se donne d'abord une bornologie, mais sans la précision concernant la bornologie du quasi-dual[35]; or cette précision est très importante. L'énoncé est repris, attribué à Grothendieck, dans le livre de Köthe[36]; cependant il s'insère dans une problématique qui est plutôt celle de Bourbaki dont on va parler dans la suite.

[34] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°7, théorème 3, p 76.

[35] Chapitre II, n°14, théorème 10, p 128.

[36] Chapitre 4, n°9, (2), p 270.

D'une part le saturé (resp. complété saturé) de l'espace disqué E quant à la bornologie définit l'espace intermédiaire ${}^iE$ (resp. le complété intermédiaire ${}^i\hat{E}$), dont la bornologie s'obtient en saturant la bornologie fine, ce qui lui confère la bornologie précompacte[37].

D'autre part le quasi-dual de F est aussi le dual du saturé F^i de l'espace disqué F quant à la topologie[38]. La topologie de F^i définit la *topologie intermédiaire* sur F.

On fait ici appel à la saturation de la topologie par rapport à la bornologie, opération qui consiste à prendre comme nouveaux voisinages disqués de 0 les disques V qui rencontrent toute partie bornée B suivant la trace d'un voisinage de 0 d'origine.

Maintenant la topologie de F^i est duale de la bornologie de $\hat{\hat{E}}$, puisque le second est le dual du premier. Autrement dit on a ceci.

Corollaire. La topologie intermédiaire sur F est celle de la convergence uniforme sur les parties précompactes (ou compactes) du complété de E.

Il faut bien voir que saturer et compléter sont deux opérations qui vont ensemble; dans le cas général, il faut prendre les parties précompactes du complété.

Il reste que la dualité disquée entre $\hat{\hat{E}}$ et F^i induit évidemment une dualité disquée entre ${}^iE$ et F^i. Il se trouve que, dans le cas où E est métrisable, la topologie de F^i est encore duale de la bornologie de ${}^iE$. Autrement dit on a encore ceci.

Corollaire (Dieudonné). Si E est métrisable, la topologie intermédiaire sur F est celle de la convergence uniforme sur les parties précompactes de E.

En fait Bourbaki ne donne le résultat que dans le cas où E' est le dual de l'espace localement convexe métrisable E, mais cela importe peu. De plus on peut remplacer les parties précompactes par les parties compactes ou par les suites tendant vers 0.

Tout résulte simplement du fait que, dans le cas d'un espace vectoriel localement convexe E métrisable, une partie précompacte du complété de E est incluse dans l'enveloppe convexe fermée d'une suite de E tendant vers 0. C'est élémentaire[39].

La propriété figure dans le séminaire Banach[40] sous la forme de la densité stricte de ${}^iE$ dans $\hat{\hat{E}}$. En faire, comme Bourbaki, un corollaire de l'équivalence entre diverses définitions de la topologie intermédiaire n'est pas particulièrement éclairant.

La version de Bourbaki

Entre dans le cadre de la dualité intermédiaire celui de la dualité faible entre un espace localement convexe E, ayant une topologie μ, et son dual $F = E'$, comme dans la dualité faible envisagée par Bourbaki. Le dual est toujours muni de la bornologie $\mathfrak{m}$ des parties équicontinues. On ajoute encore la bornologie fine $\mathfrak{s}$ sur E et la topologie faible duale σ sur F, ce qu'on résume par le schéma

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F = E' \\ \underline{\mu}, \mathfrak{s} & & \sigma, \mathfrak{m} \end{array}$$

où le soulignement marque la donnée.

[37] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°8, p 77.

[38] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°9, p 78.

[39] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°8, p 77.

[40] Chapitre 3, introduction, 3), proposition 3, p 122.

On obtient ainsi une dualité entre espaces disqués, pour laquelle F est le dual de E et E le dual de F.

On a encore une dualité entre les espaces disqués $\hat{\hat{E}}$ ou ${}^iE$ et F^i, qui établit une dualité entre bornologie intermédiaire et topologie intermédiaire.

Dès avant-guerre et tout au long des rédactions et éditions, Bourbaki a considéré la dualité intermédiaire dans ce cadre, qui est toujours celui d'un espace et de son dual.

Dans la rédaction R001, on considère le cas d'un espace normé E et de son dual fort E'; ce dernier est muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$ et de la bornologie de la norme. La topologie intermédiaire sur le dual est définie comme la plus fine pour laquelle les variétés linéaires fermées coupent les boules fermées suivant une partie faiblement fermée (ou faiblement compacte). Elle est identifiée à celle de la convergence uniforme sur les suites tendant vers 0. Le dual de l'espace intermédiaire est alors identifié au complété de E. La caractérisation des espaces normés complets qui s'en déduit est elle-même attribuée à Banach[41].

Les rédactions R145 et R88 étendent le théorème attribué à Banach à un espace localement convexe complet et à son dual[42].

L'édition de 1955 traite aussi le cas des espaces localement convexes, sans reprendre l'identification du complété. Le théorème attribué à Banach y est repris des rédactions précédentes. Contrairement aux premières rédactions, il n'est lié à l'étude de l'espace intermédiaire que dans le cas où E est un espace de Fréchet[43]. Or nous avons vu que cette étude n'avait pas besoin de l'hypothèse de métrisabilité.

Dans le cas métrisable, on définit la topologie intermédiaire sur le dual comme la plus fine qui soit invariante par translation et qui induise sur les parties équicontinues la topologie faible. Le lien est fait avec la convergence uniforme sur les suites tendant vers 0 et avec la convergence compacte[44]. On utilise le fait que la structure uniforme de la convergence simple et de la convergence compacte coïncident.

L'identification du complété est par ailleurs reprise dans l'édition de 1981. La caractérisation de la topologie intermédiaire y est qualifiée de théorème de Banach-Dieudonné[45], comme elle l'a été par Köthe[46].

Bourbaki généralise.

L'édition de 1981 a été préparée dès 1963 par une rédaction de Pierre Cartier. Il se trouve que Bourbaki a découvert dans le livre de Kelley-Namioka *une démonstration très simple du théorème de Grothendieck, si simple que l'on s'étonne que Grothendieck lui-même ne l'ait pas vue* [47].

Partant de là, contrairement à ce qu'il a fait précédemment, il se place dans le cadre utilisé par Grothendieck décrit plus haut, qu'il généralise en se donnant aussi une topologie localement convexe sur l'espace F; il suppose alors que E est le dual topologique de F.

---

41 Chapitre II, §4, théorème 6, p 124.

42 Chapitre III, §3, n°2, théorème 1, p 205; resp. n°9, théorème 5, p 34.

43 Chapitre IV, §2, n°5, théorème 4, p 71 et n°6, remarque en petits caractères, p 73.

44 Chapitre IV, §2, n°6, proposition 7, p 73 et corollaire 1, p 74.

45 Chapitre IV, §3, n°5, théorème 1, p IV.24.

46 Chapitre IV, n°10, (1), p 272.

47 Rédaction n°409, le complété d'un dual théorème 1, p 3.

Cependant il ne dépasse pas la caractérisation du quasi-dual de F comme espace vectoriel pour montrer seulement qu'il s'identifie au complété de E pour sa topologie. En conséquence, faute d'avoir su caractériser en même temps les parties bornées du quasi-dual, il ne peut pas interpréter la topologie intermédiaire.

Evidemment les choses ne sont pas formulées ainsi. Par exemple Bourbaki introduit la notation $E'_{\mathfrak{S}}$ pour désigner l'espace $L_{\mathfrak{S}}(E, K)$, ce qui est parfaitement cohérent mais qu'il ne semble pas avoir fait auparavant. Dans le cas particulier du dual cependant, l'étrangeté de la notation aurait dû attirer son attention. Il perçoit en effet cet espace $E'_{\mathfrak{S}}$ comme un dual. De quoi serait-il alors le dual? Il y a bien sûr une réponse simple : c'est le dual de l'espace disqué obtenu en adjoignant à la topologie de E la bornologie définie par $\mathfrak{S}$, espace qu'on pourrait très raisonnablement noter $E_{\mathfrak{S}}$. Hélas, Bourbaki ne veut pas de cette structure, ni a fortiori ne peut lui accorder de notation. Ainsi note-t-il $E'_{\mathfrak{S}}$ ce qui est plutôt $(E_{\mathfrak{S}})'$.

Complément dans le cas métrisable.

Dans le cas métrisable, on peut encore établir des propriétés complémentaires de la topologie intermédiaire[48].

Théorème (Banach-Dieudonné). Ici F est le dual de l'espace localement convexe E supposé métrisable.

a) Toute partie de F dont la trace sur les parties bornées est faiblement fermée est fermée pour la topologie intermédiaire.

b) Si E est en plus complet, tout disque dont la trace sur les parties équicontinues est faiblement fermée est faiblement fermé.

Par exemple, dans l'édition de 1955, le point a) est donné pour la topologie de la convergence compacte et le point b) est attribué à Banach[49].

[48] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°9, proposition, p 79.

[49] Chapitre IV, §2, n°6, corollaire 2, p 74 et théorème 5, p 74.

5. Dualité forte ou non naturelle

Nous allons maintenant considérer un espace localement convexe. Son dual *naturel* est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées et de la bornologie des parties équicontinues, qui n'est en général pas la bornologie canonique. Autrement dit, le dual naturel n'est pas un espace localement convexe, mais un espace disqué. C'est ce qui empêche Bourbaki de s'y intéresser. En revanche Bourbaki retient le dual *fort*, pour lequel la bornologie canonique remplace celle des parties équicontinues.

Il y a évidemment coïncidence pour les espaces normés, de sorte que la question du bidual et celle de la réflexivité sont non ambigües. Pour les espaces localement convexes généraux, c'est moins simple. Si l'espace E a toujours la topologie induite par son bidual disqué, ce n'est pas toujours le cas quand on prend son bidual fort, le dual fort de son dual fort. La terminologie que nous utilisons pour distinguer les deux problématiques, à savoir la *dualité naturelle* et la *dualité forte*, est celle de Köthe[50], lequel oppose, dans le bidual E'' d'un espace localement convexe E, la topologie *forte* et la topologie *naturelle*. De son côté, Grothendieck définit le bidual d'un espace localement convexe comme son bidual naturel[51]. Dans ces conditions le bidual n'est plus le dual du dual.

Dans la dualité naturelle, la réflexivité se résume à l'égalité entre l'espace et son bidual comme espaces vectoriels; elle est résolue par le théorème de Mackey déjà donné : *il faut et il suffit que les parties bornées de E soient faiblement relativement compactes.*

Dans la rédaction R145 et la rédaction R088 suivante, l'espace localement convexe E est dit *réflexif* s'il coïncide avec son bidual comme espace vectoriel. La réflexivité est évidemment reliée à la propriété de Banach suivant laquelle tout sous-espace fermé est faiblement fermé[52]. La condition nécessaire et suffisante de Mackey, rappelée plus haut, est donnée dans l'une et l'autre[53].

La rédaction R173 marque un tournant en n'utilisant plus le qualificatif de *réflexif*. Comme ce sera le cas désormais, notamment dans toutes les éditions, il est remplacé par *semi-réflexif*. Le critère de Mackey est donné et maintenu jusqu'en 1981[54].

Köthe suit Bourbaki et ajoute le critère de la quasi-complétion faible[55]. En revanche, dans l'intervalle, Grothendieck parle toujours de réflexivité[56].

Avant d'aller plus loin, nous allons nous intéresser aux outils dont se sert Bourbaki pour étudier sa dualité forte, revenant à cette occasion sur les espaces d'applications linéaires continues. Nous découvrirons à cette occasion un paradoxe; la dualité forte, qui néglige la symétrie naturelle entre topologies et bornologies, va privilégier outrageusement les bornologies, que Bourbaki n'a pas voulu considérer dans une structure. Déjà la dualité, comme forme bilinéaire, fait pencher la balance du côté des bornologies. En effet, dans la pratique, une application bilinéaire est toujours bibornée alors qu'elle est rarement bicontinue. Nous allons cependant rencontrer deux autres problèmes, liés à la dualité forte, qui mettent au premier plan les bornologies.

---

[50] Chapitre 5, n°2, p 297.

[51] Chapitre II, §12, définition 9, p 121.

[52] Chapitre III, §3, n°6, proposition 10, p 214; resp. chapitre IV, §3, n°3, proposition 3, p 39.

[53] Chapitre III, §3, n°6, théorème 2, p 215; resp. chapitre IV, §3, n°3, théorème 1, p 38.

[54] Chapitre IV, §3, n°4, théorème 1, p 88; resp. §2, n°2, théorème 1, p IV.15.

[55] Chapitre 5, n°2, (1) puis (2), p 299.

[56] Chapitre II, n°12, théorème 8, p 122.

Structures complètes.

La dualité forte est le thème qui fera appel au théorème de Baire, ou au théorème de Banach-Steinhaus si l'on préfère. On s'attend donc à voir intervenir la complétion.

Donnons-nous ici deux espaces vectoriels E, F en dualité, supposant que la dualité sépare les points de E. Nous allons mettre en évidence une structure complète sur E.

Dans toutes les rédactions d'après-guerre, Bourbaki s'est intéressé à la convergence uniforme sur un système de parties disquées bornées (séparées) complètes. Dans l'édition de 1981, il va un peu plus loin en ajoutant à la complétude la complétude séquentielle. C'est tout cela que nous allons tenter de placer dans un cadre adéquat.

On notera cependant deux points importants concernant l'apport de Bourbaki. D'abord il ne considère que le cas où F est le dual de l'espace localement convexe E. Ensuite, dans le tableau des bornologies sur ce dual F qu'il propose dans son édition de 1981, il ne fait aucune distinction entre ce qui dépend de la topologie de E et ce qui ne dépend que de la dualité, alors que Grothendieck le fait dans son cours.

Reprenons notre dualité abstraite entre E et F. Parmi les bornologies de type convexe complètes sur E qui sont compatibles avec la dualité, autrement dit pour lesquelles les éléments de F définissent des formes bornées, il en est une qui est moins fine que toutes les autres. C'est la bornologie *complète* $\mathfrak{w}$ dont un système fondamental de parties bornées est constitué par les disques faiblement bornés complétants de E; est complétant un disque B tels que l'espace vectoriel E_B qu'il engendre, muni de la jauge de B, soit un espace de Banach[57].

Le seul point à vérifier est que les disques en question constituent une famille filtrante pour l'inclusion. Nous allons montrer que si B et C sont de tels disques, alors $B + C$ en est aussi un. En effet l'espace de Banach $E_B \times E_C$ est complet et la diagonale H des couples (x, x) de $E_B \times E_C$ est fermée : là on a besoin de savoir que la dualité sépare les points de E, autrement dit que la bornologie faible de E est séparée. Comme le quotient $(E_B \times E_C)/H$ est complet et isomorphe à E_{B+C}, la propriété est établie.

C'est ainsi une bornologie complète que la dualité abstraite a fait apparaître. On notera juste qu'on pourrait améliorer le procédé en remplaçant les espaces de Banach par des espaces de Fréchet; la question est traitée dans l'appendice sur les espaces disqués[58].

Structures de même type.

Considérons toujours une dualité abstraite entre des espaces E et F. Si nous voulons associer à une topologie ou une bornologie sur le facteur E une structure de même type sur le facteur F, on peut tout simplement prendre la structure canonique associée à la structure duale ou l'inverse. Nous utiliserons le symbole $*$ pour ces opérations, sachant qu'il est largement présent dans les questions de dualité, mais qu'il ne semble pas avoir été utilisé à cette fin; en tout cas on ne le trouve pas chez Bourbaki ou Grothendieck. Ces opérations sont décroissantes, ou contravariantes si l'on préfère.

Cependant, une fois encore, les bornologies sont avantagées. Il n'y a qu'une seule opération et elle est facile à décrire. Etant donnée une bornologie de type convexe $\mathfrak{b}$ sur E, la bornologie $*\mathfrak{b}$ sur F est définie par les disques qui sont bornés sur les disques bornés de E. C'est la bornologie des disques équibornés. Comme nous l'avons dit à propos des espaces d'applications linéaires, c'est une des premières remarques faites par Bourbaki.

---

57 Houzel 1972, séminaire Banach, chapitre 2, §1, n°6, p 89.

58 §9, n°12, p 83.

Faisons maintenant un petit inventaire des bornologies sur E ou F qui ne dépendent que de la seule dualité, laquelle sera supposée séparante pour simplifier.

Il y a d'abord la bornologie *fine* $\mathfrak{s}$. On en déduit sur l'autre facteur une bornologie $*\mathfrak{s} = \mathfrak{f}$, qui est la bornologie *faible*. Notons tout de suite le résultat suivant.

Proposition. La bornologie $*\mathfrak{w}$ est aussi $*\mathfrak{s} = \mathfrak{f}$.

C'est simplement le théorème de Banach-Steinhaus pour les espaces de Banach. Fait remarquable, c'est le seul endroit où il ait à intervenir dans le sujet.

Clairement dire que la dualité est $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$-bibornée équivaut à dire que $\mathfrak{c}$ est moins fine que $*\mathfrak{b}$. Comme la dualité est $(\mathfrak{w}, \mathfrak{s})$-bibornée, elle est donc aussi $(\mathfrak{w}, \mathfrak{w})$-bibornée. On a mis en évidence une structure complète, aussi grande que possible, sur chaque facteur, pour laquelle la dualité est toujours bibornée.

Il est encore une bornologie, que Bourbaki ne considère pas explicitement et qui ne fait pas partie de son tableau de l'édition de 1981 alors qu'elle est au cœur de la dualité forte qu'il étudie. C'est la bornologie $*\mathfrak{f} = \mathfrak{k}$, que nous appellerons *canonique*. Elle est définie par les disques qui sont bornés sur les disques faiblement bornés de l'autre facteur. Ainsi $\mathfrak{k} = **\mathfrak{s} = **\mathfrak{w}$. Cette bornologie est moins fine que $\mathfrak{w}$, ce qui fait que l'opération $*$ peut être résumée dans le tableau suivant.

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
E: & \mathfrak{s} & \to & \mathfrak{t} & \to & \mathfrak{w} & \to & \mathfrak{k} & \to & \mathfrak{f} & & \\
* & & & & & \downarrow & & & \swarrow & & & \\
F: & & & & & \mathfrak{f} & \leftarrow & \mathfrak{k} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \mathfrak{s}
\end{array}
$$

où les flèches horizontales représentent des inclusions et celles vers le bas sont pour $*$. On inclut entre $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{w}$ la bornologie $\mathfrak{t}$, qu'on qualifiera de Mackey, des disques faiblement bornés et complets. Ces derniers sont complétants, comme nous allons très bientôt le vérifier.

Application au schéma de Bourbaki

Le dual *fort* E' d'un espace localement convexe E est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E muni de la topologie, dite forte, de la convergence uniforme sur les parties bornées canoniques de E, ce qui en fait aussi un espace localement convexe.

Le dual fort E' s'obtient, très précisément, en oubliant la bornologie des parties équicontinues; et en la remplaçant par la bornologie par défaut, qui est la bornologie canonique de E'. Ainsi la structure du dual fort E' est-elle uniquement déterminée par la bornologie (canonique) de E. Tout le problème va consister à récupérer, par des propriétés convenables de E, cette bornologie oubliée des parties équicontinues de E' ou cette topologie oubliée des voisinages de zéro de E.

Nous allons reprendre le schéma des bornologies reliées à une dualité, mais dans le cas où E est un espace localement convexe et où F est son dual. L'espace E possède une topologie β, à laquelle correspond, par dualité, une bornologie $\mathfrak{b}$ sur F, celle des parties équicontinues. On obtient :

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
E': & \mathfrak{s} & \to & \mathfrak{b} & \to & \mathfrak{t} & \to & \mathfrak{w} & \to & \mathfrak{k} & \to & \mathfrak{f} \\
* & & & & & & & \downarrow & \nearrow & & & \\
E: & & & & & & & *\mathfrak{b} = \mathfrak{f} & \leftarrow & \cdots & &
\end{array}
$$

Pour cela il est important de savoir que la bornologie $\mathfrak{b}$ est incluse entre $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{w}$, même entre $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ si le corps de base est localement compact. De là $*\mathfrak{b} = \mathfrak{f}$. et $**\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$.

Le premier point résulte du fait élémentaire que la bornologie du dual de E est complète : ce dernier est la limite inductive des duaux des espaces obtenus en munissant E d'une semi-norme continue p, lesquels sont des espaces de Banach[59]. Bourbaki s'appuie sur le fait que le dual de E est quasi-complet, montrant qu'un espace disqué quasi-complet a une bornologie complète[60]. Jusqu'à l'édition de 1981 comprise, il établit qu'un disque borné complet d'un espace localement convexe séparé est complétant.

Avant la dernière édition, Bourbaki utilise pour cela un cheminement détourné nécessitant un renvoi au chapitre I. L'édition de 1981 apporte un progrès technique[61].

Le résultat se trouve dans les commentaires de la rédaction R128[62]. Ensuite il est placé avec les espaces d'applications linéaires, comme dans la rédaction R088[63].

Maintenant $*\mathfrak{b}$ est la bornologie canonique de E et $**\mathfrak{b}$ est la bornologie canonique du dual E', la seule que retienne Bourbaki. Le paradoxe est ces bornologies ne dépendent que de la dualité. Alors

l'espace E est dit de Mackey si $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$;

il est dit quasi-tonnelé si $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$;

il est dit tonnelé si $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}$.

Ces propriétés sont de plus en plus fortes, évidemment. On notera encore deux points.

a) Si E est quasi-tonnelé et quasi-complet il est tonnelé; en effet $*\mathfrak{b}$ est alors plus fine que $\mathfrak{w}$ et $\mathfrak{k}$ moins fine que $*\mathfrak{w} = \mathfrak{f}$.

b) Supposons que E' admette E pour dual. La bornologie duale $\mathfrak{m}$ sur E est plus fine que $\mathfrak{w}$ et $\mathfrak{b}$ est moins fine que $*\mathfrak{m} = \mathfrak{f}$. Le dual d'un espace réflexif est tonnelé.

Comparaison des parties bornées.

Nous avons vu que la bornologie canonique $*\mathfrak{b}$ de E était $\mathfrak{f}$.

Autrement dit, les parties fortement bornées de l'espace localement convexe E sont exactement les parties faiblement bornées pour la dualité avec E'. Ce sont notamment les mêmes pour toutes les topologies sur E compatibles avec la dualité.

L'énoncé de comparaison des bornologies est attribué à Mackey dès la rédaction R145[64]. On le retrouve dans les rédactions suivantes et dans l'édition de 1955[65].

Espaces tonnelés et quasi-tonnelés.

L'espace localement convexe E est ainsi dit *quasi-tonnelé* (quasi-barelled) si toute partie fortement bornée de E' — à savoir équibornée, i.e. bornée sur toute partie bornée de E — est équicontinue. Le qualificatif *infra-tonnelé* est également utilisé.

De même E est-il dit *tonnelé* (barrelled) si toute partie faiblement bornée de E' — i.e. bornée en tout point de E — est équicontinue. Un espace tonnelé est bien sûr quasi-tonnelé.

---

59 Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°6, p 75.

60 Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°6, théorème 1, p 74.

61 Chapitre III, §7, n°5, proposition 8, p EVT III.7.

62 §3, proposition C', p 31.

63 Chapitre III, §1, n°4, lemme 1, p 10.

64 Chapitre III, §2, n°3, théorème 3, p 200.

65 Chapitre IV, §2, n°4, théorème 3, p 70.

Ces définitions sont celles que donne le cours de Grothendieck[66] avec l'espace $L(E,F)$ au lieu du dual; il ne s'en sert pas pour discuter la dualité. Les rédactions et éditions de Bourbaki n'utilisent pas la notion d'espace quasi-tonnelé, pourtant directement liée au sujet, se contentant de définir les espaces tonnelés, d'un façon un peu différente dont on va parler. L'édition de 1981 introduit en revanche la notion d'espace *semi-tonnelé* [67]; d'autres utilisent le qualificatif *σ-tonnelé*.

On notera que Bourbaki a peut-être pensé un moment aux espaces quasi-tonnelés; dans la Tribu[68] il est dit qu'*on vire les sous-tonnelés*. S'agissait-il de ceux-là?

Dans la rédaction R145[69], on étudie de façon systématique la polarité entre parties bornées et voisinages de zéro juste avant de parler du dual fort, et les espaces tonnelés sont considérés à cette occasion.

Dans la rédaction R088, la relation les parties bornées et les parties équicontinues est faite assez tôt; il est montré que, dans un espace tonnelé, une partie simplement bornée de $L(E,F)$ est équicontinue. Plus loin, il est dit que les parties équicontinues de E' sont relativement compactes et que la réciproque est vraie si E est tonnelé, ainsi a-t-on, pour une partie faiblement fermée, l'équivalence entre faiblement bornée, équicontinue et faiblement compacte[70].

Maintenant on peut aussi bien chercher à récupérer les voisinages de zéro de E : les parties équicontinues de E' sont celles dont le polaire est un voisinage de 0 dans E.

Dans la rédaction R088, on donne cette propriété[71]. On note aussi qu'une partie est fortement (resp. faiblement) bornée dans E' si et seulement son polaire est bornivore (resp. absorbant). Or ce dernier est faiblement fermé. Dire que E est quasi-tonnelé revient donc à dire que tout disque faiblement fermé bornivore de E est un voisinage de zéro. Dire qu'il est tonnelé revient à dire que tout disque faiblement fermé absorbant est un voisinage de 0. Par ailleurs on peut remplacer "faiblement fermé" par "fermé" puisqu'il s'agit de disques.

C'est ce dernier choix que fait Bourbaki. Dès la rédaction R088 [72], il introduit le terme de *tonneau* pour désigner un disque fermé absorbant; un elc est tonnelé si tout tonneau est un voisinage de zéro.

Ce faisant il ne fait pas reposer la propriété d'être tonnelé sur une quelconque dualité. Dans la rédaction R088[73], il est noté, beaucoup plus loin, qu'une partie du dual est faiblement bornée si et seulement son polaire est un tonneau. Ce choix permet de parler des tonneaux et espaces tonnelés dès le début du chapitre III, avant d'avoir considéré le dual, en prologue à l'étude des espaces d'applications linéaires continues.

Le bidual fort.

Le bidual fort E'' de E est le dual fort du dual fort E'. Cependant, contrairement au cas des espaces normés, l'espace E ne s'identifie plus, avec sa structure, à un sous-

---

66 Chapitre III, n°3, proposition 5, p 194.

67 Chapitre IV, §3, n°1, définition 1, p IV.21.

68 Tribu NBT 27, Royaumont, 1-9 octobre 1951, p 8.

69 Chapitre III, §3, n°4, p 210

70 Chapitre IV, §2, n°5, proposition 6, p 28; théorème 2, p 29.

71 Chapitre IV, §2, n°5, proposition 5, p 28.

72 Chapitre 3; §1, n°1, définition 1, p 1.

73 Chapitre IV, §2, n°4, proposition 4, p 27.

espace de son bidual E''. En effet, comme on l'a vu, le concept d'espace localement convexe ne conserve que la moitié des informations découlant de la norme.

Comme E' est l'espace disqué dual de l'espace E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ et de la bornologie canonique de E, le bidual est, comme espace vectoriel, le quasi-complété faible de E pour la dualité avec E' : c'est simplement le théorème de Mackey-Grothendieck. Cependant sa structure naturelle est la bornologie constituée par les adhérences faibles, complètes, des disques bornés canoniques.

Pour sa topologie de dual fort, celle de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées de E', un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les polaires, dans le quasi-complété, des parties fortement bornées, lesquels sont exactement les disques faiblement fermés bornivores. Cette topologie définie par les tonneaux bornivores fait du bidual fort le **quasi-complété-tonnelé** de E. Ce dernier est non seulement quasi-tonnelé, mais tonnelé.

En particulier l'espace localement convexe E s'identifie à son bidual fort si les disques bornés canoniques sont faiblement relativement compacts et s'il est (quasi-)tonnelé.

Dans les rédactions R145 et R088, l'espace est dit *complètement réflexif* s'il a cette propriété de réflexivité forte : s'il est réflexif et s'il a la topologie de son bidual fort. La condition donnée pour un espace réflexif est qu'il soit tonnelé[74].

A partir de la rédaction R173, notamment dans les éditions, le qualificatif *réflexif* vient remplacer *complétement réflexif*. L'énoncé est maintenu dans cette rédaction[75], comme il le sera dans les éditions de 1955 et de 1981[76]. C'est très secondaire, mais témoigne de la priorité accordée par Bourbaki à la dualité forte.

La question, pourtant d'un intérêt mineur, reçoit des promotions successives : ignorée dans R1, puis traduite en proposition ou corollaire, elle termine en deux théorèmes.

Espaces de Montel.

Les espaces de Montel sont définis comme les espaces tonnelés dont les parties bornées sont relativement compactes.

C'est cette définition qui est donnée dans l'édition de 1955 des EVT de Bourbaki[77], avec l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ comme exemple. En fait c'est un espace de type $\mathcal{S}$, ou espace de Schwartz, suivant la terminologie de Grothendieck[78], propriété plus intéressante : c'est surtout une limite projective d'espaces semi-normés avec des applications de transition précompactes. C'est même un espace nucléaire, dans le sens que les applications de transition sont nucléaires, mais la propriété n'a pas été considérée par Bourbaki, y compris dans les dernières éditions. Le cours de Grothendieck n'y fait pas allusion non plus, probablement parce qu'il n'a pas cherché à parler de ses produits tensoriels topologiques.

[74] Chapitre 3; §3, n°6, corollaire 2, p 215; resp. chapitre IV, §3, n°4, proposition 6, p 40.

[75] Chapitre IV, §4, n°2, théorème 2, p 43.

[76] Chapitre IV, §3, n°3, p 89; resp. §2, n°3, p EVT IV-16.

[77] Chapitre IV, §3, n°4, exemples, p 89.

[78] Chapitre 4, §4, n°4, définition 2, p 333.

§7.– Conclusion

Tout n'est pas éclairci quant à la façon dont Bourbaki a envisagé la dualité dans ses EVT. C'est ainsi que la Tribu[1] de 1940 nous donne une information alléchante, mais dont il ne sera jamais plus question, sans qu'on puisse savoir de quoi il s'agissait précisément.

Cartan poursuit actuellement des recherches sur la théorie générale de la dualité, dont il attend beaucoup, et dont les premiers résultats sont très encourageants. Dieudonné a commencé la rédaction des 2 premiers chapitres (indépendants de la théorie Cartanique).

L'impression générale laissée par le chapitre est que la dualité, telle que Bourbaki a choisi de l'exposer, est un maquis inextricable. D'ailleurs le groupe lui-même n'a pas été avare en reproches. En préambule de la rédaction R088[2] de mars 1952 dont il est le rédacteur, Godement commente son travail comme celui de ses prédécesseurs.

On s'est efforcé de réduire les développements oratoires des rédactions précédentes, en ne démontrant (à quelques exceptions près ...) que des résultats non triviaux.

Il est même possible que le rédacteur ait éliminé des propriétés qui, tout en étant triviales, sont néanmoins utiles — c'est ainsi qu'il n'a pu se résoudre à parler des formes bilinéaires, dégoûté qu'il était de devoir rompre la courbe harmonieuse d'un exposé étincelant par des considérations aussi vulgaires.

Un peu plus tard la même année, le nouveau rédacteur de R173 commentait ainsi son travail[3].

Le §1 du chap. IV sera sans doute trouvé un peu long ; le rédacteur serait heureux si quelqu'un arrivait à simplifier les démonstrations (toujours triviales, d'ailleurs, mais parfois un peu longues).

Il faut voir que les rédactions critiquées donneront naissance aux éditions. On y retrouve la double impression d'un contenu peu consistant et de démonstrations longues et parfois redondantes. Un commentaire relatif à un autre sujet, de Topologie générale, qu'on trouve dans la Tribu[4] de 1947, s'appliquerait assez bien.

Ce §5 laisse une impression pénible, mais nous n'avons pas su faire mieux. Il faudrait pouvoir alléger, mais y a-t-il vraiment quelque chose en trop?

Sur ces questions d'ordre général, l'entretien avec Roger Godement, qui a fait partie de Bourbaki entre 1947 et 1960 environ, et Jacques Dixmier, qui a été recruté en 1949, a apporté quelques éclaircissements.

Déjà, faire des espaces vectoriels topologiques un livre des fondements de l'Analyse n'était pas du goût de tous les membres du groupe. Godement lui-même avoue que les EVT ne l'intéressaient pas; ils n'étaient pas "sa tasse de thé". C'était aussi le cas de Serre, mais plus encore de Weil. Il est probable que ce dernier appréciait peu les grandes constructions générales. Dixmier rapporte qu'il a porté plus tard un jugement critique sur son *intégration dans les groupes topologiques*. "Comment ai-je pu m'intéresser à une chose pareille?" disait-il.

[1] Tribu NBT 002, 15 mars 1940.

[2] Chapitres III et IV, p 0.

[3] Commentaires, p 2.

[4] Tribu NBT 015, 18-20 janvier 1947, p 4.

Du désintérêt pour le sujet de la part quelques membres éminents, on peut déduire qu'il ne fallait guère compter sur leur concours pour voir les EVT traités dans le même esprit que d'autres livres, comme celui de Topologie générale par exemple. Concrètement leur rôle aura été de chercher à minimiser l'importance prise par le sujet, à propos des chapitres III et IV plus particulièrement. Par exemple Weil aurait voulu que l'on retire les considérations sur la topologie de Mackey, sans être suivi puisque, comme on l'a vu, le gain aurait été mince. Plus tard, en 1956, c'est encore lui qui a repoussé un complément d'EVT pour la théorie spectrale.

Maintenant il faut relativiser ces impressions. Rappelons que Weil a imposé la terminologie de "topologie affaiblie" plutôt que celle, par défaut, de topologie faible, pour désigner la topologie faible de la dualité entre l'espace E et son dual fort. De son côté Serre est l'auteur la rédaction R182 du fascicule de résultats sur les EVT, sans doute la meilleure version écrite par Bourbaki sur le sujet. Il présente les principaux théorèmes avant d'étudier les catégories spéciales d'espaces, alors même que certaines définitions sont nécessaires à la compréhension desdits théorèmes, avec l'avantage d'aérer l'exposé. C'est d'ailleurs le principe qu'a retenu, plus tard, Grothendieck pour son cours, en rendant la présentation des résultats de base indépendante de la définition des types considérés.

Godement et Dixmier eux-mêmes, qui prennent aujourd'hui leurs distances, ont dans des styles différents participé avec enthousiasme aux rédactions des chapitres III et IV qui ont donné lieu à l'édition de 1955.

En revanche le désintérêt croissant de certains membres pour le sujet explique le refus de reconsidérer l'ensemble des options pour les éditions ultérieures à 1955, celles de 1965-67 et de 1981. Certains éléments ont été ajoutés, le thème de la dualité n'étant guère concerné que par l'étude des morphismes stricts. Sinon ce qui composait la première édition a été essentiellement repris tel quel, sans que l'on sente une quelconque tentative de réorganisation.

Godement explique très bien le statu quo. Beaucoup en avaient assez de ce livre et avaient envie d'investir dans des sujets plus palpitants. "Ouf, c'est fini!" pensait-on. Même Dixmier, se rendant compte aujourd'hui que l'édition de 1981 introduit les espaces "semi-tonnelés", ne peut s'empêcher de penser que, décidément, Bourbaki a poussé le bouchon un peu loin.

Cependant Dixmier indique qu'il a écrit pour Bourbaki l'une des deux rédactions d'un chapitre sur les produits tensoriels topologiques et le théorème des noyaux, non sans rencontrer quelques difficultés liées auux contraintes fixées par Bourbaki en matière de fondements. L'insertion de ce chapitre dans le livre aurait dépassé le simple ajout. Peut-être est-ce pour cela que l'idée n'a finalement pas été retenue. Bourbaki était en effet soucieux du volume occupé par le chapitre, volume qu'il ne voulait pas laisser croître au-delà de certaines limites.

Avec le recul, le théorème de Hahn-Banach mis de côté, on sait que la dualité considérée par Bourbaki repose essentiellement sur trois énoncés, qui sont, tous les trois, des théorèmes de complétude, et dont le second a un rôle mineur.

(1) Le dual d'un espace disqué est quasi-complet.

(2) Un espace disqué quasi-complet a une bornologie complète.

(3) Le quasi-dual est le complété saturé du dual.

Or Grothendieck a au moins entrevu deux des énoncés : notamment le premier dans le cas d'un espace faible et le troisième en omettant, hélas, les parties bornées.

Dans un premier temps, Bourbaki ne dégageait guère que le second, avant de reprendre le troisième, qu'il attribue, à juste titre, à Grothendieck, mais sans en compléter le contenu.

Les trois énoncés donnés ci-dessus se démontrent eux-mêmes en quelques lignes. La preuve du premier est tout à fait scolaire. Celle du second, convenablement prise, est pratiquement automatique. Celle du troisième est facile, surtout quand la propriété de décomposition d'une forme linéaire a été dégagée.

Le malheur avec ces énoncés est qu'ils supposent tous les trois de se placer dans un espace disqué. Or Bourbaki n'a jamais entrevu cette possibilité. Pourtant tout était déjà contenu dans le cadre généralement considéré au moment où Bourbaki entreprenait l'écriture de son livre.

Considérons en effet tout simplement un espace normé E et son espace normé dual F, comme le faisait Stefan Banach, pour établir la compacité faible de la boule unité de F dans le cas où E est séparable. C'est aussi le cadre considéré par Alaoglu pour résoudre le cas général, et surtout par Bourbaki, le premier à en donner démonstration convaincante.

A cette occasion, l'un des grands mérites de Bourbaki aura été d'avoir clarifié la notion de topologie faible. Dans cet exemple on se trouve donc avec deux topologies sur F, celle de la norme et la topologie faible σ. Du moins c'est ainsi qu'on voyait les choses. D'ailleurs, selon Pierre Cartier, la découverte d'un espace avec deux structures en concurrence a été une surprise pour Bourbaki, qui y a surtout vu un argument légitimant son choix de s'appuyer sur les structures. De fait la multiplication des topologies sur un même espace fonctionnel a fini par envahir l'analyse. C'est l'argument qu'a invoqué Trèves pour repenser la notion d'espace localement convexe, même si sa vision, géométrique, a d'autres qualités.

Cependant, dans le cas présent, ce ne sont pas vraiment deux topologies concurrentes qui équipent F. D'ailleurs, comme nous l'avons dit ailleurs, l'idée que la structure placée sur un espace puisse être le résultat d'un choix plus ou moins arbitraire n'est pas celle qui doit présider en mathématiques. Les objets arrivent en effet complètement armés. Ici c'est topologie faible d'une part et de l'autre une bornologie, celle de la norme, qui équipent cet espace; car ce ne sont pas les voisinages de zéro mais les parties bornées qui sont faiblement relativement compactes. L'espace E lui-même est muni d'une topologie, celle de la norme, et de la bornologie fine $\mathfrak{s}$, celle des parties bornées des sous-espaces de dimension finie.

$$\begin{array}{ccc} E & \times & E' \\ \|\ \|, \mathfrak{s} & & \|\ \|, \sigma \end{array}$$

On retrouve, dans ce cas particulier, le schéma qui nous a servi pour la dualité, où E et F sont des espaces disqués et où l'espace F est très exactement le *dual disqué* de E.

Il se trouve que Bourbaki n'aura pas vu, au départ, cette symétrie apportée par la considération simultanée des deux structures. Et, comme Cartier le confirme, cette symétrie lui échappera également par la suite, notamment au moment de réaliser la rédaction de 1981. Ainsi n'aura-t-il pas compris que la bornologie était déjà présente dans l'œuf. Pour éviter tout malentendu, on notera que, dans un exemple aussi simple, la bornologie n'est absolument pas canonique, ni pour F ni pour E : les parties bornées ne sont pas a priori les parties absorbées par les voisinages de 0.

Bien sûr, lorsque E est complet, le théorème de Banach-Steinhaus dit que les parties bornées de la topologie faible sont aussi les parties bornées pour la norme. Mais ce miracle, sur lequel Bourbaki va jouer une partie brillante avec les espaces tonnelés, ne va malheureusement pas dans le sens de la clarification.

Maintenant le théorème que nous venons de citer peut encore s'interpréter un peu autrement qu'en termes de compacité, en disant, dans le cas normé, que la boule unité du dual est faiblement complète. C'est déjà un exemple de la quasi-complétude d'un dual. Et c'est aussi de cette façon que Grothendieck voit le théorème de Mackey dans son cours de São Paulo.

Il a d'ailleurs un mystère à propos de ce cours. Apparemment Grothendieck ne dégage pas plus que Bourbaki la présence de deux structures. Pourtant il fait toujours comme s'il en avait parfaitement conscience. C'est vrai pour le théorème de Mackey. C'est encore plus vrai pour la topologie intermédiaire, celle qu'il considère dans le tout premier article qu'il ait publié au cours de sa brillante carrière.

Pour revenir au théorème de Banach Steinhaus, que Bourbaki pourra utiliser dans les espaces localement convexes généraux grâce à la notion d'espace tonnelé, il faut bien comprendre qu'en s'y prenant autrement il lui aurait suffi de se limiter au cas banachique. Il aurait juste fallu qu'il interprète un espace localement convexe comme une limite projective d'espaces semi-normés et son dual comme une limite inductive bornologique d'espaces de Banach. Cette fois-ci ce n'est pas le mélange des deux types de structure qu'il fallait voir, mais leur échange dans la dualité. Cela revenait à accorder plus de place aux parties équicontinues.

Bien sûr on aurait pu rêver d'un exposé moins compact que ceux que nous livrent les rédactions et éditions. C'eût été conforme au vœu des rédacteurs du groupe. D'un autre côté, si l'on peut entrevoir aujourd'hui comment il fallait s'y prendre, c'est bien parce que le groupe a beaucoup investi, relayé par Grothendieck et plus tard par Houzel. La seule chose triste que nous puissions relever est le peu d'efforts consentis par la concurrence à la suite de Bourbaki, beaucoup se contentant de puiser dans les éditions des EVT sans chercher à en comprendre l'esprit.

Au passage, il est bien dommage que Grothendieck n'ait pas pu faire un peu plus de chemin avec Bourbaki sur les EVT. Telles que les choses se sont passées, on peut même se demander s'il a eu une quelconque influence sur les événements. Il semblerait qu'il n'ait été invité qu'une fois en relation avec la rédaction du livre et que le petit bout d'essai qu'il a pu faire à cette occasion ait été malheureux. Dieudonné l'aurait fait venir pour faire passer auprès de certains la sauce un peu épaisse sur les espaces tonnelés. Effrayés à l'idée que Grothendieck les amènerait bien plus loin encore, ils auraient vite remisé leurs critiques. Voici ce que relate la Tribu[5] de 1952.

Désireux de surmonter la réticence de l'opposition, le Haut Commissariat tenta une manœuvre de chantage; il fit venir Grothendieck! On espérait effarer à tel point les Congressistes qu'ils seraient prêts à avaler tonneau sur tonneau par peur de subir une réaction Grothendieckienne. Mais les logiciens veillaient; ils apprirent à Grothendieck que, si les ensembles vides sont égaux, certains du moins sont plus égaux que d'autres : le pauvre en devient fou furieux et rentra à Nancy par le premier train.

[5] Tribu NBT 028, Celles-sur-plaine, 8-16 mars 1952.

Il est cependant douteux que Dieudonné n'ait invité Grothendieck que pour lui faire jouer un rôle d'épouvantail. Il avait certainement envie de lui donner une place dans le travail du groupe et se serait alors heurté à l'opposition de Schwartz qui avait en vue l'application prioritaire des EVT à ses distributions. Maintenant, pour que la participation de Grothendieck ait été efficace, il fallait un modérateur chargé de faire respecter le cahier des charges. Dieudonné n'était-il pas prêt à jouer ce rôle? N'écrivait-il pas ceci dans son histoire de l'Analyse fonctionnelle à propos du travail de Grothendieck sur les produits tensoriels?

... which deserves to be considered as realizing the greatest progress in Functional Analysis after the work of Banach.

Un façon plus heureuse de voir les choses aurait peut-être été de mettre l'accent sur les ELC métrisables. On peut aussi bien regarder ces derniers du côté des voisinages de zéro ou du côté des parties bornées, ce qui apporte beaucoup de souplesse. Ensuite on bâtirait librement à partir de ce noyau d'espaces, considérant des systèmes projectifs ou injectifs et des espaces duaux.

A propos des distributions, si l'on veut aller un peu plus loin, pensant aux questions d'hypoellipticité et de parametrix par exemple, c'est le quotient $\mathcal{D}'/\mathcal{E}$ qu'il convient alors de considérer. Malheureusement les catégories avec lesquelles on travaille ne sont pas abéliennes. On va se limiter aux bornologies sur $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}$ pour simplifier, puisque le dernier espace est aussi un espace de Fréchet. Ce genre de quotient a été étudié par Lucien Waelbroeck. Il peut se définir comme un foncteur de la catégorie des espaces normés dans celle des espaces vectoriels, celui qui à N associe l'espace vectoriel $L(N, \mathcal{D}')/L(N, \mathcal{E})$. Cela reste très simple.

En résumant beaucoup, on peut situer la contribution de Bourbaki à l'Analyse fonctionnelle dans le tableau très sommaire qui suit, lequel place cette contribution entre un avant et un après, lequel reste en partie dans les potentialités.

Avant	*Avec Bourbaki*	*Après*
Exemples	Structures	Catégories
Espaces de Fréchet	EVT et ELC	Espaces disqués
Suites généralisées	Compacité	Complétion

En même temps il ne faut pas oublier que ce qu'on appelle la théorie des EVT n'est pas une théorie puissante permettant d'accéder à des résultats profonds. C'est, plus modestement, un cadre commode pour s'exprimer simplement.

Pour finir, retenons comme certain que des membres du groupe se sont passionnés pour la rédaction de ces EVT, que cette passion a gagné presque tout le monde et qu'elle s'est poursuivie au delà de l'édition de 1953-55. Que le projet a été l'occasion d'une extraordinaire aventure collective, précisément parce qu'il arrivait un peu tôt par rapport à la maturation du sujet. Et c'est cette aventure qu'il est passionnant de tenter de comprendre. En tentant de redonner un peu d'éclat au message que Bourbaki a voulu nous transmettre.

§8. – Appendice : prolongement-séparation, fonctions sous-linéaires, prénormes, semi-normes

1. Fonctions sous-linéaires.

On suppose ici que le corps de base est $\mathbf{R}$; autrement dit les espaces vectoriels sont réels.

Une fonction p sur l'espace vectoriel E à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ est dite *sous-linéaire* si elle est positivement homogène et sous-additive, i.e. si elle vérifie

$p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour $\lambda \geq 0$,

$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

On accepte donc la valeur $+\infty$, contrairement au choix opéré généralement, en particulier par Bourbaki. Naturellement on fait la convention $0.\infty = 0$.

Si p est une fonction sous-linéaire, l'ensemble des points où elle est finie est un cône convexe; ce sera le *cône de finitude* de p.

Les fonctions sous-linéaires sur E constituent elles-mêmes un cône convexe ordonné $sL(E)$. La borne supérieure $\sup(p, q)$ ou $p \vee q$ de deux fonctions p, q du cône est simplement l'enveloppe supérieure.

En revanche on ne peut pas toujours prendre la borne inférieure de deux éléments de $sL(E)$: la condition est l'existence d'un minorant. Si la borne inférieure de p, q existe, auquel cas on la notera $\inf(p, q)$ ou $p \wedge q$, elle est donnée par

$$r(x) = \inf_{y+z=x} (p(y) + q(z)) \ .$$

La condition est alors que le membre de droite ne prenne pas la valeur $-\infty$. Noter que si la borne inférieure existe, son cône de finitude sera exactement la somme des cônes de finitude de ses arguments.

Proposition 1. Une condition nécessaire pour que p, q admettent une borne inférieure dans $sL(E)$ est que

$$p + \check{q} \geq 0 \ ,$$

où $\check{q}(x) = q(-x)$. Une condition suffisante est qu'en outre la somme des cônes de finitude de p et de q soit symétrique, autrement dit que ce soit un sous-espace vectoriel.

La condition $p + \check{q} \geq 0$ est nécessaire car $r \leq p$ et $r \leq q$ impliquent

$$0 = r(0) \leq r(x) + r(-x) \leq p(x) + q(-x) \ .$$

Montrons que la condition suffisante avec l'hypothèse additionnelle. Il s'agit de voir que la fonction r définie plus haut ne prend pas la valeur $-\infty$. Notons C_p et C_q les cônes de finitude de p et q. Il suffit de considérer x dans $C_p + C_q$ car $r(x) = +\infty$ en dehors. Par hypothèse on peut écrire $x = -a - b$ où a est dans C_p et b dans C_q. Alors, si $y = a + h$, il vient

$$p(y) + q(z) = p(-a + h) + q(-a - h)$$

où

$$p(-a + h) + q(-a - h) + p(a) + q(a) \geq p(h) + q(-h) \geq 0 \ ,$$

ce qui donne $r(x) \geq -p(a) - q(a)$.

Il est bien évident que l'existence d'une borne inférieure pour deux fonctions sous-linéaires p, q est soumise à des conditions. Il ne suffit pas que l'une des fonctions soit positive : sur $\mathbf{R}$ les fonctions x et 0 n'ont pas de borne inférieure.

La condition $p + \check{q} \geq 0$ ne suffit pas non plus : dans $\mathbf{R}^2$, si l'on prend $p(x, y) = q(x, y) = +\infty$ pour $y \leq 0$ et $p(x, y) = x$, $q(x, y) = -x$ pour $y > 0$, il est facile de voir que p, q n'ont pas de borne inférieure.

En revanche la condition additionnelle est vérifiée si les fonctions p, q ne sont pas simultanément nulles, a fortiori si l'une est finie; elle l'est aussi si les cônes de finitude de p et de q sont symétriques.

Bien évidemment, si les fonctions p, q sont positives, il existe toujours une borne inférieure; c'est en particulier le cas si elles sont symétriques.

Il résulte de cela un énoncé de prolongement.

Proposition 2. Si p est une fonction sous-linéaire finie sur l'espace E et q une fonction sous-linéaire sur le sous-espace F de E telle que $q \leq p$, alors il existe un (plus grand) prolongement de p à E avec la même propriété.

Il suffit en effet de prolonger d'abord q en $\tilde{q}$ en lui donnant la valeur $+\infty$ hors de F, puis de prendre la borne inférieure r avec p; c'est possible car $p(x) + q(-x) \geq q(x) + q(-x) \geq q(0) = 0$ sur F et qu'il n'y a rien à vérifier en dehors; de plus $r = q$ sur F : dans la formule qui donne $r(x)$ pour x dans F, seules comptent les décompositions $x = y + z$ où y, z sont dans F.

C'est donc trivial et en plus canonique. Par ailleurs le résultat s'étend au cas où la somme des cônes de finitude de p et de q est symétrique.

L'énoncé de prolongement sous-linéaire permet de ramener le théorème de Hahn-Banach, dans sa version originelle donnée par Banach lui-même, à un cas particulier : *l'existence d'une forme linéaire dominée par une forme sous-linéaire finie donnée.*

Si on se donne une fonction sous-linéaire finie p sur E et une forme linéaire v sur F vérifiant $v \leq p$, on peut commencer par prolonger v en une fonction sous-linéaire q sur E vérifiant $q \leq p$; elle est évidemment finie.

Si maintenant la forme linéaire u vérifie $u \leq q$, on aura

$$u(x) \leq v(x)$$

pour x dans F. Appliquant cette relation à $-x$, on en déduit que $u = v$ sur F.

On pourrait voir, plus généralement, que $q \leq r$ où q est sous-linéaire et r sur-linéaire implique $r = q$; autrement dit, une fonction sous-linéaire négative est nulle : en effet $p(x) + p(-x) \geq 0$.

On voit clairement ici pourquoi on n'a pas supposé p positive; la solution triviale $u = 0$ rendait la question posée non pertinente. D'ailleurs, quand on prolonge la forme linéaire v, on n'obtient pas une fonction positive.

En revanche on n'est pas obligé de supposer que p soit finie. Il suffit de supposer que son cône de finitude soit symétrique. On peut toujours prolonger u au sous-espace vectoriel sur lequel p est finie, en respectant $u \leq v$, puis arbitrairement, mais toujours par Zorn, ensuite. On en reparlera plus loin.

Voici un autre énoncé utile, dû à Gustave Choquet.

Proposition 3. Etant données deux fonctions q et p telles que $q \leq p$, la première étant sur-linéaire et la seconde sous-linéaire finie, il existe une forme linéaire u telle que

$$q \leq u \leq p \ .$$

On prend en effet $r = \inf(p, -\check{q})$ et il suffit de choisir une forme linéaire u telle que $u \leq r$. On notera que r est finie parce que p l'est.

On peut bien sûr choisir q égale à $-\infty$ en dehors de 0, de sorte que ce dernier énoncé est une extension du cas particulier indiqué du théorème de Hahn-Banach.

Par ailleurs l'hypothèse suivant laquelle q est finie peut être remplacée par la symétrie des cônes de finitude de p et q.

Voici enfin une conséquence intéressante de l'énoncé précédent, mentionnée aussi par Choquet.

Proposition 4. Etant données deux fonctions sous-linéaires p, q, l'une étant finie, et une forme linéaire u telle que $u \leq p + q$, on peut décomposer u en la somme $v + w$ de deux formes linéaires vérifiant $v \leq p$ et $w \leq q$.

Il suffit, cette fois-ci, de noter que

$$\frac{u}{2} - q \leq p - \frac{u}{2}$$

et de glisser une forme linéaire f entre les deux membres de l'inégalité. La décomposition cherchée sera

$$u = \left(\frac{u}{2} + f\right) + \left(\frac{u}{2} - f\right)$$

tout simplement.

Le résultat, pour des semi-normes, avait été annoncé par V. Strassen.

Comme précédemment, l'hypothèse suivant laquelle l'une des fonctions p, q est finie peut être remplacée par la symétrie des cônes de finitude de p et q.

On peut aussi tirer le dernier énoncé directement du théorème de Hahn-Banach. Dans la décomposition $u = \left(\frac{u}{2} + f\right) + \left(\frac{u}{2} - f\right)$ et faut vérifier

$$\begin{cases} \frac{u}{2} + f \leq p \\ \frac{u}{2} - f \leq q \end{cases}$$

ce qui revient à

$$f \leq \min(p - u/2, \check{d} + u/2) \ .$$

Il s'agit donc de vérifier l'existence de cette borne inférieure.

Maintenant le théorème de prolongement originel de Hahn-Banach peut aussi se déduire de l'énoncé de décomposition. Soit en effet p une fonction sous-linéaire finie, ou dont le cône de finitude est symétrique. Alors

$$0 \leq p + \check{p}$$

et on peut écrire

$$0 = v - v$$

où $v \leq p$. QED.

2. Cônes convexes.

Les cônes que nous considérons ici sont tous pointés; autrement dit, ils contiennent l'origine.

Définition. Dans un espace vectoriel réel F, une partie Γ est appelée cône convexe si elle vérifie les conditions qui suivent.

(a) $0 \in \Gamma$. (b) $\mathbf{R}_+\Gamma \subset \Gamma$. (c) $\Gamma + \Gamma \subset \Gamma$.

A un cône convexe Γ sur F est associé une relation de préordre sur F; on pose $x \leq y$ si $y - x$ est dans Γ. Le cône Γ s'interprète comme le cône positif.

C'est une relation d'ordre si et seulement si $\Gamma \cap (-\Gamma)$ est réduit à zéro; dans ce cas on dit que le cône est saillant.

Nous considérons, sur l'ensemble $Cc(F)$ des cônes convexes de F, la relation d'ordre inverse de l'inclusion. L'intersection et la somme de deux cônes convexes, ou plus généralement d'une famille de tels cônes, réalise respectivement la borne supérieure et la borne inférieure.

On peut passer très simplement d'une fonction sous-linéaire à un cône convexe. A la fonction sous-linéaire p sur l'espace vectoriel E, on associe le cône convexe $\Gamma(p)$ de l'espace $E \times \mathbf{R}$ des couples (x, y) tels que

$$p(x) \leq y \ .$$

L'application de $sL(E)$ dans $Cc(E \times \mathbf{R})$ ainsi définie est croissante. Elle respecte les bornes supérieure et inférieure; dans le dernier cas on suppose bien sûr que la borne inférieure existe dans $sL(E)$.

Dire que la forme linéaire u est majorée par la fonction sous-linéaire p revient à dire que la forme qui à (x, y) associe

$$y - u(x)$$

est positive sur $E \times \mathbf{R}$ pour le préordre défini par $\Gamma(p)$. Tout simplement il s'agit de traduire le fait que $y - u(x) \geq 0$ pour $y \geq p(x)$.

De plus les formes linéaires positives sur $E \times \mathbf{R}$ qui ne sont pas nulles sur $0 \times \mathbf{R}$ sont des multiples positifs des précédentes. Elles peuvent en effet s'écrire sous la forme

$$\beta(y - u(x))$$

où $\beta \neq 0$; or pour $x = 0$ il faut avoir $\beta \geq 0$.

Maintenant tous les cônes convexes de $E \times \mathbf{R}$ ne sont pas de la forme $\Gamma(p)$.

Considérons, plus généralement, un espace vectoriel réel F et un cône convexe Γ de F. Nous dirons que Γ est *dirigé* selon une demi-droite vectorielle Δ si l'on a les propriétés suivantes.

(d) $\Delta \subset \Gamma$. (e) Le cône Γ ne contient aucune droite affine parallèle à Δ.

D'une part, on note que ($\Gamma(p)$ est dirigé selon $0 \times \mathbf{R}+$).

D'autre part, si le cône Γ de F est dirigé selon la demi-droite $\Delta = \mathbf{R}_+ a$ et si H est un supplémentaire de la droite $\mathbf{R}a$, alors en posant

$$p(x) = \inf_{x + ya \in \Gamma} y \ ,$$

on définit une fonction sous-linéaire sur H.

L'opération est analogue à la construction de la jauge d'un ensemble convexe.

3. Prénormes, semi-normes.

Ici on peut prendre un corps de base valué complet non discret quelconque. Dans le cas du corps des nombres réels, une prénorme est une fonction sous-linéaire symétrique; elle est automatiquement positive. Dans le cas général une prénorme est définie de la même façon qu'une semi-norme, mais en acceptant la valeur $+\infty$.

Les prénormes et semi-normes sur E constituent des cônes convexes ordonnés $pN(E)$ et $sN(E)$. Ils sont réticulés, la borne inférieure de p, q étant donnée par

$$r(x) = \inf_{y+z=x} (p(y) + q(z))$$

sans aucune restriction ici.

La jauge j_A d'un disque A, donnée par

$$j_A(x) = \inf_{x \in \lambda A} |\lambda| \ ,$$

est une prénorme. C'est une semi-norme quand le disque est absorbant. Dans l'autre sens, si p est une prénorme, l'ensemble des x tels que $p(x) \leq 1$ est un disque A_p.

La dualité entre prénormes et disques donne ceci : si $A = A_p$ alors $p = j_A$; si $j = j_A$ alors A_p contient A et est inclus dans λA dès que $\lambda > 1$; dans le cas du corps $\mathbf{R}$, on l'obtient à partir de A en fermant les intervalles issus de 0 inclus dans A.

On constate aussi qu'à la borne inférieure sur les prénormes correspond l'enveloppe disquée sur les disques : $\inf(p, q)$ est la jauge de l'enveloppe disquée de A_p et A_q.

L'énoncé de prolongement donné pour les formes linéaires se traduit comme suit.

Proposition 1. Si p est une prénorme sur E et si q est une prénorme sur un sous-espace vectoriel F y vérifiant $q \leq p$, alors on peut prolonger q à E avec la même propriété.

Comme précédemment, on commence par prolonger q en $\tilde{q}$ sur E en lui donnant la valeur $+\infty$ hors de F, puis on prend $\inf(\tilde{q}, p)$.

Lorsque p est une semi-norme, il en est bien sûr de même du prolongement de q.

Maintenant, lorsque le corps de base est celui des nombres réels, la propriété de décomposition se traduit par le résultat de Strassen qui suit.

Proposition 2. Etant données deux prénormes p, q, et une forme linéaire u telle que $|u| \leq p + q$, on peut décomposer u en la somme $v + w$ de deux formes linéaires vérifiant $|v| \leq p$ et $|w| \leq q$.

Cependant le dernier énoncé est valable pour un corps injectif quelconque, c'est-à-dire un corps dans lequel le théorème de Hahn-Banach analytique s'applique, autrement dit un corps pour lequel le foncteur dual est ante-exact. Sa démonstration directe est même extrêmement simple. Dans la suite on remplace $v + w$ par $v - w$, pour faire apparaître un “bord”.

On noterait qu'entre disques, on dispose d'une suite exacte

$$A \cap B \to A \times B \to A + B \to 0$$

où la seconde flèche est l'application $x \mapsto (x, x)$ et la troisième l'application $(x, y) \mapsto x - y$.

Il en existe une version analogue pour les prénormes, qui est la suite exacte

$$0 \to E_{p+q} \to E_p \oplus E_q \to E_{p \wedge q} \to 0 \ ,$$

reliée à la précédente par un encadrement utilisant les facteurs 1 et 2; ici E est un espace vectoriel et E_r désigne l'espace prénormé obtenu en le munissant de la prénorme r.

On notera que les flèches sont des morphismes stricts, sous-espace à gauche et quotient à droite, dans la catégorie dont les morphismes sont les applications linéaires diminuant, au sens large, la prénorme. Ce sont pas seulement des morphismes stricts d'elc.

Par dualité, on obtient une suite

$$0 \to E'_{p\wedge q} \to E'_p \times E'_q \to E'_{p+q} \to 0$$

dont il s'agit de discuter l'exactitude. Ici le seul point à éclaircir est la surjectivité, au sens prénormé strict, de la flèche $E'_p \times E'_q \to E'_{p+q}$. Or c'est une conséquence immédiate de l'injectivité du corps. On obtient ainsi la propriété de décomposition considérée.

En d'autres termes, l'application diagonale

$$0 \to E_{p+q} \to E_p \oplus E_q$$

identifie E_{p+q} à un sous-espace vectoriel normé de $E_p \oplus E_q$. La forme linéaire u, qui vérifie $|u(x)| \leq p(x) + q(x)$ sur le premier, se prolonge au dernier avec conservation de la norme, sous la forme d'une forme linéaire $\tilde{u}$ telle que $|\tilde{u}(x, y)| \leq p(x) + q(y)$. Alors $v(x) = \tilde{u}(x, 0)$ et $w(y) = \tilde{u}(0, y)$ fournissent la décomposition cherchée.

Inversement, de l'exactitude de la suite duale ci-dessus, on peut déduire le théorème de prolongement analytique, autrement dit l'injectivité du corps. Soient, en effet, une semi-norme p sur l'espace vectoriel E et une forme linéaire u sur un sous-espace vectoriel F y vérifiant $|u| \leq p$. On introduit la prénorme 0_F nulle sur F et valant $+\infty$ en dehors. Supposons u prolongée à E en $\tilde{u}$ sans autre propriété que la linéarité. On a

$$|\tilde{u}| \leq p + 0_F \ .$$

Par suite $\tilde{u} = v + w$ où $|v| \leq p$ et $|w| \leq 0_F$. La fonction v est le prolongement cherché.

Corollaire 1 (Grothendieck). Soit A une partie convexe compacte d'un elc réel E et f une fonction affine continue sur A; montrer que f est limite uniforme sur A de fonctions affines continues sur E.

En introduisant $A - A$ et en utilisant la continuité uniforme de f, on se ramène au cas où A est un disque et où f est nulle et continue en 0. Donnons-nous $\epsilon > 0$. Soit U un voisinage disqué de 0 tel que $f \leq \epsilon$ sur $U \cap A$. On a

$$f \leq \epsilon p_{U\cap A} \leq \epsilon p_U + \epsilon p_A$$

si $p_{U\cap A}$, p_U, p_A sont les jauges de $U \cap A$, U, A. Par la propriété de décomposition il vient

$$f = g + h$$

où f, g sont linéaires et où $g \leq \epsilon p_U$, $h \leq \epsilon p_A$. C'est gagné.

Remarque. La compacité est ici inutile; il suffit de supposer f uniformément continue. Surtout, pour $\epsilon > 0$ donné, si f varie dans une partie uniformément équicontinue, on peut choisir la fonction approximante dans une partie équicontinue. C'est le point important qui manquait au théorème de Grothendieck et que le séminaire Banach a apporté.

Corollaire 2 (Chargois). Dans une dualité séparante entre deux espaces vectoriels réels, la somme de deux disques faiblement bornés et complets a la même propriété.

Dans la dualité entre E, F soient A et B des disques faiblement bornés et complets. Soient p, q les jauges de leurs polaires dans E. Alors A et B s'identifient aux boules unités des duaux normés E'_p et E'_q. Par la propriété de décomposition, leur somme s'identifie à la boule unité du dual normé E'_{p+q}, de sorte que $A+B$ est faiblement fermé et borné.

4. Ante-exactitude.

Jusqu'ici on a travaillé avec des espaces prénormés, semi-normés ou normés et des applications linéaires diminuant la norme. Or, si l'on veut mesurer le défaut d'injectivité du corps par un espace H^1, il faudrait se placer dans une catégorie abélienne, ou tout au moins dans une catégorie préabélienne y conduisant. Il faudrait donc remplacer les applications diminuant la norme par des applications continues ou bien bornées, autrement dit autoriser des constantes dans les propriétés énoncées.

Voici comment récupérer des constantes pratiquement universelles, là où on n'en aurait pas imposé a priori.

Etant donné un espace vectoriel E sur un corps valué complet non discret, on considère l'ensemble $\mathbf{p}$ des prénormes sur E, et, pour chaque p, l'espace $E_{\mathbf{p}}$ obtenu en munissant E de la semi-norme en question. On considère alors la somme directe prénormée

$$E_{\mathbf{p}} = \bigoplus_p E_p$$

de ces espaces. La norme sur la somme (à support fini) $\sum x_p$ est simplement $\sum p(x_p)$. Le dual de cette somme est le produit prénormé

$$E'_{\mathbf{p}} = \prod_p E'_p$$

qui est le produit cartésien muni de la prénorme $\mathbf{p}$ définie par

$$\mathbf{p}((y)_p) = \sup_p \|y_p\|$$

où l'on a pris la norme d'opérateur.

Supposons maintenant le corps k tel que le foncteur dual soit ante-exact, mais en termes d'espaces prénormables. Soit q une semi-norme sur E. On désigne par $\tilde{q}$ la semi-norme somme sur $\mathbf{E_p}$ égale à q sur tous les termes. Par hypothèse le morphisme

$$E'_{\mathbf{p}} \times E'_{\tilde{q}} \to E'_{\mathbf{p}+\tilde{q}}$$

obtenu en transposant l'application diagonale est un épimorphisme strict d'espaces prénormables. L'image de la boule unité contient une boule de rayon $r > 0$.

Soient maintenant p une autre semi-norme sur E et u est une forme linéaire sur E vérifiant $|u| \leq p + q$. On commence par prolonger u en $\mathbf{u}$ de E à $E'_{\mathbf{p}}$ en lui donnant la valeur de u sur E_p et 0 sur les termes autres que p. Cette dernière forme s'écrit $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ où $|\mathbf{v}| \leq \mathbf{p}/r$, $|\mathbf{w}| \leq \tilde{q}/r$. La restriction au terme E_r fournit la décomposition cherchée.

Ici la constante $1/r$ dépend de q mais non de p. C'est, par exemple, suffisant pour le théorème de Grothendieck.

Maintenant cette propriété permet d'obtenir le théorème de prolongement avec une constante universelle pour une cardinalité donnée. En le réappliquant à la propriété de décomposition, on obtient que les deux constantes sont universelles.

5. Retour sur Hahn-Banach.

Nous complétons ici l'analyse du théorème de Hahn-Banach en reliant entre elles différentes versions possibles, que Bourbaki a explorées pour la plupart.

Rappelons d'abord l'énoncé originel, *analytique* et abstrait, donné par Banach dans sa monographie.

(Ban) *Etant données une fonction sous-linéaire finie p sur l'espace vectoriel réel E et une forme linéaire u vérifiant $u(x) \leq p(x)$ sur un sous-espace vectoriel F de E, on peut prolonger u en une forme linéaire v vérifiant $v(x) \leq p(x)$ sur E.*

Comme nous l'avons dit le fait que p soit finie n'est qu'en partie nécessaire. Cependant nous nous limiterons ici à ce cadre. L'énoncé précédent admet le cas particulier suivant.

(ban) *Etant donnée une fonction sous-linéaire finie p sur l'espace vectoriel réel E, il existe une forme linéaire u vérifiant $u(x) \leq p(x)$ sur E.*

De l'énoncé (Ban) on tire immédiatement la version *analytique* semi-normée, donc concrète, suivante.

(Ana) *Etant donnés un espace vectoriel semi-normé réel E et une forme linéaire u de norme ≤ 1 sur un sous-espace vectoriel F de E, on peut prolonger u en une forme linéaire v de norme ≤ 1 sur E.*

Cette version admet elle-même un cas particulier, qui est la forme sous laquelle on l'utilise le plus souvent.

(ana) *Etant donnés un espace vectoriel semi-normé réel E et un élément x de E de norme ≥ 1, on peut trouver une forme linéaire u de norme ≤ 1 sur E telle que $u(x) = 1$.*

Cependant on tire très facilement aussi de l'énoncé (Ban) la forme dite *géométrique* classique, concrète également, qui suit.

(Géo) *Etant donnés un espace vectoriel topologique réel E, une partie convexe ouverte non vide C de E et une variété linéaire affine M ne rencontrant pas C, il existe un hyperplan affine H contenant M et ne rencontrant pas C.*

Un cas particulier en est l'énoncé suivant.

(géo) *Etant donnés un espace vectoriel topologique réel E, une partie convexe ouverte non vide C de E et un point a extérieur à C, il existe un hyperplan affine H contenant a et ne rencontrant pas C.*

Cependant c'est plutôt de la conséquence suivante que l'on ne sert.

Dans un espace localement convexe réel E, on peut séparer (strictement) une partie convexe fermée non vide C et une partie convexe compacte K ne rencontrant pas C par un hyperplan affine fermé H.

La propriété vaut notamment pour le cas où K est réduit à un point. De toute façon c'est de la version (géo) qu'on la tire, en considérant un voisinage ouvert disqué V de 0 tel que $K+2V$ ne rencontre pas C et la partie convexe ouverte non vide $C-K+2V$, laquelle ne contient pas 0.

Finalement la version *analytico-géométrique* abstraite, due à Choquet et qui sera finalement préférée par Bourbaki, s'énonce ainsi.

(Pos) *Etant donnés un espace vectoriel réel préordonné E de cône positif Γ et une forme linéaire positive u sur un sous-espace vectoriel V tel que $\Gamma + V = E$, on peut prolonger u en une forme linéaire positive v sur E.*

Cet énoncé admet lui-même un cas particulier.

(pos) *Etant donnés un espace vectoriel réel préordonné E de cône positif* Γ *et une droite vectorielle D rencontrant* Γ *suivant une demi-droite et vérifiant* $\Gamma + D = E$*, il existe une forme linéaire positive u sur E non nulle sur D.*

Une façon équivalente de s'exprimer est la suivante.

(pos) *Etant donnés un espace vectoriel réel préordonné E de cône positif* Γ *et un élément a positif et non négatif pour lequel toute droite de direction a rencontre* Γ*, il existe une forme linéaire positive u sur E telle que $u(a) = 1$.*

Entre ces énoncés on dispose de tout un ensemble de relations. Il ne s'agit pas vraiment d'implications puisqu'ils sont tous vrais. Ce sont des passages relativement simples, n'utilisant pas le recours à l'induction.

$$\begin{array}{ccc}
\text{(Geo)} & & \\
\uparrow\downarrow & \searrow & \\
\text{(Ban)} & \leftrightarrow & \text{(Ana)} \\
\uparrow & \searrow & \downarrow \\
\text{(Pos)} & \leftrightarrow & \text{(pos)}
\end{array}$$

Dans ce diagramme on n'a placé que les relations principales : en les combinant on passe d'importe quelle forme à n'importe quelle autre.

On n'insistera pas sur le passage de (Ban) à (Ana), qui n'est qu'une particulisation triviale, ni sur celui de (Géo) à (Ana), très classique, et qu'on trouve par exemple dans l'édition de 1953 des EVT de Bourbaki[1].

Le passage de (Pos) à (Ban) est traité dans l'édition de 1965 des même EVT[2] : on considère dans $E \times \mathbf{R}$ le préordre défini par le cône $\Gamma(p)$ d'équation $p(x) \leq y$ et on prolonge la forme linéaire positive $g(x, y) = y - f(x)$.

Dans la même édition on trouve aussi le passage de (Ban) à (Géo)[3] : on se ramène au cas où C contient l'origine et on considère simplement sa jauge.

De (Géo) **à** (Ban) ou (Ana).

La forme originelle de Banach est démontrée à partir de la forme géométrique en exercice dans l'édition de 1953 des EVT de Bourbaki[4]. La méthode consiste à appliquer la forme géométrique au cône convexe de $E \times \mathbf{R}$ défini par $p(x) < t$. La variété linéaire sera simplement le graphe de la fonction u. Cependant il faut se donner une topologie pour laquelle la partie considérée soit ouverte. Ici Bourbaki propose de considérer la topologie localement convexe la plus fine.

Il est plus élégant d'introduire la semi-norme $p'(x) = \sup(p(x), p(-x))$, dont la positivité vient de ce que $p(x) + p(-x) \geq p(0) = 0$. D'autant plus que pour montrer que la topologie localement convexe la plus fine est séparée il faut utiliser le lemme se Zornet qu'il encore voir que le cône considéré est bien ouvert[5].

[1] Chapitre II, §5, n°7, théorème 1, p 101.

[2] Chapitre II, §3, n°2, théorème 1, p 65.

[3] Chapitre II, §5, n°1; théorème 1, p 82.

[4] Chapitre II, §5, exercice 16, p 105.

[5] Chapitre II, §2, n°1, exemple 3 p 58.

Lorsqu'on cherche à établir (Ban) pour une fonction sous-linéaire finie et positive, comme pour les premières rédactions ou la version analytique semi-normée, il est encore plus simple de considérer l'ensemble convexe C constitué par les x tels que $p(x) < 1$ et d'introduire la semi-norme p' ci-dessus, pour laquelle il est ouvert.

De (pos) **à** (Pos).

Plaçons-nous dans les hypothèses de (Pos). On peut supposer la forme u à prolonger non nulle sur le sous-espace V. Soient V_+ le demi-espace de V sur lequel u est positive et a un point où elle vaut 1. Soit D la droite engendrée par a. Si on remplace C par $C' = C + V_+$ on est dans les conditions de (pos); d'abord $-a$ n'est pas dans C; ensuite, puisque $D - V_+ = C$, on a

$$D - C' = D - V_+ - C = V - C = E\ .$$

Une forme linéaire v, positive pour l'ordre défini par C', qui vaudra 1 en a coïncidera avec u sur V; on commence par voir, en effet, qu'elle a le même noyau sur V que u.

De (Ban) **à** (pos).

Plaçons-nous dans les hypothèses de (pos). On peut commencer par considérer un supplémentaire algébrique H de a, ce qui est d'ailleurs une conséquence de la version (Ban) ou (Ana) pour une prénorme. Le cône positif est dirigé selon $\Delta = \mathbf{R}_+ a$: les droites parallèles à Δ le coupent suivant une demi-droite; en effet supposant $b + \mathbf{R}a \subset \Gamma$ et prenant $-b + ya$ dans Γ, on aurait $a\mathbf{R} \subset \Gamma$. Cela permet d'associer, comme en **3**, à tout point x de H l'unique nombre réel $p(x)$ tel que $x + p(x)a$ soit l'extrémité de la demi-droite intersection de $x + \mathbf{R}a$ et du cône positif.

De (Ana) **à** (pos).

Restons dans les hypothèses de (pos). On va montrer que, si C est le cône postif, l'ensemble convexe et symétrique

$$A = (C - a) \cap (a - C)$$

est absorbant. Soit en effet x un élément de E. On peut trouver $\lambda > 0$ assez grand pour que que $x + \lambda a$ et $-x + \lambda a$ soient dans C. Alors $x/\lambda + a$ et $-x/\lambda + a$ sont aussi dans C. Ainsi x/λ est dans A.

La jauge de A est alors une semi-norme p. Comme $p(a) = 1$, la version analytique semi-normée permet de conclure.

6. Retour sur les fonctions sous-linéaires.

On cherche à étendre les énoncés de prolongement, comme celui de Banach pour commencer, au cas où la fonction sous-linéaire p peut prendre des valeurs infinies.

Il est facile de constater que la propriété ne s'étend pas dans le cas le plus général. Déjà, en dimension 2 si l'on pose

$$p(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } y > 0 \\ |x| & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

et si $u(x,0) = x$, il est facile de voir que l'on ne peut pas prolonger u à $\mathbf{R}^2$ en respectant $u \le p$; on aura pu prendre $p(x,0) = +\infty$ aussi bien dans cet exemple.

L'obstacle rencontré est lié au fait qu'il n'existe pas de borne inférieure pour la fonction p précédente et pour la fonction sous-linéaire $\tilde{u}$ obtenue en prolongeant u par la valeur $+\infty$ pour $y \neq 0$.

Regardons cependant la démonstration de Banach. Si u est définie sur le sous-espace vectoriel G de E, le prologement à $G + \mathbf{R}a$ doit vérifier

$$u(z) - p(-a+z) \leq u(a) \leq p(a+y) - u(y)$$

pour y, z dans G. On sait que la borne supérieure des termes de gauche est majorée par la borne inférieure des termes de droite. On peut trouver une valeur $u(a)$ *finie* dans les deux cas suivants :

- $p(a+y)$ et $p(-a)+z$ sont tous les deux infinis pour tous y, z, auquel cas $u(a)$ est arbitraire, ce qui est logique puisqu'il n'y a aucune condition à vérifier.

- $p(a+y)$ et $p(-a+z)$ sont tous les deux finis pour au moins un y et un z, auquel cas les deux bornes sont finies.

Cela donne l'énoncé suivant.

(Ban_∞) *L'énoncé* (Ban) *reste vrai si, avec les mêmes notations, le cône de finitude C_p de p est tel que $F + C_p$ soit un sous-espace vectoriel de E.*

On commencera par prolonger la forme linéaire u à ce sous-espace vectoriel. Ensuite on se trouvera dans le premier cas ci-dessus, celui où le prolongement n'a aucune condition à respecter.

En attendant on se trouvera dans le second cas, celui où p prend des valeurs finies dans chacun des demi-espaces ouverts séparés par G dans $G + \mathbf{R}a$. En effet $a = b + y$ et $-a = c + z$, où b, c sont dans C_p et y, z dans F.

On notera que la condition donnée est aussi celle indiquée pour assurer l'existence d'une borne inférieure pour p et pour la fonction sous-linéaire $\tilde{u}$ obtenue en prolongeant u par la valeur $+\infty$ en dehors de F. Autrement dit on peut toujours supposer que $p = u$ sur F.

Dans le contrexemple précédent la condition donnée n'est évidemment pas satisfaite. Cependant il n'y a pas de raison de penser qu'elle soit nécessaire.

Un cas particulier de l'énoncé (Ban) est l'énoncé (ban) dans lequel l'espace F est réduit à 0.

Pour former une forme linéaire u telle que $u \leq p$, on peut commencer par la définir sur une droite D. C'est toujours possible.

Etant donnée une droite D, considérons la propriété suivant laquelle $D + C_p$ est un sous-espace vectoriel. Si D n'est pas dans le sous-espace vectoriel $V = C_p - C_p$, cela signifie que C est déjà un sous-espace vectoriel, autrement dit que C est symétrique. Ecartons ce cas trivial.

Soit donc b tel que $-b$ ne soit pas dans C_p. Si la condition est vérifiée il existe c dans C tel que $a = b + c$ soit non nul et appartienne à D. Alors a est un point de C_p vérifiant ceci.

(Int_1) *Le cône $C_p + \mathbf{R}a$ est un espace vectoriel;* ou encore : *il contient $-C_p$.*

Un point de C_p ayant cette propriété sera dit *point interne* de C_p. Les propriétés qui suivent caractérisent encore ces points parmi ceux de C_p.

(Int_2) *L'ensemble $C_p - \mathbf{R}_+a$ est un espace vectoriel;* ou encore : *il contient $-C_p$.*

En effet $C_p - \mathbf{R}_+ a$ contient tout simplement $C_p + \mathbf{R}a$.

(Int$_3$) *Pour tout y dans $V = C_p - C_p$, il existe $\alpha > 0$ tel que $a + \lambda y$ soit dans C_p pour $0 \leq \lambda \leq \alpha$;* ou encore : *pour tout b dans C_p, il existe $\alpha > 0$ tel que $a - \lambda b$ soit dans C_p pour $0 \leq \lambda \leq \alpha$.*

Montrons que (Int$_2$) implique (Int$_3$). Si y est dans C_p, il n'y a rien à démontrer. Sinon il existe $\beta > 0$ tel que $y = b - \beta a$, où b est dans C_p; cela restera vrai pour $\mu \geq \beta$ au lieu de β. Par suite

$$a + \frac{y}{\mu} = \frac{b}{\mu}$$

est dans C_p.

La réciproque est semblable.

Ainsi retrouve-t-on la notion de point interne selon Bourbaki, non pas celle des premières rédactions mais celle de l'édition de 1953 par exemple (chapitre II, §2, exercice 3), p 66); dans le cas général d'une partie convexe c'est un point intérieur pour la topologie localement convexe la plus fine sur le sous-espace engendré.

Un cône ne contient pas toujours de point interne : voir le cône $\mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. En revanche c'est le cas en dimension finie : si $e_1, \ldots, e_k$ engendrent le cône, alors $e_1 + \cdots + e_k$ est interne.

Cela n'apporte pour autant de réponse à la question suivante. Quelles sont les fonctions sous-linéaires p admettant une minorante linéaire? C'est évidemment le cas des fonctions sous-linéaires positives. C'est aussi le cas des fonctions sous-linéaires finies. les fonctins en question sont exactement les sommes d'une fonction linéaire et d'une fonction sous-linéaire positive.

Maintenant est-ce le cas de toutes les fonctions sous-linéaires? Ce n'est pas clair. On vient de voir que si C_p possède un point interne on a la propriété. Ce n'est pas toujours le cas, mais la condition n'est évidemment pas nécessaire.

S'il existe une minorante linéaire, a-t-on unicité? Pour une fonction sous-linéaire finie, l'unicité caractérise les fonctions linéaires. C'est une conséquence facile de Hahn-Banach. Mais qu'en est-il dans le cas général?

7. Retour sur les cônes convexes.

Maintenant on peut clarifier une partie de ce qui précède en passant, à la manière de Choquet, par des cônes convexes. Nous nous appuyons sur ce que nous avons fait à la section **3**.

La propriété (Pos) s'étend évidemment comme suit.

(Pos$_\infty$) *La forme* (Pos) *reste vraie si l'on remplace la condition suivant laquelle V est cofinal par : la somme $\Gamma + V$ du cône positif Γ et de V est un sous-espace vectoriel.*

Or, pour un sous-espace vectoriel F de E, on a l'équivalence entre les propriétés qui suivent.

- La somme $C_p + F$ est un sous espace vectoriel de E.

- La somme $\Gamma(p) + F \times \mathbf{R}$ est un sous espace vectoriel de $E \times \mathbf{R}$.

Ainsi retrouve-t-on (Ban$_\infty$).

Maintenant nous allons nous intéresser au cas particulier de la propriété (pos$_\infty$) pour les cônes convexes.

Etant donnée une fonction sous-linéaire p sur l'espace vectoriel réel E, l'existence d'une minorante linéaire équivaut à celle d'une forme linéaire positive sur le cône $\Gamma(p)$ de $E \times \mathbf{R}$ non nulle sur $0 \times \mathbf{R}$.

Donnons-nous, de façon générale, un *cône convexe* Γ de l'espace vectoriel réel E et considérons la question de l'existence de formes linéaires positives non triviales pour la relation de préordre définie par Γ.

Il est d'abord clair que la question n'a d'intérêt que lorsque Γ est générateur, autrement dit si $E = \Gamma - \Gamma$. Dans ce cas la question est celle de savoir s'il existe une forme linéaire u positive et non identiquement nulle sur Γ.

Précisons la question comme suit. Donnons-nous un *cône convexe* Γ de l'espace vectoriel réel E et une demi-droite vectorielle Δ de Γ. Nous cherchons s'il existe une *forme linéaire sur E, positive sur* Γ *et non nulle sur* Δ.

Une condition nécessaire évidente pour cela est que Γ soit dirigé selon Δ, c'et-à-dire que Γ ne contienne aucune parallèle à Δ.

En effet la forme linéaire cherchée ne peut être positive sur une telle droite sans y être constante, auquel cas elle serait nulle sur Δ.

Nous dirons que le cône Γ est *éligible* s'il existe une demi-droite Δ selon lequel il est dirigé.

On noterait incidemment que les droites suivant lesquelles Γ est dirigé forment le complémentaire dans Γ d'un sous-espace vectoriel de E.

Si Γ est générateur et non éligible, il ne peut exister aucune forme linéaire positive non triviale. Un exemple très simple de tel cône est donné en exercice dans l'édition de 1953 des EVT de Bourbaki[6]. Dans l'ensemble des suites à support fini de nombres réels, on considère le cône formé de 0 et des suites dont le dernier terme non nul est > 0. C'est un cône convexe définissant sur E un ordre total. Si l'on identifie les suites à des polynômes, c'est le cône des polynômes dont la limite en $+\infty$ est positive ou nulle.

Supposons maintenant le cône Γ dirigé selon Δ. Si l'on choisit un supplémentaire H de la droite engendrée par Δ, on peut ramener Γ entre les cônes $p(x) < y$ et $p(x) \leq y$ pour une fonction sous-linéaire p sur H.

La question posée est ainsi celle de l'existence d'une minorante linéaire pour une fonction sous-linéaire. On remarquera, en effet, que le choix du supplémentaire H est sans importance. Le passage de l'un à l'autre ajoute à p une forme linéaire sur H.

[6] Chapitre II, §1; n°6, exercice 4) p 53.

§9 Appendice : les espaces disqués selon Houzel

La présentation qui suit est celle de Christian Houzel; on la trouve essentiellement dans son séminaire Banach ou dans son article pour le dictionnaire de l'Encyclopaedia universalis. Elle n'a pas vocation à remplacer l'un ou l'autre. C'est juste une introduction, limitée à des généralités — banalités même — précisément celles qui conviennent, par les thèmes concernés, pour l'analyse du livre des EVT de Bourbaki. Par rapport au séminaire ou à l'article cités, la terminologie diffèrera un peu, notamment pour se rapprocher de Bourbaki; quand ce sera le cas, on le mentionnera.

Dans la suite on considèrera principalement des espaces vectoriels réels ou complexes, comme c'est essentiellement le cas pour le chapitre III du livre des EVT. Les renvois à ce dernier seront limités ici aux éditions.

Par ailleurs on parlera en termes de catégories, pour faire le lien avec le séminaire Banach. Cependant tout est fait pour être aussi bien décrit en termes de structures. De fait une seule nouvelle structure est nécessaire, à côté de celles d'espace normé et d'espace localement convexe; il s'agit précisément de la structure d'espace disqué, à interpréter comme un enrichissement de celle d'espace localement convexe.

1. Des espaces normés aux espaces disqués.

Selon Bourbaki, la notion de norme est apparue en 1907-1908 dans les travaux de Fréchet et Schmidt, pour introduire le langage de la géométrie dans l'espace de Hilbert.

Cependant, la norme sur un espace vectoriel sert à la fois, par l'intermédiaire des boules, à définir les voisinages de 0 — ou d'un point quelconque — et les parties bornées. De la même façon, entre espaces normés, les morphismes sont aussi bien les applications linéaires bornées que les applications linéaires continues — pour ne pas parler de la catégorie des espaces normés au sens strict, dont les morphismes sont les applications linéaires diminuant la norme. Pour cette raison, une généralisation équilibrée des espaces normés doit prendre en compte à la fois l'aspect topologique, avec les voisinages de 0, et l'aspect bornologique, avec les parties bornées.

Se donner simultanément une topologie et des parties bornées avait déjà été fait par Grothendieck dans sa première publication, qui est une note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences de mars 1950. Cependant il ne dégage pas de structure.

Suivant Houzel, on appelle *espace disqué* la donnée d'un espace vectoriel E et de deux ensembles, stables par homothétie non nulle, de parties disquées ou disques — i.e. de parties D telles que $\lambda x + \mu y$ est dans D dès que x, y le sont et que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$— l'un stable par intersection finie et héréditaire à droite pour l'inclusion, l'autre stable par somme finie et héréditaire à gauche pour l'inclusion. Le premier définira les voisinages disqués de 0 — un voisinage de 0 étant une partie contenant l'un d'eux — et le second les disques bornés — une partie bornée étant une partie contenue dans l'un d'eux. On fait encore l'hypothèse de compatibilité suivante : tout point appartient à un disque borné et que tout disque borné B est *absorbé* par tout voisinage de zéro V : il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda B \subset V$.

Le premier ensemble, celui des voisinages disqués de 0, contient toujours l'ensemble réduit à la partie complète, lequel correspond à la topologie grossière. Le second ensemble, celui des disques bornés, contient toujours l'ensemble des disques engendrés par un ensemble fini, lequel correspond à la bornologie dite *fine*, qu'on notera ($\mathfrak{s}$).

Les parties disquées ou les disques ont été introduits, sous ce nom, par Grothendieck dans son cours de São Paulo[1]. Dans les EVT de Bourbaki, les parties que nous appelons disquées sont dites *convexes équilibrées*. Les parties équilibrées sont définies, pour un corps valué complet non discret, dans l'édition de 1953 notamment[2]. Dans le cas réel, une partie convexe est équilibrée si elle est symétrique.

Dans le séminaire Banach de 1963-1964, les espaces disqués sont appelés espaces vectoriels topologiques et bornologiques de type convexe, en abrégé elbc. On donne la définition en dehors d'hypothèses de convexité; on exige aussi que l'adhérence d'une partie bornée soit bornée, condition pratiquement toujours vérifiée[3].

Bourbaki a introduit, de fait, beaucoup d'espaces disqués dans ses EVT. C'est déjà le cas lorsque, dans l'édition de 1955, il introduit sur un espace localement convexe un système $\mathfrak{S}$ de parties; cependant il ne le fait qu'en pensant aux applications linéaires continues. L'édition de 1981 va plus loin. On y introduit, sur un espace localement convexe, ce qui est appelé une *bornologie adaptée*; il est demandé qu'elle soit de type convexe, formée de parties bornées pour la topologie; il est encore demandé que l'adhérence d'une partie bornée soit bornée; en revanche il n'est pas demandé que la bornologie soit *couvrante*, terme employé par Bourbaki pour dire que les points sont bornés, ce qui revient à dire que la bornologie contient la bornologie fine.

On n'imposera pas ici à l'adhérence d'un disque (ou d'une partie) borné(e) d'être borné(e), la levée de cette restriction permettant de faire des espaces bornologiques une sous-catégorie des espaces disqués. Cependant, dans un espace disqué quasi-complet ou saturé complet, la condition sera automatiquement vérifiée. En s'inspirant de la terminologie de l'édition de 1981 de Bourbaki, on dira qu'un espace disqué ayant cette propriété sera *adapté* ou aura une bornologie *adaptée*.

Etant donnés deux espaces disqués E et F, un morphisme de E vers F est une *application linéaire continue et bornée*, le dernier qualificatif signifiant qu'elle transforme tout disque borné en disque borné.

Un espace normé définit naturellement un espace disqué. La catégorie (nor) des espaces normés ou plutôt normables — à savoir définis à équivalence de norme près — s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie (dis) des espaces disqués.

2. Espaces localement convexes.

Si l'on ne se donne que le premier ensemble, celui des voisinages disqués de 0, en exigeant que chaque voisinage disqué absorbe les points — autrement dit les bornés fins — on obtient ce qu'on appelle un espace vectoriel topologique localement convexe, ou espace localement convexe, en abrégé elc. Les morphismes d'elc sont les applications linéaires continues. La catégorie (nor) des espaces normables s'identifie déjà à une sous-catégorie pleine de la catégorie (elc) des elc.

[1] Chapitre 2, n°2, définition 2, p 82.
[2] Chapitre I, §1, n°3, définition 2, p 5.
[3] Chapitre 1, §5, n°1, TB2) p 62.

Les elc ont été introduits par Janos von Neumann en 1935. Leur étude constitue le fil directeur des EVT de Bourbaki; du moins tisse-t-elle la trame des derniers chapitres.

Cependant on peut mettre une bornologie, qui sera dite *canonique*, sur un elc, pour en faire un espace disqué. Un disque borné canonique est simplement un disque absorbé par tous les voisinages de 0; la bornologie canonique est la plus grande qui soit compatible avec la topologie.

L'opération qui précède identifie la catégorie (elc) à une sous-catégorie pleine de (dis), celle des espaces disqués ayant une bornologie canonique[4].

Bourbaki introduit les parties bornées canoniques dans ses EVT dès l'édition de 1955, en les appelant simplement parties bornées; Grothendieck fait essentiellement de même[5]. En revanche, pour l'édition de 1981, le même Bourbaki, après avoir reproduit la définition des éditions précédentes, emploie le terme de bornologie canonique[6].

3. Espaces bornologiques de type convexe.

Si l'on ne se donne que le second ensemble, celui des disques bornés, on obtient ce qu'on appelle un espace vectoriel bornologique de type convexe, en abrégé ebc. Les morphismes d'ebc sont les applications linéaires bornées. La catégorie (nor) s'identifie déjà aussi à une sous-catégorie pleine de la catégorie (ebc) des ebc.

Si les parties bornées sont utilisées assez tôt, c'est à Lucien Waelbroeck que l'on doit d'avoir franchi le pas pour en faire des catégories, avec ce qu'il nomme un *ensemble à bornés* pour désigner un ensemble bornologique ou un *espace à bornés* pour désigner un ebc. Le qualificatif *bornologique*, dans cette acception qui n'est pas celle de Bourbaki, a été introduit par Houzel.

Le cours de Grothendieck a pratiquement assimilé les structures bornologiques, notamment à l'occasion de l'énoncé du théorème attribué à Mackey[7]. Cependant, là encore, il ne va pas jusqu'à expliciter une structure.

Dans les EVT de Bourbaki, on trouve assez tôt des ensembles munis de systèmes de parties. Cependant il faut attendre l'édition de 1981, pour trouver la définition d'une bornologie[8]; comme on l'a vu, il n'est pas demandé que les points soient bornés.

De même qu'on peut mettre une bornologie canonique sur un elc, on peut mettre une topologie, qui sera aussi dite *canonique*, sur un ebc, pour en faire un espace disqué. Un voisinage disqué de 0 est simplement un disque, dit *bornivore*, qui absorbe toutes les parties bornées; la topologie canonique est la topologie localement convexe la moins fine qui soit compatible avec la bornologie.

Il semble que le qualificatif de bornivore ait été introduit pour la première fois par Bourbaki, dans son article aux Annales de l'institut Fourier de 1950, pour ne plus être utilisé par la suite. Il a été remis à l'honneur par le séminaire Banach.

L'opération qui précède identifie aussi (ebc) à une sous-catégorie pleine de (dis), celle des espaces disqués ayant une topologie canonique.

---

4 Voir ainsi Houzel 1972, séminaire Banach, chapitre 1, §4, n°3, p 56.

5 Chapitre III, §2, n°1, définition 1, p 4 et chapitre 1, n°6, définition 5, p 41.

6 Chapitre III, §1, n°2, définition 5.

7 Théorème 7 p 119.

8 Chapitre III, §1, n°1, définition 1.

4. Des foncteurs.

En composant l'inclusion de (elc) ou (ebc) dans (dis) avec le foncteur d'oubli adéquat, on obtient des foncteurs b et t de (elc) vers (ebc) et de (ebc) vers (elc). Ce sont les foncteurs introduits dans le séminaire Banach.

Les mêmes foncteurs d'oubli produisent des isomorphismes de la sous-catégorie de (dis) des espaces qui ont à la fois une bornologie et une topologie canonique avec des sous-catégories pleines de (ebc) et (elc) échangées par les fonvteurs t et b, celles des ebc ou elc *normaux* selon la terminologie du séminaire Banach[9].

Il sont appelés *bornologiques* par Bourbaki, qui les introduit en exercice dès l'édition de 1955 puis dans le corps du traité plus tard, comme en 1981[10].

Dans cette affaire, le point important est le fait d'intégrer les deux composantes, topologique et bornologique, dans une même structure. Donner un nom aux espaces topologique ou bornologique sous-jacents est secondaire. Aucune tentative pour dégager une nouvelle structure n'apparaît dans les éditions des EVT, même dans celle de 1981.

En résumé, on trouve dans la catégorie (dis) les objets suivants.

- les espaces disqués généraux,

- les espaces disqués ayant une bornologie canonique, qu'on pourra appeler *espaces disqués topologiques* et qui correspondent aux elc,

- les espaces disqués ayant une topologie canonique, qu'on pourra appeler *espaces disqués bornologiques* et qui correspondent aux ebc,

- les espaces disqués ayant une bornologie et une topologie canoniques, i.e. les espaces normaux, qu'on pourra aussi appeler *elc bornogiques* comme le fait Bourbaki.

Au lieu dire, comme dans le séminaire Banach, que le foncteur b commute aux limites projectives et le foncteur t aux limites inductives, on pourrra dire, de façon équivalente, qu'une limite projective d'espaces disqués topologiques est topologique et qu'une limite inductive d'espaces disqués bornologiques est bornologique. Il n'est donc absolument pas besoin de foncteurs. Tout peut être aussi bien décrit dans le cadre bourbachique des structures.

5. Espaces d'applications linéaires.

L'espace $L(E, F)$ des applications continues et bornées entre deux espaces disqués E et F est muni naturellement de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E et de la bornologie des parties équicontinues et équibornées, ce qui en fait un nouvel espace disqué.

En particulier, lorsqu'on prend pour F le corps de base, on obtient ainsi le dual de l'espace disqué E, qui est un nouvel espace disqué E'. C'est l'espace des formes linéaires continues sur E — lesquelles sont automatiquement bornées; il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées et de la bornologie des parties équicontinues — lesquelles sont automatiques équibornées. Ainsi, comme espace vectoriel et pour sa bornologie, le dual E' ne dépend que de la topologie de E; à l'inverse la topologie de E' ne dépend que de la bornologie de E. Il faut comprendre que l'échange entre structures produit par la dualité ne se comprend bien qu'avec les espaces disqués.

---

9 Chapitre 2, §2, n°6, p 102.

10 Exercice 12, p 13 et chapitre III, §2, définition 1, p III.12.

C'est pour mettre une topologie sur $L(E, F)$, lorsque E, F sont des elc, que Bourbaki a considéré des systèmes $\mathfrak{S}$ de parties bornées, la topologie de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{S}$ définissant l'espace $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

Etant donnés un espace disqué E et son dual disqué E', les voisinages disqués de zéro ou les disques bornés de E' sont, par construction, les disques dont le polaire est borné ou un voisinage de zéro. D'un autre côté, les voisinages disqués de zéro ou les disques bornés de E sont les disques dont le polaire est borné ou — pour un espace disqué adapté — un voisinage de zéro. Dans ce dernier cas on a besoin de savoir qu'un disque fermé de E est faiblement fermé dans la dualité avec E', ce qui résulte du théorème de Hahn-Banach.

En particulier dans la **dualité canonique** avec son dual, la topologie d'un elc est duale. Ainsi **la topologie est toujours canoniquement duale**. Autrement dit un espace disqué séparé s'identifie toujours, pour la topologie, à un sous espace disqué de son bidual disqué. Exactement comme pour les espaces normés.

Cet énoncé n'est pas vraiment explicité par Bourbaki avant l'édition de 1981 où il est juste dit que la topologie de l'espace localement convexe E est identique à celle de la convergence uniforme dans les parties équicontinues de E'; Grothendieck l'a donné en commentaire après avoir correctement défini un bidual qui n'est pas le dual du dual[11].

Entre espaces disqués, on introduit aussi les applications linéaires *quasi-continues*, i.e. qui sont bornées et continues sur les parties bornées. A ce sujet on notera que si une application linéaire est continue sur tout disque borné, alors elle est aussi uniformément continue tout disque borné : la continuité en 0 sur le disque $2B$ implique la continuité uniforme sur le disque B.

L'espace $\tilde{L}(E, F)$ des applications linéaires bornées et quasi-continues est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E et de la bornologie des parties équibornées et quasi-équicontinues, ce qui en fait un nouvel espace disqué.

En particulier, lorsqu'on prend pour F le corps de base, on obtient le quasi-dual de l'espace disqué E, qui est un nouvel espace disqué E^v.

6. Espaces quasi-complets.

On rappelle que, dans tous les cas, complet signifie séparé complet, contrairement au choix fait par Bourbaki au chapitre II du livre de topologie. Il est facile de voir que l'espace $L(E, F)$ est complet lorsque E est un ebc et que F est un elc complet[12].

Sinon, dans les espaces disqués, la complétude éclate en deux propriétés. Il y a d'une part les espaces *quasi-complets* et de l'autre les espaces *saturés complets*. Ce sont les derniers qui généralisent les elc complets.

Un espace disqué est dit *quasi-complet* s'il admet un système fondamental de disques bornés qui sont complets pour la structure uniforme induite par la topologie vectorielle de l'espace; on peut bien sûr remplacer les disques par des parties quelconques.

Il est clair que tout espace disqué adapté dont la topologie est complète est quasi-complet. La réciproque est vraie si la bornologie est canonique et la topologie métrisable — car les suites de Cauchy sont bornées.

---

[11] Chapitre III, §3, n°5, corollaire 1, p III-19 et chapitre 2, n°12, p 121, définition 9.

[12] Le Lub de : Houzel 1972, séminaire Banach, chapitre 1, §4, n°4, corollaire de la proposition 10, p 60.

Le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie des espaces quasi-complets dans (dis) admet un foncteur adjoint, qui à un espace disqué associe son *quasi-complété*; c'est le sous-espace du complété topologique engendré par les adhérences des images des disques bornés d'origine; il a la topologie induite et la bornologie dont un système fondamental de disques bornés est constitué des adhérences considérées.

Pour ce qui est des espaces d'applications linéaires, on a l'énoncé suivant.

Théorème 1. Si F est quasi-complet, alors $L(E, F)$ est quasi-complet.

Soit en effet dans $L(E, F)$ un disque H équicontinu et équiborné. Son adhérence dans F^E est l'image d'une partie équicontinue et bornée; on vérifie qu'elle est complète.

Le résultat est donné dans le séminaire Banach sans hypothèse de convexité[13] .

Il figure déjà dans Bourbaki dans le cas des espaces $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ où E, F sont des elc. Dans l'édition de 1955, c'est le théorème principal[14]. Cependant la conclusion n'est pas donnée en ces termes, puisque la quasi-complétude est réservée à la bornologie canonique de $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$, laquelle ne coïncide pas nécessairement avec la bornologie naturelle, celle des parties équicontinues; sauf si E est, par exemple, tonnelé[15].

La situation ne change pas vraiment avec l'édition de 1981 pour l'énoncé principal, mais le corollaire est renvoyé plus loin[16].

Revenons ici sur les **conventions**. Nous avons choisi d'imposer la séparation dans la complétion. Cela vaudrait déjà pour les espaces uniformes. C'est à cette condition que le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie des espaces complets dans celle des espaces uniformes admet un adjoint à gauche. Ce choix est en cohérence avec un autre, celui d'imposer aux bornologies d'être couvrantes. En effet c'est à cette condition que $L(E, F)$ est séparé dès lors que F est séparé et que l'on peut énoncer simplement le théorème 1.

Mentionnons une conséquence importante, attribuée par Grothendieck à Mackey.

Corollaire (Grothendieck). Soit E un ebc. Son bidual est son quasi-complété pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

On dit qu'un espace disqué a une *bornologie complète* si sa bornologie admet un système fondamental de disques bornés *complétants*, i.e. de disques A tels que l'espace vectoriel E_A engendré par A, muni de la jauge de A, soit un espace de Banach.

Théorème 2. Un espace disqué quasi-complet a une bornologie complète.

La démonstration la plus naturelle consiste à vérifier que si E est quasi-complet, alors l'application

$$\mathrm{Hom}(\hat{N}, E) \to \mathrm{Hom}(N, E)$$

est bijective, pour tout espace normé N; c'est facile : une application de l'ensemble de droite se prolonge à $\hat{N}$, puisque c'est aussi le quasi-complété de N, et l'image d'une partie bornée de $\hat{N}$ est dans l'adhérence d'une partie bornée de E, donc bornée.

L'énoncé manque au séminaire Banach, qui ne traite, avec cette preuve, que la bornologie canonique d'un elc complet[17].

---

[13] Chapitre 1, §5, n°2, proposition 6, p 66.

[14] Chapitre III, §3, n°7, théorème 4, p 30.

[15] Chapitre III, §3, n°7, corollaire 2, p 31.

[16] Chapitre III, §3, n°8, proposition 11, p EVTIII-22 et chapitre III, §4, n°8, corollaire 4, p EVTIII-27.

[17] Chapitre 2, n°5, proposition 15, p 101.

Bourbaki en donne une preuve de l'édition de 1955, qui se ramène la suivante[18]. Soit B un disque borné complet (donc séparé) de l'elc E. L'espace E_B est séparé et sa topologie est plus fine que celle de E. Montrons qu'il est complet et considérons-y un filtre de Cauchy, dont on peut supposer qu'il contient B. Il est aussi de Cauchy dans E et admet donc une limite a dans B à ce titre. Il suffit de voir que a adhère au filtre dans E_B; donnons-nous pour cela une boule ϵB où $\epsilon > 0$. On sait que le filtre contient une partie $b + \epsilon B$, laquelle est faiblement fermée; cette partie contient a et alors $a + 2\epsilon B$ appartient au filtre. QED.

L'édition de 1981 présente une démonstration plus simple[19]. Soit (x_n) une suite telle que $x_{n+1} - x_n$ soit dans $2^{-n}B$. Elle a une limite dans E qui appartient à tous les $x_n + 2^{-n+1}B$. QED.

Selon la terminologie du séminaire Banach, on a montré que tout disque borné complet (donc séparé) d'un elc était complétant. C'est un peu plus fort que la conclusion du théorème, laquelle dit seulement que tout disque borné est inclus dans un disque borné complétant. Cependant la précision s'obtiendrait par un argument analogue.

La notation E_A elle-même a été introduite la première fois par Grothendieck dans son cours; elle a été reprise par le séminaire Banach, puis par Bourbaki dans son édition de 1981[20].

Jusqu'à l'édition de 1981, Bourbaki utilise ce qui précède pour montrer que la bornologie du dual d'un elc E est complète. Or cela se voit immédiatement et surtout cela n'a rien d'étonnant. En effet un espace localement est une limite projective d'espaces semi-normés. Son dual bornologique est une limite inductive d'espaces de Banach. Précisément à chaque semi-norme continue p est attaché un espace semi-normé E_p et la boule unité de son dual E'_p est un disque complétant.

En appliquant le théorème de Baire, directement ou par le théorème de Banach-Steinhaus mais toujours dans le cas banachique, il en résulte ceci.

Proposition. Dans un elc, tout disque faiblement borné est canoniquement borné.

Mentionnons quelques conséquences relevant d'une problématique dont on ne parle pas ici; on renvoie pour les détails au chapitre sur la dualité.

Corollaire 1. Si E est un elc et E' son dual, alors les disques fermés bornés canoniques de E sont échangés par polarité avec les tonneaux de l'espace E' faible.

Corollaire 2. Soit $u : E \to F$ un morphisme d'elc. Si son transposé $u' = F' \to E'$ a une image faiblement fermée, le morphisme ${}^bE \to {}^bF$ d'ebc est strict.

7. Bornologies saturées.

Etant donné un espace disqué, deux options de saturation sont offertes : la saturation de la bornologie pour la topologie et la saturation de la topologie pour la bornologie.

Dans le séminaire Banach, la saturation de la topologie est envisagée dans le chapitre 1, alors que la saturation duale de la bornologie l'est au chapitre 3[21].

[18] Chapitre IV, §3, n°4, lemme 1, p 21.

[19] Chapitre III, §1, n°5, proposition 8, p EVTIII.7.

[20] Chapitre III, n°1, démonstration du théorème 1, p 189 et chapitre III, §1, n°5, p EVTIII.7.

[21] Au §5, n°4, pp 67-69 et dans l'introduction, p 118.

La bornologie saturée est très simple : un disque D est borné pour la bornologie saturée, si pour tout voisinage disqué de 0 on peut trouver un disque borné B tel que $D \subset B + V$.

On notera que si la bornologie est saturée, l'adhérence d'un disque borné est encore bornée. On notera aussi que la bornologie canonique est saturée.

Un espace disqué est dit *saturé complet* si sa topologie est complète et sa bornologie saturée.

Dans le séminaire Banach, on définit directement les espaces saturés complets comme les espaces complets pour lesquels tout filtre quasi-borné — i.e. tel que pour tout voisinage V il existe une partie bornée B pour laquelle $B + V$ est dans le filtre — est d'adhérence bornée, ce qui équivaut à la saturation de la bornologie[22].

Le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie des espaces saturés complets dans (dis) admet un foncteur adjoint, qui à un espace disqué associe son *complété saturé*; c'est l'espace localement convexe complété muni de la bornologie obtenue en saturant, dans le complété, les parties bornées d'origine.

Notons une propriété facile et énonçons le théorème principal.

Proposition. Si F est saturé complet, alors $\tilde{L}(E, F)$ l'est aussi.

Théorème 3 (Grothendieck-Gruson). Soit E un espace disqué. L'application naturelle du dual E' dans le quasidual E^v identifie le second au complété saturé (quant à la bornologie) du premier.

On sait déjà que le quasi-dual est à la fois complet et saturé pour la bornologie. Il s'agit alors de voir que E' est dense dans E^v de façon convenable : étant donnés une partie bornée H et un voisinage W de zéro dans E^v, on peut trouver une partie bornée K de E' telle que $H \subset K + W$.

On se donne donc une partie H bornée, i.e. quasi-équicontinue, ainsi qu'un voisinage W de zéro, qu'on peut supposer le polaire d'un disque borné B de E. On peut trouver un voisinage disqué V de 0 tel que $|u(x)| \leq 1$ pour u dans H et x dans $V \cap B$. Ainsi

$$|u| \leq \max(j_V, j_B) \leq j_V + j_B$$

où j_V, j_B sont les jauges de V et B. D'après le lemme de décomposition, on peut écrire $u = v + w$ où les formes linéaires v, w vérifient $|v(x)| \leq 1$ sur V et que $|w(x)| \leq 1$ sur B. Le polaire K de V dans E' est la partie équicontinue, i.e. bornée dans E', cherchée.

On peut aussi utiliser un argument de compacité à la place de la propriété de décomposition mentionnée. En application du théorème des bipolaires[23], on sait que le polaire de l'intersection $V \cap B$ est inclus dans l'enveloppe convexe faiblement fermée de la réunion $V^\circ \cup B^\circ$ des polaires. Elle sera donc incluse dans la somme $V^\circ + B^\circ$ si l'on a montré que cette dernière était faiblement fermée. Pour cela il suffit de savoir que l'un des termes est faiblement compact. Or c'est le cas de V°, puisqu'une partie équicontinue est faiblement relativement compacte.

Le séminaire Banach attribué le théorème à Grothendieck. De fait ce dernier le donne dans sa note déjà citée et dans son cours, pour lequel il se limite à la topologie faible, mais sans jamais considérer la bornologie du quasi-dual[24].

---

22 Chapitre 3, introduction, 1), p 118.

23 Par le corollaire p 53 de l'édition de 1955 ou le scholie de Grothendieck, pp 109-110.

24 Chapitre 3, p 141 et théorème 10, p 128.

Bourbaki reprend l'énoncé pour ses EVT dans l'édition de 1981, en l'attribuant aussi à Grothendieck pour un espace disqué E, mais en oubliant toujours les parties bornées[25]. On y établit en lemme ceci, par polarité comme ci-dessus : dans un elc, étant donnés est une application linéaire u continue sur un disque A et $\epsilon > 0$, on peut trouver une forme linéaire continue x' tel que $|u - x'| \leq \epsilon$[26].

Sachant que E est le dual de E' muni de la topologie faible et de la bornologie des parties équicontinues, on en déduit un résultat caractérisant d'ailleurs les elc complets.

Corollaire (Banach). Une forme linéaire sur le dual E' de l'elc complet E est faiblement continue dès qu'elle l'est sur toute partie équicontinue.

L'énoncé général, pour un elc complet E, est donné, toujours attribué à Banach, dans l'édition de 1955[27].

8. Bornologie saturée de la bornologie fine.

La bornologie saturée de la bornologie fine est la bornologie *précompacte*. En effet une caractérisation de la précompacité d'une partie A est celle-ci : pour tout voisinage (disqué) V de 0, on peut trouver un disque borné F fin tel que A soit incluse dans $F + V$.

Si E est un elc complet, c'est encore la bornologie de type convexe constituée par les disques relativements compacts.

En remplaçant la bornologie de E par cette bornologie saturée, on fait de E un nouvel espace disqué, qui est l'espace intermédiaire ${}^{i}E$.

Dans le cas où E est un espace localement convexe métrisable, on peut décrire autrement cette bornologie. En effet, pour une partie A de E, il y a alors équivalence entre être incluse dans l'enveloppe convexe fermée

- d'une partie précompacte,
- d'une partie compacte,
- d'une suite tendant vers 0.

De plus on peut prendre ces parties ou cette suite dans un sous-espace dense D donné. Enfin il revient au même de dire que la partie A en question est elle-même précompacte.

Il suffit pour cela de connaître le résultat banal suivant : *une partie précompacte de l'elc métrisable E est incluse dans l'enveloppe convexe fermée d'une suite tendant vers* 0 *d'un sous-espace dense donné D.* La démonstration n'utilise pas la convexité locale.

Soient K une partie précompacte et (V_n) une suite fondamentale de voisinages de 0, où $V_0 = E$. On écrit

$$K \subset F_0 + 2^{-1}K_1$$

où F_1 est une partie finie de D et où $K_1 = V_1 \cap (2K - 2F_0)$ est une partie précompacte incluse dans V_1. En itérant le processus on montre que K est dans l'adhérence de la somme des $2^{-n}F_n$, où F_n est une partie finie de $D \cap V_n$, ou encore dans l'enveloppe convexe fermée de la réunion des $2F_n$. Il n'y a plus qu'à ranger les F_n en une suite.

Bourbaki s'intéresse à la comparaison des convergences sur les parties indiquées. Dans l'édition de 1981, il donne la propriété mentionnée, dans le cas localement convexe, comme conséquence de caractérisation de la topologie intermédiaire sur le dual de E[28].

[25] Chapitre III, §3; n°6, théorème 1, p EVT III.20.

[26] Chapitre III, §3, n°6, lemme 1, p EVTIII.20.

[27] Chapitre IV, §2, n° 5, théorème 4, p 71.

[28] Chapitre IV, §3, n°5, corollaire 1, p IV.24.

9. Topologies saturées.

La saturation de la topologie est un peu plus compliquée à décrire; elle fait passer de la quasi-continuité à la continuité.

Si la catégorie (dis˜) est définie avec les espaces disqués et les applications linéaires quasi-continues, à la saturation de la topologie correspond un foncteur adjoint s du foncteur naturel de (dis) dans (dis˜). Autrement dit, on a une application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{dis}\tilde{\ })}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{(\mathrm{dis})}({}^sE, F)$$

bijective.

Concrètement, la topologie saturée sur E est aussi bien décrite des différentes façons qui suivent. C'est

(a) la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications linéaires quasi-continues à valeurs dans un espace disqué (resp. un espace localement convexe, un espace normé);

(b) la topologie localement convexe la plus fine induisant sur chaque disque borné B la topologie de E (ou une topologie moins fine);

(c) celle dont les voisinages disqués de 0 sont les disques D tels que pour tout disque borné B on puisse trouver un voisinage disqué V de 0 tel que $D \supset V \cap B$;

(d) celle dont les semi-normes continues sont les semi-normes p telles pour tout disque borné B, on puisse trouver une semi-norme continue q vérifiant $p \leq \max(q, j_B)$ (respectivement $p \leq q + j_B$), où j_B est la jauge de B.

Les vérifications sont banales. On notera E_a, E_b, E_c, E_d les différents elc ainsi obtenus. On voit d'abord que $E_c = E_d$ car $D \supset V \cap B$ équivaut à $j_D \leq \max(j_V, j_B)$; on passe à la somme en remplaçant au besoin B par $2B$ pour récupérer $V/2$ au lieu de V.

Ensuite l'application identique de E dans E_b étant quasi-continue, elle est continue de E_a dans E_b.

Si f est une application quasicontinue de E dans un elc F, alors f est continue pour la topologie définie par (c) ou (d); l'application identique est continue de $E_c = E_d$ dans E_a.

Enfin la topologie définie par (c) ou (d) induit la topologie donnée sur chaque disque borné B; l'application identique est continue de E_b dans $E_c = E_d$.

On note encore que les parties H équicontinues pour la topologie saturée sont caractérisées par le fait que

$$\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V) \cap B$$

est un voisinage de 0 pour tout voisinage V de 0 et toute partie bornée B. Ce sont les parties quasi-équicontinues.

Si (B_α) est un système fondamental de disques bornés, alors un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie saturée est donné par les enveloppes convexes des ensembles

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \cap B_\alpha$$

où les U_α sont des disques ouverts.

Si la bornologie de E admet une suite fondamentale (B_n) de disques bornés, alors un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie saturée est aussi donnée par les sommes

$$\sum_n (V_n \cap B_n)$$

où V_n est une suite de voisinages disqués de 0. En effet ne partie de la forme indiquée est disquée et vérifie la condition (c). Inversement si D est un voisinage disqué de 0 pour la topologie saturée, alors chaque $2^{-n}D$ contient $V_n \cap B_n$ pour un voisinage disqué de 0 convenable et alors D contient leur somme.

Dans certains cas cependant, la topologie saturée est plus facile à décrire.

Proposition. Si la bornologie de E admet une suite fondamentale (B_n) de disques bornés qui sont compacts, alors toute partie A qui les rencontre suivant une partie fermée (donc compacte) est elle-même fermée pour la topologie saturée.

Autrement dit, l'espace ${}^sE$ est la limite inductive topologique des B_n.

La preuve est simple. Soit a un point qui n'est pas dans A; on peut toujours supposer que $a = 0$ et que B_0 est réduit à 0.

Partant de $V_0 = B_0$, on construit par récurrence une suite croissante (V_n) de disques compacts ne rencontrant pas A, où V_n est un voisinage de 0 dans B_n. Supposons V_n construit. Alors V_n et $A \cap B_{n+1}$ sont des parties compactes disjointes. Considérons un voisinage disqué fermé U_{n+1} de 0 tel que $V_n + U_{n+1}$ ne rencontre pas $A \cap B_{n+1}$. On prend simplement $V_{n+1} = (V_n + U_{n+1}) \cap B_{n+1}$.

La réunion des V_n est un disque qui induit un voisinage de 0 sur chaque B_n; c'est donc un voisinage de 0 pour la topologie saturée.

Le résultat est dans le séminaire Banach (Chapitre 3, III, 3), théorème 3 (Banach-Dieudonné)). L'espace E est le dual faible d'un elc métrisable et les B_n sont les polaires d'une suite fondamentale de voisinages de 0.

Bourbaki, dans l'édition de 1955, donne le même résultat pour une partie convexe (chapitre IV, §2, n°6, corollaire 2, p 74).

Cependant, dans le théorème classique de Banach-Dieudonné, la conclusion est que la partie A est faiblement fermée; là on a besoin de la convexité de A et du fait que E est complet pour la topologie métrisable duale de la bornologie de E.

10. La dualité disquée.

Toutes les dualités sont disquées, même si cela n'apparaît pas toujours de façon évidente. Cependant la question de la dualité n'est posée en ces termes que dans le séminaire et l'article d'Houzel déjà cités.

Commençons par la **dualité disquée insaturée**. On se donne deux espaces vectoriels E, F en dualité, ainsi que des bornologies de type convexe $\mathfrak{b}$ sur E et $\mathfrak{m}$ sur F. On impose à ces dernières d'être compatibles dans le sens que la dualité est bibornée : l'image par la dualité du produit de deux parties bornées est bornée.

On associe à ces bornologies les topologies duales β sur F et μ sur E, ce que l'on résume dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \times & F \\ \mu, \underline{\mathfrak{b}} & & \beta, \underline{\mathfrak{m}} \end{array}$$

où l'on a souligné les données initiales.

Proposition. Si l'une des bornologies est précompacte (pour la topologie duale de l'autre), alors le dual de chaque facteur s'identifie au *quasi-complété* de l'autre.

On remarquera que si l'une des bornologies est précompacte, alors l'autre l'est également. C'est simplement l'application du théorème d'Ascoli, puisque chaque partie bornée est équicontinue.

La situation présentée comprend, comme cas particulier, celle considérée par le cours de Grothendieck et pour laquelle on se donne seulement $\mathfrak{m}$. Dans ce cas $\mathfrak{b}$ est la bornologie fine $\mathfrak{s}$, qui est évidemment précompacte. La conclusion est alors que le dual de E est le quasi-complété faible de F. Grothendieck attribue le théorème à Mackey[29].

A fortiori elle comprend la situation considérée par Bourbaki, dans laquelle on se donne une topologie localement convexe μ sur E et on se demande si F s'identifie au dual de E. Dans un tel cas, si $\mathfrak{m}$ est la bornologie duale de la topologie μ, alors μ est duale de $\mathfrak{m}$, ce qui nous ramène à la situation de Grothendieck. La conclusion est que F s'identifie au dual de E si et seulement s'il est faiblement quasi-complet, ce qui signifie que μ est la topologie de la convergence uniforme sur des disques faiblement complets, ou encore faiblement compacts si le corps de base est localement compact. C'est le théorème que Bourbaki attribue à Mackey, dans l'édition de 1952 par exemple[30].

La démonstration se ramène au cas envisagé par Grothendieck. En effet, compte-tenu de l'hypothèse de précompacité, la topologie de l'espace complet $(F_{\mathfrak{m}})'$ induit la topologie faible sur les disques bornés.

Envisageons maintenant la **dualité disquée saturée**. On reprend la situation précédente. Cependant on y remplace le dual par un quasi-dual.

Corollaire. Si l'une des bornologies est précompacte (pour la topologie duale de l'autre), alors le quasi-dual de chaque facteur s'identifie au *complété saturé* de l'autre.

Ce n'est que l'application du théorème de Grothendieck-Gruson cité plus avant. En effet le complété saturé est déjà quasi-complet.

Par exemple, le quasi-dual de l'espace F est encore le dual de l'espace saturé ${}^{s}F$. Cet espace sera appelé l'espace *intermédiaire* et la topologie saturée qui l'équipe également appelée *intermédiaire*. Cette terminologie a été introduite dans la première (Urredaktion) des EVT de Bourbaki, pour être abandonnée ensuite.

En particulier, si E est complet c'est le dual de ${}^{s}F$. C'est mieux que de savoir que c'est le dual de F. Dans le cas où F a la topologie faible, cette dernière propriété serait en effet automatique.

La situation présentée comprend cette fois-ci celle considérée par Grothendieck dans son cours et pour laquelle on se donne pour $\mathfrak{b}$ la bornologie fine. Comme pour son théorème, il oublie les parties bornées du quasi-dual. La conclusion est alors que le complété de E s'identifie à l'espace des formes linéaires sur F qui sont continues sur les parties bornées[31]. Il place ces considérations dans le cadre de la "complétion d'un elc", ce qui est plus heureux que de parler du "complété d'un dual".

L'édition de 1955 de Bourbaki considère le cas où l'espace F est le dual faible d'un espace localement convexe E, lequel se ramène au précédent.

---

[29] Chapitre II, n°12, théorème 7 (Mackey), p 119.

[30] Chapitre IV, §2, n°3, théorème 2 (Mackey), p 68.

[31] Chapitre II, n°14, théorème 10.

L'édition de 1981 ajoute seulement, mutatis mutandis, la situation mentionnée à propos des bornologies saturées, où l'espace E est déjà le dual d'un espace disqué F. Elle ne s'inscrit pas dans la problématique de la dualité saturée cherchant à faire de E un dual; sauf si F a la topologie faible, comme dans l'édition de 1955. A l'inverse, le cas normé ne se ramène évidemment pas à notre présentation, mais l'énonce est alors vide.

Maintenant le quasi-dual de F, qui est le complété saturé de E, a la bornologie saturée d'une bornologie précompacte, donc cette dernière, qui est encore compacte.

Corollaire. Sous les hypothèses mentionnées, la topologie intermédiaire sur un facteur est duale de la bornologie précompacte sur le complété de l'autre.

Dès les premières rédactions et l'édition de 1955, la propriété pour la topologie intermédiaire de F fait partie de l'ensemble constitué par le théorème de Banach-Dieudonné lorsque E est un elc métrisable et F son dual[32]. Compte-tenu de la métrisabilité, on dispose d'autres caractérisations et de propriétés connexes, dont on en a parlé.

11. Quelques classes particulières d'espaces.

On ne cherche ici qu'à présenter quelques exemples fondamentaux, en faisant apparaître des classes essentiellement disjointes. D'ailleurs c'est cette disjonction, souvent synonyme d'un énoncé de finitude, que certains, comme Schapira, retiendront comme le seul apport incontournable de l'Analyse fonctionnelle.

Il n'y a, en gros, que trois classes d'espaces linéaires, une classe d'elc, une d'ebc et entre les deux une classe d'espaces disqués.

La première classe est celle des espaces localement convexes métrisables. Elle contient elle-même deux sous-classes, disjointes modulo les espaces de dimension finie.

D'abord celle des espaces normés, ou celle des espaces de Banach si l'on se limite aux espaces complets.

Ensuite celle des espaces de Fréchet-Schwartz, à savoir des limites projectives d'une suite d'espaces de Banach reliés par des applications linéaires compactes; dans cette dernière, les espaces de Fréchet nucléaires, pour lesquelles les morphismes de transition ne sont plus seulement compacts mais nucléaires, tiennent la première place.

La seconde classe est duale de la première. C'est celle des espaces bornologiques de type convexe à base dénombrable de parties bornées. On y trouve les duaux des espaces localement convexes métrisables. Cette classe contient elle-même deux sous-classes, disjointes modulo les espaces de dimension finie.

D'abord une nouvelle fois celle des espaces normés ou de Banach.

Ensuite celle des limites inductives d'une suite d'espaces de Banach avec des morphismes de transition compacts, voire nucléaires. Elle ne recoupe celle des espaces métrisables qu'en dimension finie.

Entre les deux on trouve d'autres topologies localement convexes, mais qui sont en général assorties de bornologies. Autrement dit on trouve des espaces disqués.

La topologie peut être une topologie faible insaturée, en dualité avec une bornologie fine. On obtient une classe qui ne recoupe celle des topologies métrisables que dans le cas d'une dualité avec un espace de dimension algébrique dénombrable.

La topologie peut aussi être une topologie faible saturée, en dualité avec une bornologie précompacte.

[32] Chapitre IV, §3, n°5, proposition 7, p 73.

Prenons un exemple simple et fondamental, celui de l'espace de Fréchet-Schwartz $\mathcal{D}_K$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ à support dans $K = [a, b]$ et de son dual $\mathcal{D}'_K$, muni de la bornologie duale de la topologie de $\mathcal{D}_K$, celle des parties équicontinues, bornologie qui est complète. Suivant le schéma que nous avons adopté pour la dualité, on fait de $\mathcal{D}'_K$ un espace disqué en lui ajoutant la topologie faible.

Il y a deux notions de convergence dans $\mathcal{D}'_K$. La convergence naturelle, au sens de Mackey, pour laquelle on peut se limiter aux suites, la suite T_n tendant vers 0 si $T_n = \epsilon_n U_N$, où la suite U_n est bornée et où la suite de scalaires ϵ_n tend vers 0. Et il y a la convergence faible, c'est-à-dire simple.

On sait que les morphismes structuraux de la limite projective $\mathcal{D}_K$ sont, par le théorème d'Ascoli, des applications compactes. Autrement dit l'espace $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet-Schwartz. De fait il est même nucléaire. En conséquence, pour une suite bornée — i.e. équicontinue — de $\mathcal{D}'_K$, la convergence faible implique la convergence naturelle.

Par ailleurs une suite de $\mathcal{D}'_K$ qui converge faiblement est équicontinue, donc convergente dans $\mathcal{D}'_K$. C'est le théorème de Banach-Steinhaus dans son cadre classique, celui des espaces de Fréchet.

Maintenant l'espace $\mathcal{D}$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_K$. Il n'est pas nécessaire d'expliciter cette limite pour définir le dual $\mathcal{D}'$, qui sera toujours la limite projective des $\mathcal{D}'_K$, ni pour parler de convergence dans ce dual.

Cela étant, *une partie bornée de $\mathcal{D}$ est une partie canoniquement bornée dans un* $\mathcal{D}_K$ et *une partie bornée de $\mathcal{D}'$ est une partie qui est équicontinue sur chaque $\mathcal{D}_K$.*

La meilleure façon de penser l'espace $\mathcal{D}$ est de le laisser comme système inductif d'espaces de Fréchet. Cependant si l'on tient absolument à lui donner une structure, il n'est pas possible d'imaginer plus simple que ce que nous venons de faire, qui consiste à prendre la limite bornologique.

Paradoxalement on doit aussi privilégier la bornologie sur $\mathcal{D}'$, à l'encontre du principe suivant lequel on échange topologies et bornologies par dualité.

Sur le dual de $\mathcal{D}_K$, c'est clairement la bornologie qui est naturelle. Celui de $\mathcal{D}$ est donc donné, a priori, comme une limite projective de tels espaces. Si l'on cherche à le munir d'une structure, c'est encore la bornologie qu'il faut choisir, laquelle reste facile à décrire. Quand on l'enrichit en lui adjoignant la topologie faible, on fait de $\mathcal{D}'$ ce qu'il convient d'appeler un **espace faible**.

L'espace $\mathcal{D}'$ est complet pour la bornologie. Il est aussi quasi-complet comme espace disqué, ce qui est a priori plus fort. C'est en effet le dual de l'espace $\mathcal{D}$ auquel on a adjoint la bornologie fine. On noterait que les parties bornées de $\mathcal{D}'_K$ sont métrisables et que sa quasi-complétude s'exprime avec des suites.

Ce petit exemple est là pour montrer qu'il ne faut sans doute pas se battre pour expliciter des structures, ni privilégier l'une ou l'autre. Il montre aussi qu'il n'y a en général pas à considérer plusieurs topologies sur le même espace, mais plutôt deux structures à la fois. Y a-t-il donc des cas où il faille introduire une topologie *affaiblie*? On peut en douter. Quant à la vision géométrique de Trèves, ne faut-il pas y voir d'abord une vision originale et enrichissante, sans y chercher une alternative à la multiplication des topologies sur un espace donné?

D'autres types d'espaces fonctionnels.

Nous abandonnons ici la contrainte, partagée avec Bourbaki, de tout fonder sur des structures. Nous avons dit que $\mathcal{D}$ devait se comprendre comme un système inductif d'espaces de Fréchet. En fait c'est, plus précisément, un objet de la catégorie (if), celle des ind-objets de la catégorie (f) des espaces de Fréchet. La catégorie (if) est la sous-catégorie des foncteurs contravariants de (f) dans la catégorie (ens) des ensembles, qui sont des limites inductives *filtrantes* d'objets de (f).

On définit un foncteur b de la catégorie (if) dans la catégorie (ebcs) des espaces bornologiques de type convexe séparés en prenant la limite inductive dans (ebc) des espaces bornologiques associés aux termes. On dispose aussi d'un adjoint j de ce foncteur. Si E est un espace bornologique de type convexe séparé, on regarde les applications linéaires bornées injectives $F \to E$ d'un espace de Fréchet F dans E — ce qui revient à considérer les sous-espaces munis d'une structure d'espace de Fréchet plus fine que la structure de E. Le point important est que si $F \to E$ et $G \to E$ sont de telles applications, alors on peut les factoriser à travers une troisième $H \to E$. On prend pour H une somme amalgamée

$$(F \times G)/\Delta$$

où Δ est la diagonale, fermée grâce à l'hypothèse de séparation de E. On envoie H dans E par l'aplication qui à (x, y) associe $x - y$.

Une chose remarquable est qu'une dualité abstraite entre des espaces vectoriels E et F, dualité séparant les points de E, fait naturellement de E un objet de type (if). On peut prendre le dual E' de E, qui est un objet de la catégorie (pf) des pro-objets de la catégorie des duaux d'espaces de Fréchet, mais aussi le dual bornologique. On noterait que remplacer F par E' ne change pas l'objet de (if) associé à E.

Ainsi la dualité entre l'espace $\mathcal{D}$ et un autre espace, comme $\mathcal{D}$ lui-même ou L^1_{loc}, est-elle emblématique de la situation générale.

Les espaces de Fréchet jouent un rôle important pour plusieurs raisons. D'abord ils sont normaux et les applications linéaires sont indifféremment continues ou bornées, la continuité étant plus simple et la bornitude mieux adaptée à la dualité et aux limites inductives. Ensuite le quotient d'un espace de Fréchet par un sous-espace fermé est complet, ce qui n'est pas vrai pour un espace localement convexe général.

On noterait qu'en appliquant les foncteurs b et j à un espace de type $(\mathcal{LF})$ comme $\mathcal{D}$, on retrouve l'espace de départ. C'est le théorème de Banach pour les espaces de Fréchet.

§10 Appendice : question de noyaux

Il ne faut pas regarder très longtemps les rédactions pour se rendre compte que l'orientation donnée au second volume des EVT de bourbaki doit beaucoup à Schwartz et très peu à Grothendieck. Jacques Dixmier l'a confirmé : Schwartz avait besoin d'un outil pour démontrer les théorèmes sur les distributions qu'il visait avec, en premier lieu, le théorème des noyaux. Accessoirement il avait aussi besoin d'un cadre pour les énoncer. Jean-Louis Ovaert s'est montré encore plus catégorique : les EVT de Bourbaki sont issus des premiers séminaires Schwartz.

Penchons-nous donc sur le fameux théorème des noyaux de Schwartz. Ce dernier a d'abord été annoncé au congrès international de 1950 tenu à Cambridge aux USA[1]. Une rédaction détaillée figure dans un article paru plusieurs années plus tard[2]. Entretemps l'annonce de cette publication était faite dans le Séminaire Schwartz de l'année 1953/1954 intitulé "Produit tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications."[3]. Précisément les exposés 9, 10, 11, qui sont un travail personnel de Schwartz, en traitent. Avant d'aller plus loin, on aura noté que le terme "topologique" se trouve trois fois dans le titre, ce qui ne laisse guère d'ambiguïté sur le cadre choisi.

Cependant le séminaire en question avait pour principal objet d'exposer la thèse de Grothendieck sur les produits tensoriels topologiques. Autrement dit les démonstrations dont nous avons parlé sont peut-être inspirées par cette thèse. De fait les produits tensoriels projectif π et injectif ϵ y sont mentionnés. Quelle était donc la première démonstration de Schwartz? Y a-t-il eu des séminaires à Nancy où auraient été exposés des travaux antérieurs sur le sujet? A ces questions nous ne savons pas répondre. C'est une fiction historique que nous allons donc produire.

1. Le théorème des noyaux.

Dans la suite $X = \mathbf{R}^m$ et $Y = \mathbf{R}^n$. Un *noyau-distribution* sur $X \times Y$ est simplement une distribution N, i.e. un élément du dual topologique $\mathcal{D}'_{x,y}$ de $\mathcal{D}_{x,y} = \mathcal{D}(X \times Y)$. On lui associe par

$$\langle N(x,y), \phi(x)\psi(y)\rangle$$

une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$ où $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}_y = \mathcal{D}(Y)$; ou encore, ce qui revient au même, une application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ dans le dual $\mathcal{D}'_y$ de $\mathcal{D}_y$.

Le théorème des noyaux en est la réciproque. Toute application bilinéaire continue sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$ est définie par un tel noyau; il suffit même de la continuité séparée. D'une autre façon, toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{D}'_y$, voire toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ fort dans $\mathcal{D}'_y$ faible, est donnée par un noyau.

Ainsi les noyaux-distributions offrent-ils un cadre dans lequel on peut mettre les applications linéaires du tout petit espace $\mathcal{D}_x$ dans le très grand espace $\mathcal{D}'_y$. L'hypothèse de continuité est même affaiblie autant qu'on puisse l'imaginer. C'est spectaculaire.

[1] Schwartz 1950.

[2] Schwartz 1955.

[3] Schwartz 1954.

2. Un problème plus simple.

On se doute que ce théorème ne peut pas reposer exclusivement sur des constructions abstraites. Cependant, pour identifier les ingrédients d'Analyse sur lesquels la question repose, nous allons d'abord considérer une première étape, dans laquelle tout se passe sur des parties compactes.

Soient K, L des parties compactes de X, Y, qu'on pourra éventuellement supposer être des boules pour simplifier. On désigne respectivement par $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}_L$ les sous-espaces des fonctions de $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ à support dans K, L, i.e. des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, Y, nulles en dehors de K, L. Ce sont des espaces de Fréchet, limites projectives des espaces de Banach $\mathcal{C}^k_K$, $\mathcal{C}^k_L$, pour lesquels la classe $\mathcal{C}^\infty$ est remplacée par la classe $\mathcal{C}^k$. Ils sont munis de semi-normes du type

$$\|\phi\|_k = \max_I \|\partial_I \phi\|_\infty$$

où la sommation porte sur tous les multi-indices I de longueur $\leq k$. De la même façon que pour un noyau distribution général, à une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{K\times L}$ on associe une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_L$. Inversement nous cherchons à montrer qu'une telle forme bilinéaire peut être représentée par une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{K\times L}$.

L'unicité de la représentation dans $\mathcal{D}_{K\times L}$ est facile, mais elle sera très importante pour recoller les morceaux. En effet $\mathcal{D}_K \otimes \mathcal{D}_L$ est dense dans $\mathcal{D}_{K\times L}$. On le voit en deux temps : 1) en diminuant un peu le support $K \times L$; 2) en convolant avec des fonctions $\phi(x)\psi(y)$ où ϕ, ψ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à petit support. Pour le temps 1), on peut effectuer une petite contraction si le support est une boule; dans le cas général, on tronque par la fonction indicatrice de l'ensemble des points à une distance $\geq \epsilon$ du complémentaire, fonction que l'on aura régularisée par convolution.

Passons à l'existence. On constate qu'une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_L$ s'étend à un $\mathcal{C}^k_K \times \mathcal{C}^k_L$. D'abord, par définition de la topologie limite projective, ou de la topologie produit qui la génère, la forme est continue pour des normes $\| \,.\|_k$. Ensuite les espaces $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}_L$ sont respectivement denses dans $\mathcal{C}^k_K$, $\mathcal{C}^k_L$: on régularise, comme plus haut, en réduisant K, L et en convolant avec une fonction de $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ à petit support.

Cherchons donc une forme linéaire sur un $\mathcal{C}^l_{K\times L}$ représentant la forme donnée.

Un cas particulier. On va commencer par considérer une forme bilinéaire qui est la restriction à $\mathcal{C}_K \times \mathcal{C}_L$ d'un produit tensoriel

$$T_x \otimes T_y$$

de formes linéaires continues T_x, T_y sur $\mathcal{C}^k_K$, $\mathcal{C}^k_L$. Il va s'agir de la représenter par une forme linéaire continue $T_{x,y}$ sur un $\mathcal{C}^l_{K\times L}$. En le faisant on veut que l ne dépende que de k et que $T_{x,y}$ reste dans une partie bornée quand T_x, T_y restent dans des parties bornées aussi. Ici on travaille dans des espaces normés : les parties sont bornées au sens de la norme.

Le cas général. Il sera alors facile de passer à une forme bilinéaire du type

$$\sum_i \lambda_i T_{x,i} \otimes T_{y,i}$$

où la suite (λ_i) est dans l^1 et où les suites $T_{x,i}$, $T_{y,i}$ sont bornées. Il restera à montrer que l'on peut exprimer une forme bilinéaire continue quelconque sur $\mathcal{C}^k_K \times \mathcal{C}^k_L$, quitte à changer la valeur de k.

3. Un ingrédient d'analyse.

La dualité est plus facile à traiter avec des espaces hilbertiens. On le sait depuis Riesz et son théorème de représentation, lequel est très antérieur aux travaux de Banach.

Sachant cela, on va remplacer les espaces $\mathcal{C}^k_K$, $\mathcal{C}^k_L$ par les espaces de Sobolev H^k_K, H^k_L des fonctions nulles hors de K, L dont les dérivées jusqu'à l'ordre k — au sens des distributions — sont des fonctions de L^2. Le remplacement est licite grâce au *théorème de plongement de Sobolev*

$$H^s \to \mathcal{C}^k$$

qui vaut pour $s > k + d/2$, où d est la dimension.

Cet énoncé est incontestablement dû à Sobolev, qui l'a publié en 1938 en russe dans le Mat. Sbornik[4]. Ici nous n'avons pas besoin des exposants fractionnaires, ni de certains raffinements ultérieurs. La définition des espaces de Sobolev et le théorème de plongement reposent sur la transformation de Fourier et le théorème de Plancherel. Par exemple, en dimension 1, si f est dans H^1, alors $\hat{f}$ et $\xi\hat{f}$ sont dans L^2, de sorte que $\hat{f}$ est dans L^1 et que f est continue.

Ainsi le problème de représentation est-il transformé en celui-ci : représenter la restriction à $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_L$ d'une forme bilinéaire continue sur $H^s_K \times H^s_L$ par une forme linéaire continue sur un certain $H^t_{K\times L}$, avec les conditions déjà considérées.

Le cas particulier. Commençons par une forme du type $T_x \otimes T_y$ où T_x, T_y sont des formes linéaires continues sur H^s_K, H^s_L. Par transformation de Fourier, on exprime $T_x(f)$, $T_y(g)$ sous la forme $\langle F_x, \hat{f}\rangle$, $\langle F_y, \hat{g}\rangle$ dans $L^2((1+|\xi|^2)^s d\xi)$, $L^2((1+|\eta|^2)^s d\eta)$. Alors

$$\int\int \bar{F}_x(\xi)\bar{F}_y(\eta)\hat{h}(\xi,\eta)((1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^s d\xi d\eta$$

a un sens pour $\hat{h}$ dans $L^2((1+|\xi|^2+|\eta|^2)^t d\xi d\eta)$ et fournit $T_{x,y}$ dès que $t \geq 2s$.

Le cas général. Maintenant, il résulte du théorème de plongement que l'injection

$$H^t \to H^s$$

est nucléaire dès que $t > s + d$. Dans l'application qui nous intéresse, où H^s va être plongé dans $\mathcal{C}^k_K$, on n'est pas obligé de prêter attention aux conditions de support : si l'on part de H^t_K on peut se ramener dans H^s_K en composant avec la projection de H^s sur le sous-espace fermé H^s_K.

Voyons comment conclure. Une forme bilinéaire continue sur $H^s_K \times H^s_L$ étant donnée, on lui associe un opérateur continu $H^s_K \to H^s_L$, d'où, en composant avec l'injection précédente un opérateur nucléaire $H^t_K \to H^s_L$, qui s'écrit

$$\sum_i \lambda_i e_i^* f_i$$

où (e_i), (f_i) sont de norme ≤ 1 dans H^t_K, H^s_Let où (λ_i) est dans l^1. La forme bilinéaire associée s'écrit

$$\sum_i \lambda_i e_i^* \otimes f_i^*$$

et la démonstration est achevée.

[4] Sobolev 1938.

La preuve de la nucléarité. En fait l'injection est un opérateur de Hilbert-Schmidt dès que $t > s + d/2$ et le produit de composition de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur à trace, ce qui, dans le cas hilbertien, équivaut à être nucléaire.

Le premier énoncé est attribué à Krzystof Maurin[5] et daté de 1961 par Robert Adams dans son ouvrage "Sobolev Spaces"[6].

De fait le théorème de plongement permet de décomposer cet opérateur en un produit

$$H^t \xrightarrow{P} C^s \xrightarrow{J} H^s$$

où P, J sont des injections canoniques; on voit alors qu'il est de Hilbert-Schmidt. Voici comment on peut présenter simplement ce fait, pour $s = 0$ et des fonctions à support borné. Si (e_i) est une base orthonormée de H^t, on a

$$\sum |Pe_i(x)|^2 = \sum |\langle \delta_x, Pe_i\rangle|^2 = \sum |\langle P^*\delta_x, e_i\rangle|^2 = \|P^*\delta_x\| \leq \|P\|^2$$

et

$$\sum \|JPe_i\|^2 \leq C\|P\|^2 \ .$$

Le second énoncé est clair. Si l'on a deux opérateurs de Hilbert-Schmidt

$$H_1 \xrightarrow{A_1} H_2 \xrightarrow{A_2} H_3$$

alors

$$A_2A_1f = \sum \langle e_i, A_1f\rangle A_2e_i = \sum \langle A_1^*e_i, f\rangle A_2e_i$$

où (e_i) est une base orthonormée de A_2 et

$$\sum \|A_1^*e_i\|\|A_2e_i\| \leq \frac{1}{2}(\|A_1^*\|^2 + \|A_2\|^2)$$

et A_2A_1 est à trace.

4. Le contexte de 1950.

Le retentissement des travaux de Sobolev a été considérable; il suffit de constater leur influence sur l'école américaine de l'immédiate après-guerre. Le théorème de plongement ne pouvait pas être ignoré au début des années 50, ni par Schwartz, ni par les membres de Bourbaki.

Pour ce qui est de la nucléarité de l'injection $H^t \to H^s$, plus précisément le fait que ce soit un *opérateur à trace*, car le qualificatif *nucléaire* est de Grothendieck, il serait étonnant qu'on n'en ait rien su avant 1961. Cela resterait à vérifier.

En effet, dans le cas d'un support compact et si l'on n'est pas trop exigeant sur les exposants, cette nucléarité n'est pas très difficile. Par exemple, en dimension 1, si f est dans H^2 à support dans $K = [0,1]$ on peut en faire une fonction 1-périodique qu'on représente sur K par la série de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{1+4\pi^2n^2} c_n(f - f'')e^{2\pi int}$$

et l'on obtient ainsi la nucléarité de l'injection de H^2_K dans H^0.

---

5 Maurin 1961

6 Adams 1975.

Le cas particulier en version non hilbertienne. En fait il semblerait que Schwartz ait eu une autre stratégie pour représenter $T_x \otimes T_y$. Son idée était de définit $T_{x,y}$ à partir de

$$\langle T_x \langle T_y, \phi(x,y)\rangle\rangle$$

ce qui l'amenait à considérer des fonctions différentiables à valeurs vectorielles. C'est par exemple ce que l'on trouve dans son cours de vulgarisation de MMP[7]. Ici il faut supposer ϕ de classe $\mathcal{C}^{2k}$ pour espérer que $\langle T_y, \phi(x,y)\rangle$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ en x.

De façon élémentaire. On ne voit pas bien ce qui empêcherait de travailler sur des duaux d'espaces normés sans chercher à interpréter leurs éléments. Par exemple, on peut passer à la limite dans

$$\frac{1}{h}\langle T_y, \phi(x+he_i,y) - \phi(x,y)\rangle = \langle T_y, \frac{1}{h}(\phi(x+he_i,y) - \phi(x,y))\rangle$$

si T_y est continue sur $\mathcal{C}^k_L$ et si ϕ est dans $\mathcal{C}^{k+1}_{K\times L}$, pour obtenir l'existence d'une dérivée partielle continue

$$\partial_{x_i}\langle T_y, \phi(x,y)\rangle = \langle T_y, \partial_{x_i}\phi(x,y)\rangle \ .$$

La propriété de représentation souhaitée suit alors facilement.

Ou avec des distributions. Maintenant il est probable que Schwartz préférait travailler avec de vraies distributions. Cela n'empêche pas de se limiter à un support K, quitte à devoir un peu l'élargir. On sait que T_x, T_y proviennent de distributions d'ordre k à support dans K, L (non uniques). Pour $k=0$ ce sont des mesures μ_x, μ_y. Il suffit de prendre la mesure $\mu_x \otimes \mu_y$, ce qui revient à considérer

$$\int\int \phi(t,u)d\mu_x(t)d\mu_y(u) \ .$$

Maintenant, si l'on sait représenter $T_x \otimes T_y$ par une forme linéaire continue $T_{x,y}$ sur $\mathcal{C}^k_{K\times L}$, sans condition de support, alors on sait aussi le faire pour une dérivée au sens des distributions $\partial_{x_i}T_x \otimes T_y$. Il suffit de prendre la distribution définie par

$$-\langle T_{x,y}, \partial_{x_i}\phi(x,y)\rangle \ .$$

En dimension 1, de proche en proche, après k dérivations d'un côté et autant de l'autre, on atteint ainsi l'ordre k pour T_x et T_y. Ainsi aura-t-on pu trouver un représentant $T_{x,y}$ d'ordre $2k$. On peut aussi noter qu'on peut choisir un représentant qui varie dans une partie bornée lorsque c'est le cas pour T_x et T_y. Là il faut être un plus soigneux. Par exemple on gagne un cran pour k en remplaçant T_x par

$$\langle T_x, -\rho(x)\int_a^x \phi(t)dt\rangle$$

où ρ est une fonction plateau convenable.

A plusieurs variables, la dérivée ∂_x serait remplacée par l'opérateur de Laplace Δ_x en x. Pour passer d'une distribution d'ordre k à une distribution d'ordre 0, on convolerait avec la solution élémentaire de l'opérateur de Laplace itéré Δ^k. Un tel argument figure dans l'exposé 11 du Séminaire Schwartz cité. Il fait passer de l'espace dual $(\mathcal{E}^m_x)'$ à l'espace dual $(\mathcal{E}^0_x)'$ pour k assez grand.

[7] Schwartz 1959.

Le cas général en version non hilbertienne. Maintenant, pour représenter une forme bilinéaire continue générale, Schwartz n'utilisait pas la nucléarité. Dans son séminaire de 1953 il travaillait seulement avec le produit tensoriel injectif ϵ, ne faisant allusion à cette nucléarité qu'à la fin de l'exposé 11, après avoir établi le théorème des noyaux. Cela étant, l'utilisation du produit ϵ semble déjà avoir été fortement inspirée par la thèse de Grothendieck. A l'inverse on comprend l'origine de cette thèse, qui aurait pu aboutir à une clarification définitive du sujet.

En fait c'est par régularisation que Schwartz procède, pour se ramener notamment à une application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ dans $(\mathcal{E}_y^0)'$. Or la régularisation contient peut-être implicitement des factorisations par le plongement de H^s dans $\mathcal{C}^k$.

Une approche élémentaire. On noterait qu'en une variable et pour $K = [0, 1]$, il suffit de serrer d'un peu plus près les exposants pour constater que l'injection canonique

$$\mathcal{C}_K^2 \to \mathcal{C}_K^0$$

est nucléaire. Or cela peut se démontrer simplement et directement, sans la moindre référence aux espaces de Hilbert et à l'analyse de Fourier. Par exemple, on peut interpoler et approcher de proche en proche une fonction f de $\mathcal{C}_K^2$ par des fonctions continues affines par morceaux à support dans K, en coupant les intervalles en deux et en modifiant la valeur au centre à chaque étape, jusqu'à faire apparaître f comme la somme d'une série du type

$$\sum_{p\geq 0}\sum_{0\leq n<2^p}[2f((n+\frac{1}{2}).2^{-p}) - f(n.2^{-p}) - f((n+1).2^{-p})]\delta(2^p.x - n - \frac{1}{2}))$$

où $\delta(x) = \max(|x - 1/2|, 0)$. D'une part les fonctions $\delta(2^p.x - n - 1/2))$ constituent une famille δ_i bornée dans $\mathcal{C}_K^0$; d'autre part les crochets mettent en évidence une famille sommable en norme de formes linéaires sur $\mathcal{C}_K^2$, i.e. une famille $\lambda_i\epsilon_i^*$ où la famille e_i^* est bornée dans le dual de $\mathcal{C}_K^2$ et où $\sum|\lambda_i| < +\infty$.

Pour la nucléarité de l'injection canonique

$$\mathcal{C}_K^{k+2} \to \mathcal{C}_K^k$$

on peut procéder en intégrant k fois, quitte à élargir un peu K à droite ou à remplacer f' par $f'' - f$. On peut encore étendre le processus à plusieurs variables en remarquant qu'il s'applique à des fonctions à valeurs vectorielles et que $\mathcal{C}_{K\times K^m}^k = \mathcal{C}_K^k(\mathcal{C}_{K^m}^k)$.

Maintenant si U est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{C}_K^k \times \mathcal{C}_L^k$, on écrit

$$\phi = \sum_i \lambda_i\epsilon_i^*(\phi)\delta_i$$

et

$$U(\phi, \psi) = \sum_i \lambda_i\epsilon_i^*(\phi)U(\delta_i, \psi)$$

achève la démonstration.

Bien sûr c'est la notion de nucléarité entre espaces de Banach considérée par Grothendieck qui est ici concernée. Cependant il ne s'agit que de travailler avec des séries absolument convergentes, ce qui est assez banal.

5. Quelle part d'analyse fonctionnelle?

Comme on l'a vu, la démonstration qui aurait dû s'imposer à l'époque ne met essentiellement en jeu que des espaces hilbertiens. Jusqu'à l'édition de 1981 exclue, on ne trouve dans le livre des EVT qu'une "théorie élémentaire" de ces espaces. Par exemple rien n'est dit à propos des classes traditionnelles d'opérateurs. Sans doute faut-il relier cela à la disparition progressive des bases au fil des premières rédactions, le raisonnement algébrique étant privilégié par rapport à celui sur les coordonnées. C'est un thème qu'il serait bien sûr intéressant d'approfondir.

Etrangement, plus de quinze ans après le passage de Gothendieck et la publication de son cours de São Paulo, l'édition des EVT de Bourbaki de 1881[8] traite des opérateurs *à trace finie*, qui composent $L^1(E, F)$, et des opérateurs de Hilbert-Schmidt, qui composent $L^2(E, F)$, dans cet ordre. Les seconds sont définis par la finitude de la trace de u^*u. Cependant la relation entre opérateurs à trace et opérateurs nucléaires au sens de Grothendieck n'est pas faite. De plus le seul exemple "concret" qui soit donné est celui d'un opérateur entre espaces L^2 : on y montre qu'il est défini par un noyau L^2.

Ainsi, quelles que soient les rédactions et éditions, la partie sur les EVT généraux et celle sur les espaces hilbertiens ne sont essentiellement pas reliées entre elles. Alors qu'on aurait pu penser la voir disparaître, l'imperméabilité à l'influence de Grothendieck est restée d'actualité.

Pour ce qui est des espaces vectoriels topologiques localement convexes un peu plus généraux, tout au plus a-t-on besoin de l'espace $\mathcal{D}_K$ qui est un espace vectoriel localement convexe métrisable.

Quelle part les différentes rédactions et publications de Bourbaki ont-elles réservé à ces espaces? Il ne semble pas qu'elle soit considérable, mais ce serait encore à préciser.

On sait que ces espaces sont *normaux* au sens de Christian Houzel[9]. Autrement dit, on peut aussi bien les voir comme espaces vectoriels disqués, espaces vectoriels topologiques localement convexes ou espaces vectoriels à bornés de type convexe : les deux foncteurs d'oubli se trouvent être des isomorphismes. Il reste cependant que dans $\mathcal{D}_K$ c'est incontestablement la topologie qui prime et que dans son dual c'est la bornologie. Au passage on notera que la convergence topologique dans $\mathcal{D}_K$ n'a besoin que de suites, alors que la convergence naturelle dans $\mathcal{D}'_K$, qui est la convergence au sens de Mackey, s'exprime aussi avec des suites; on ne parle pas de la convergence pour la topologie de cet espace.

Quelle place Bourbaki a-t-il accordé à ces points fondamentaux? Certainement pas une très grande, comme on le constate dans le chapitre sur la dualité.

Maintenant Schwartz a fait une hypothèse plus faible que la continuité forte, à savoir la continuité séparée. Le fait que cette dernière suffise tient au théorème de Banach-Steinhaus. On noterait que la version classique du théorème, utilisée ici dans le cadre d'une forme bilinéaire sur le produit de deux espaces de Fréchet, apparaît dans Bourbaki en corollaire d'un énoncé relatif aux espaces tonnelés. Démêler tout ce qui concerne Banach-Steinhaus, énoncé dont Jacques Dixmier a insisté sur l'importance, dans les diverses rédactions et éditions est malheureusement assez pénible.

---

[8] Bourbaki E81.

[9] Voir l'appendice "espaces disqués", §9, n°4, p 72 ou Houzel 1972, séminaire Banach, chapitre 2, §2, n°6, p 102.

Cela dit, il est intéressant de dépasser le seul théorème des noyaux pour regarder la question de la convergence dans les espaces de formes linéaires continues rencontrés.

Pour le moment on ne considère que la convergence dans $\mathcal{D}'_K$. On notera que la convergence faible d'une suite T_n équivaut à la convergence de Mackey, qui est la convergence naturelle. On voit d'abord que la suite est équicontinue par Banach-Steinhaus. On passe ensuite de la convergence simple à la convergence forte dans le dual d'un $\mathcal{C}^k_K$ grâce à la compacité de l'injection canonique

$$\mathcal{C}^{k+1}_K \to \mathcal{C}^k_K \ .$$

C'est pour cette convergence naturelle, qui est une convergence forte, que l'espace $\mathcal{D}'_K$ est évidemment complet.

6. L'étape finale.

Il s'agit maintenant de faire varier K et L de façon à trouver l'énoncé présenté par Schwartz. C'est l'étape problématique. Paradoxalement elle l'est d'autant plus qu'il n'y a rien à faire.

L'espace $\mathcal{D}$ est la limite inductive des espaces de Fréchet $\mathcal{D}_K$; ce n'est jamais qu'une réunion filtrante d'espaces vectoriels, voire la réunion d'une suite croissante de tels espaces si l'on introduit une suite exhaustive (K_n) de parties compactes, des boules par exemple.

L'espace $\mathcal{D}'$ est son dual. Or, quelle que soit la structure que l'on considère, l'ensemble $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}, \mathbf{C})$ sera une limite projective. Le plus simple est donc de voir $\mathcal{D}'$ comme un système projectif — d'espaces à bornés complets de type dénombrable — dont on ne prend la limite que comme espace vectoriel. Autrement dit une distribution sera simplement une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ qui est continue sur chaque $\mathcal{D}_K$. Dans ce cas, il n'y a plus rien à faire.

C'est à peu près ce que l'on fait usuellement pour définir une distribution. Cependant la propriété de continuité demandée, qui se trouve être celle dont nous venons de parler, est présentée de façon très artificielle et sans la moindre justification, ce qui n'est quand même pas satisfaisant.

A tout prendre, pour satisfaire les inconditionnels des structures de l'analyse, le moins dommageable est de voir $\mathcal{D}$ comme un espace à bornés. Une partie H de $\mathcal{D}$ est bornée si toute les fonctions de H ont leur support dans une même partie compacte K et s'il existe un suite C_k de constantes positives telle que $\|\phi\|_k \leq C_k$ pour toutes les fonctions ϕ de H. Alors $\mathcal{D}'$ est l'espace des formes linéaires bornées muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées précédentes. Mais c'est déjà inutilement compliqué.

C'est presque ce que fait Schwartz quand il définit, dès 1948, la convergence des distributions comme la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}$. Cependant il commence par voir $\mathcal{D}$ comme un espace vectoriel topologique localement convexe pour n'y considérer finalement que les parties bornées. D'autres se contentent de parter de la convergence faible des suites sans la relier à rien, alors qu'on montre qu'elle est équivalente à la précédente parce que déjà équivalente à la convergence au sens de Mackey.

Maintenant, si l'on est très pédant, on peut dire que $\mathcal{D}$ est un ind-objet de la catégorie des espaces de Fréchet et que $\mathcal{D}'$ est un pro-objet de la catégorie des espaces à bornés complets de type dénombrable. La version la plus pédante rejoint la version la plus naïve.

7. Fonctions différentiables.

Schwartz s'est beaucoup intéressé aux distributions vectorielles. Nous n'allons pas en discuter sérieusement ici, nous contentant d'évoquer des travaux préliminaires et regardant notamment les derniers exposés de son séminaire 1953-54, pour chercher à cerner de quelle façon il se servait des EVT dans ses distributions.

Dans les exposés en question, Schwartz introduit, pour m entier ou égal à $+\infty$, des espaces notés $\mathcal{H}^m$ dont les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbf{R}^n$ et soumises à une condition de croissance. Pour cela, il se donne un ensemble Γ de poids, i.e. de fonctions continues positives ayant la propriété que, pour toute partie compacte K, on peut trouver un poids γ dans Γ non nul sur K. Le condition imposée aux fonctions est que

$$\gamma D^p \phi$$

soit bornée pour tout poids γ de Γ et tout ordre p fini tel que $|p| \leq m$.

A la donnée du système Γ, correspond une Γ-bornologie sur les espaces considérés : sont bornées les parties pour lesquelles on peut trouver une borne uniforme $C_{p,\gamma}$ aux $\gamma D^p \phi$ pour tous γ et p donnés.

Cela étant, Schwartz suppose les espaces $\mathcal{H}^m$, avec lesquels il veut travailler, munis d'une topologie localement convexe (séparée) complète, intermédiaire entre celle de $\mathcal{D}^m$ et celle de $\mathcal{E}^m$, dont les parties canoniquement bornées sont celles de la Γ-bornologie; il suppose encore qu'elle induit sur ces parties la topologie de $\mathcal{E}^m$, à savoir la topologie de la convergence sur tout compact des dérivées d'ordre $\leq m$.

Il donne un certain nombre d'exemples : l'espace $\mathcal{D}^m$ (pour lequel Γ est l'ensemble des fonctions continues), l'espace $\mathcal{E}^m$ (pour lequel Γ est l'ensemble des fonctions continues à support compact), l'espace $\mathcal{S}^m$ (pour lequel Γ est l'ensemble des fonctions polynomiales ou à croissance polynomiale), l'espace $\mathcal{O}^m$ (pour lequel Γ est l'ensemble des fonctions à décroissance rapide) et enfin l'espace $\mathcal{B}^m$ (pour lequel Γ est réduit à la constante 1).

Il considère aussi des fonctions à valeurs vectorielles. Si E est localement convexe (séparé) complet, l'espace $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ est celui des fonctions scalairement dans $\mathcal{H}^m$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Il indique que c'est encore le produit tensoriel complété ϵ de $\mathcal{H}^m$ et de E.

Ces définitions sont révélatrices d'une stratégie qui va s'imposer à Bourbaki dans l'écriture de ses EVT. La seule structure à retenir est une topologie vectorielle — localement convexe en l'occurence. Les parties bornées sont toujours les parties bornées canoniques, celles qui dérivent de la topologie. Lorsque, dans des exemples comme ceux considérés, ce sont d'abord le parties bornées qui apparaissent, il convient de les rattacher très vite à une topologie.

On avait à associer ici une bornologie — celle des poids — et une topologie sur les parties bornées — celle induite par l'espace $\mathcal{E}^m$. Plutôt que de chercher un compromis, il eût été plus simple de se placer tout simplement dans des espaces disqués, en considérant à la fois la Γ-bornologie et la topologie métrisable de $\mathcal{E}^m$, remplaçant continuité par quasi-continuité et complétude par quasi-complétude. Eventuellement on peut toujours saturer la topologie pour la bornologie; d'ailleurs si les conditions exigées par Schwartz sont satisfaites, c'est une topologie comprise entre les deux précédentes qu'on aura choisi.

L'idée de traiter ensemble différents cas en introduisant un système d'axiomes est aussi révélatrice d'une stratégie qui va s'imposer à Bourbaki pour ses EVT. Même quand les axiomes ne sont pas dans la nature des choses. Regardons donc de près les exemples.

Pour les espaces $\mathcal{E}^m$ et $\mathcal{S}^m$ ici considérés, le plus simple est de noter que les conditions de croissance définissent, naturellement et avant tout, une topologie. Ce sont des espaces de Fréchet, qui plus est de Schwartz, voire des espaces nucléaires. Il n'est pas utile de compliquer davantage. Maintenant, si on remplace dans $\mathcal{S}^m$ la topologie par celle de $\mathcal{E}^m$ pour se placer dans l'espace disqué dont on a parlé, cela ne change rien sur les parties bornées. Et si l'on tient à récupérer la topologie de $\mathcal{S}^m$ à partir de celle de $\mathcal{E}^m$, il suffit de savoir que l'espace $\mathcal{S}^m$ est normal; sa topologie est alors saturée et s'obtient donc en saturant celle de $\mathcal{E}^m$.

A l'inverse, dans les exemples de $\mathcal{D}^m$ et de $\mathcal{O}^m$, c'est plutôt la bornologie qui prime, mais avec une définition directe n'utilisant pas de système de poids. En effet $\mathcal{D}^m$ est le sous-espace de $\mathcal{E}^m$ des fonctions à support compact; les parties bornées de $\mathcal{D}^m$ sont à support dans un même compact et bornées uniformément avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre m — ou dans $\mathcal{E}^m$. De son côté une fonction ϕ est dans $\mathcal{O}^m$ si pour tout p on peut trouver r tel que

$$\frac{D^p\phi}{1+|x|^r}$$

soit bornée; les parties bornées s'obtiennent en imposant un exposant r_p et une borne C_p uniformes pour tout p.

Dans chacun des deux cas la topologie de $\mathcal{E}^m$ épaule a priori la bornologie sans inconvénient. On notera qu'elle induit sur les parties bornées la convergence au sens de Mackey.

En fait si Schwartz envisage de prendre éventuellement une autre topologie que celle définie naturellement par le système de poids, c'est à cause de l'exemple de $\mathcal{B}^m$. En effet la topologie naturelle de $\mathcal{B}^m$ n'induit pas celle de $\mathcal{E}^m$ sur les parties bornées. Il introduit alors une topologie faisant intervenir la convergence compacte sur un espace en dualité de type L^1, qui fait penser à une topologie intermédiaire.

Ici l'espace disqué mêlant la bornologie uniforme et la topologie de $\mathcal{E}^m$ est quasi-complet. Cependant si on en sature la topologie, on obtient exactement l'espace localement convexe associé au système de poids constitué par toutes les fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, espace dont la bornologie canonique est celle de $\mathcal{B}^m$. Cet espace est complet et il remplit toutes les conditions requises.

Ainsi, pour finir, Schwartz disposait d'un procédé permettant de construire toute une famille d'espaces localement convexes de fonctions différentiables, même si pour certains d'entre eux la topologie n'était pas la structure la plus naturelle. Pour avoir la la bonne convergence sur les parties bornées, il suffisait qu'il ajoute une condition : pour tout poids γ il en existe un autre δ tel que $\gamma = o(\delta)$ à l'infini. Cette condition oblige juste à décrire $\mathcal{B}^m$ comme on vient de le faire.

Le paradoxe est que Schwartz se serve des poids pour construire, sans ambiguïté, une bornologie, alors qu'il laisse une lattitude, du flou en quelque sorte, pour choisir sa topologie. Même si, comme on l'a dit, il assujettit la bornologie à la topologie. C'est révélateur de la primauté des impératifs techniques — on a besoin de telle ou telle propriété — sur la recherche d'une certaine cohérence, d'une certaine harmonie. Cela nous écarte de Bourbaki, autrement dit de Dieudonné, lequel respecte un mode d'exposition systématique, à défaut d'une vision naturelle comme celle d'un Grothendieck.

§11.– Appendice : espaces fonctionnels

L'étude de ses différentes rédactions et éditions sur la dualité a montré que Bourbaki n'accordait pas toujours à l'équicontinuité la place qui lui revenait. Or cette éclipse de l'équicontinuité, ou de l'uniforme équicontinuité, n'est pas spécifique au livre des EVT. Elle trouve ses racines dans le livre de Topologie, aux chapitres IX et X précisément.

On n'y trouve notamment pas la petite remarque suivante. Dire qu'une partie H de l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ de l'espace uniforme E dans $\mathbf{R}$ est uniformément équicontinue équivaut à dire que l'écart

$$d_H(x, y) = \sup_{f \in H} |f(x) - f(y)|$$

est uniformément continu.

En général, dire que H est un ensemble uniformément équicontinu d'applications de l'espace uniforme E dans l'espace uniforme F signifie que pour tout écart uniformément continu d sur F, l'écart d_H défini par

$$d_H(x, y) = \sup_{f \in H} d(f(x), f(y))$$

est uniformément équicontinu.

Par ailleurs, une famille d'écarts est uniformément équicontinue si et seulement si elle est majorée par un écart uniformément continu; autrement dit si l'enveloppe supérieure de ces écarts est un écart uniformément continu.

1. Opérations sur les écarts.

L'ensemble $\mathrm{Ec}(E)$ des écarts sur un ensemble E est un cône convexe réticulé (même complètement réticulé); en particulier la borne inférieure de deux écarts d, d' est donnée par

$$\inf(d, d')(x, y) = \inf \sum \delta(x_i, x_{i+1})$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chaînes $x_0, x_1, \ldots x_n$ de E telles $x_0 = x$, $x_n = y$ et où δ remplace d ou d'.

Il est intéressant de noter la propriété de prolongement suivante, analogue à celle qui vaut pour les semi-normes.

Lemme. Soient un ensemble E un ensemble, une partie F de E, un écart d' sur E et un écart d sur F majoré par d' sur F; on peut prolonger d en un écart sur E encore majoré par d'.

On commencera par prolonger d à E en d'' en lui donnant la valeur $+\infty$ en dehors de la diagonale. On prendra alors

$$d''' = \inf(d', d'')$$

comme prolongement. Il s'agit seulement de voir que d''' majore d sur F. Soit donc une chaîne $x_0, x_1, \ldots x_n$ intervenant dans la borne inférieure de la borne inférieure, dont les extrémités x, y sont dans F. Si l'un des x_i n'est pas dans F, il n'est pas extrême et dans

$\delta(x_{i-1}, x_i)$ comme dans $\delta(x_i, x_{i+1})$ la lettre δ remplace d'. On peut alors supprimer le maillon x_k en diminuant la borne inférieure. On se ramène ainsi au cas où tous les x_i sont dans F et on peut alors supprimer les maillons intermédiaires.

Si E est un espace uniforme, l'ensemble $\mathrm{Ec}(E)$ des écarts uniformément continus sur E est aussi un cône convexe réticulé; il est héréditaire à gauche dans le cône de tous les écarts.

L'énoncé suivant montre comment on peut fabriquer tous les écarts uniformément continus bornés à partir d'un écart donné.

Exercice. Soit E un espace uniforme.

a) Montrer que si d est un écart uniformément continu sur E et ϕ une fonction continue croissante, sous additive et nulle en 0, alors $\phi \circ d$ est un écart uniformément continu.

b) On suppose que la structure de E est engendrée par un écart d. Montrer que tout écart uniformément continu borné sur E est majoré par un écart $\phi \circ d$, où ϕ est comme dans le a).

Pour cela on construira ϕ comme une enveloppe inférieure de fonctions affines

$$\alpha x + \beta$$

où $\alpha, \beta \geq 0$ et où α prend des valeurs arbitrairement petites. On peut en particulier imposer à ϕ d'être concave.

Voici maintenant un énoncé important.

Théorème. Soient E un espace uniforme et F un sous-espace uniforme de E. Tout écart uniformément continu et borné sur F se prolonge en un écart uniformément continu et borné sur E.

D'après le lemme il suffit de montrer qu'un écart uniformément continu et borné d sur F est majoré par un écart uniformément continu sur E.

On peut se servir de l'exercice ci-dessus. La structure sur F est engendrée par d est moins fine que celle induite sur F qui est engendrée par un écart d' convenable sur E. Alors on aura majoré d par un écart du type $\phi \circ d'$ où ϕ est comme dans l'exercice.

A défaut on peut invoquer le résultat suivant, qui précise la façon de construire un écart à partir d'une suite d'entourages, énoncé que Bourbaki ne donne pas.

Proposition. Soit $V = (V_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entourages symétriques telle que $V_{n+1}^2 \subset V_n$ pour tout n. On peut trouver un écart d tel que chaque V_n soit inclus dans (resp. contienne) l'ensemble des couples (x, y) tels que $d(x, y) \leq 2^{-n+1}$ (resp. $d(x, y) < 2^{-n}$).

Partant alors de la suite (W_n) d'entourages de F définie par $d(x, y) \leq 2^{-n}$, on considère une suite (V_n) d'entourages symétriques de E telle que $V_{n+1}^2 \subset V_n$ et que $V_n \cap (F \times F) \subset W_n$. On vérifie alors qu'un multiple de l'écart d' construit sur dernière suite majore d sur F.

Remarque. L'énoncé n'est pas valable pour un écart d général. Voir l'espace $\mathbf{N}$ muni d'une distance croissant vite à l'infini dans la droite $\mathbf{R}$ usuelle.

2. Dualité et espaces uniformes.

Le chapitre X du livre III de Topologie générale ne mentionne pas une forme de dualité, laquelle montre un parallélisme avec celle des espaces localement convexes.

Prolongement.

Notons tout de suite qu'on dispose d'un analogue très simple du théorème de Hahn-Banach.

Proposition. Soient d un écart sur un ensemble E et F une partie de E. Si f est une fonction réelle sur F vérifiant

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

pour tous x, y dans F, alors on peut prolonger f en une fonction réelle g sur E en conservant la propriété ci-dessus.

Si E est non vide, on peut imposer au prolongement d'avoir les mêmes bornes supérieure et inférieure.

La démonstration est facile et repose sur la formule explicite

$$g(x) = \inf_y f(y) + d(x, y) \text{ (resp. } \sup_y f(y) - d(x, y) \text{)}$$

Une conséquence est la suivante : si d est un écart sur E, alors il s'écrit d_H pour une partie H convenable; de plus si d est fini on peut choisir une partie H simplement bornée. C'est l'analogue du théorème des bipolaires.

En effet, étant donnés deux points x, y de E, on définit une fonction $f_{x,y}$ sur $F = x, y$ par $f_{x,y}(x) = 0$ et $f_{x,y}(y) = d(x, y)$. On prolonge à E grâce à la propriété ci-dessus. La partie H obtenue en laissant varier x et y convient.

Dans le cas où l'écart d est fini, on choisit un point a de E et on impose $f_{x,y}(a) = 0$. Etant donnés deux points x, y de E, si $d(a, x) \leq d(a, y)$ on définit $f_{x,y}$ en x et y comme précédemment. Sinon on inverse les rôles de x et y.

On peut compléter l'énoncé ci-dessus comme suit, pour obtenir une propriété de décomposition analogue à celle qui vaut pour des pré-normes.

Proposition. Soient d un écart sur un ensemble E et C une constante ≥ 0. Si f est une fonction réelle sur E vérifiant

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) + C$$

pour tous x, y dans F, alors on peut décomposer f en une somme $g + h$ de fonctions réelles sur E vérifiant

$$|g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$$

et

$$0 \leq h \leq C \ .$$

Il suffit pour cela de prendre la fonction g du premier énoncé.

L'intérêt de ce dernier énoncé n'est pas évident. Il permet, bien sûr, d'approcher uniformément les fonctions uniformément continues et bornées par des fonctions lipschitziennes. Cependant la propriété résulte aussi des théorèmes de Stone ou de Kakutani, moyennant une compactification convenable.

Espaces uniformes bornologiques.

Les choses se compliquent un peu lorsqu'on veut considérer des espaces uniformes bornologiques, c'est-à-dire des espaces uniformes munis d'une bornologie. Une notion de partie bornée canonique existe pour un espace uniforme, qui généralise le cas vectoriel, mais son intérêt n'est pas évident. Nous en reparlerons en commentaire.

Nous préférons traiter les espaces uniformes bornologiques dans une analogie avec les espaces disqués, analogie qui n'exclut pas quelques différences importantes. Notamment certains points sont beaucoup plus triviaux pour les espaces uniformes.

Si E, F sont des espaces uniformes bornologiques, on introduit l'espace $\mathrm{U}(E, F)$ des applications uniformément continues et bornées de E dans F. Il est muni de la structure uniforme de la convergence uniforme sur les parties bornées et de la bornologie des parties uniformément équicontinues et équibornées.

Pour ce faire, il n'est absolument pas besoin de mettre une restriction sur la bornologie. Cela fait une grande différence avec les espaces disqués pour lesquels il est important d'imposer aux parties bornées de l'être pour la topologie.

D'abord cette dernière condition s'impose si l'on veut avoir une topologie vectorielle sur $L(E, F)$; avec des bornologies grossières sur E et F, ce n'est en général pas le cas.

Ensuite **la structure uniforme d'un espace uniforme bornologique est toujours canoniquement duale**; cela résulte du fait que les écarts bornés engendrent la structure. Dans le cas vectoriel la condition sur les parties bornées est essentielle; le dual pourrait en effet être nul du fait de la bornologie.

Dans le même ordre d'idées la **bornologie par défaut** d'un espace uniforme n'est pas la bornologie canonique, mais la bornologie **grossière**. C'est très différent du cas vectoriel. La raison fondamentale en est qu'il existe des fonctions uniformément continues bornées sur l'espace entier, pas des formes linéaires bornées non triviales. Il existe bien sûr un foncteur naturel de la catégorie des espaces disqués dans celle des espaces uniformes bornologiques. Cependant comme exemple d'espace uniforme il y a aussi celui d'une partie bornée d'un espace disqué.

Complétion.

Toujours dans le même ordre d'idées, un espace uniforme bornologique est dit **quasi-complet** s'il est séparé et si toute partie bornée est incluse dans une partie bornée complète. Un espace uniforme complet est un espace uniforme quasi-complet pour la bornologie grossière; la complétude est un cas particulier de la quasi-complétude. Dans le cas vectoriel, au contraire, complet est un cas particulier de saturé complet.

On établit l'énoncé suivant.

Théorème. Si F est quasi-complet, alors $\mathrm{U}(E, F)$ est quasicomplet.

Considérons, plus précisément, une application μ de l'ensemble des écarts uniformément continus sur F dans celui des écarts uniformément continus sur E et une application ν de l'ensemble des parties bornées de E dans celui des parties fermées bornées de F. La partie H de $\mathrm{U}(E, F)$ définie par

$d(u(x), u(y)) \leq \mu(d)(x, y)$ pour tout écart uniformément continu d sur F,

$u(B) \subset \nu(B)$ pour toute partie bornée B de E,

est simplement fermée et complète.

En résumé la bornologie d'un espace uniforme est complètement indépendante de la structure uniforme. Cela veut dire qu'on peut parler au chapitre 10 d'ensembles bornologiques en investissant a minima. On notera que le cas considéré par Bourbaki est toujours celui où l'espace uniforme d'arrivée a la bornologie grossière.

Remarques complémentaires.

Terminons par quelques remarques mineures.

Les parties canoniquement bornées d'un espace uniforme sont définies comme les parties B telles que pour tout entourage V on puisse trouver un nombre entier naturel n et une partie finie F pour lesquels $B \subset V^n(F)$. On vérifie aisément que toute application uniformément continue est bornée et que tout ensemble uniformément équicontinu et simplement borné est équiborné.

On peut définir la bornologie saturée d'une bornologie donnée pour une structure uniforme. Les nouvelles parties bornées sont les parties A telles que pour tout entourage V il existe une partie bornée B d'origine et un nombre entier naturel n vérifiant $A \subset V^n(B)$. En particulier les parties précompactes sont les parties bornées saturées de la bornologie fine.

En revanche il ne paraît pas utile de s'intéresser à une éventuelle saturation de la structure uniforme pour la bornologie, ni à un quelconque quasi-dual; en effet le prolongement, sans approximation, des écarts uniformément continu en réduit le sens.

Références

La présente bibliographie ne tient compte ni des rédactions ni des tribus, auxquelles il est réfèré par la numérotation.

Adams Robert
- 1975, *Sobolev spaces*

Banach Stefan
- 1932, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie

Bourbaki N.
- E53, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I et II, 1953, Paris
- E55, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres III à V, 1955, Paris
- E65, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I et II, 1965, Paris
- E67, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres III à V, 1967 Paris
- E81, *Espaces vectoriels topologiques*, 1981, Paris
- 1958, *Algèbre multilinéaire*, Paris

Bourbaki Nicolas
- 1950, Sur certains espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble

Choquet Gustave
- 1962, *Séminaire d'initiation à l'analyse*, Paris

Dieudonné Jean
- 1940, Equations linéaires dans les espaces normés, *C.R.A.S.*, Paris
- 194 , Topologies faibles dans les espaces vectoriels, *C.R.A.S.*, Paris
- 1982, *History of functional analysis*, Amsterdam-New York-Oxford, 312 pages

Dieudonné Jean, Schwartz Laurent
- 1949, La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$), *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble

Grothendieck, Alexander
- 1950, Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe, *C. R. A. S.*, Paris
- 1954, *Espaces vectoriels topologiques*, São Paulo, 2° éd (1958), 446 pages

Houzel Christian
-1972, *Séminaire Banach*, Berlin-Heidelberg-New York, 229 pages
- 1978, *Encyclopaedia universalis*, Paris

Köthe Gottfried
- 1969, *Topological Vector Spaces* I, Berlin

Köthe Gottfried, Toeplitz Otto
- 1934, *J. F. reine und angew. Math.* 171 (1934), pp 193-

Maurin Krzystof
- 1961, Abbildungen von Hilbertschmidtschen Typus und Ihre Anwendungen, Math. Scan 9, pp 359-371

Schwartz Laurent
- 1950, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, vol 1 (1950), Cambridge, pp 220-230
- 1954, *Séminaire 1953/1954 : produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques, espaces vectoriels topologiques nucléaires, applications*, Paris

- 1955, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *Journal d'analyse mathématique*, vol IV (1954/55), Jerusalem, pp 88-148
- 1957, *Théorie des distributions*, tome 1, Strasbourg

Sobolev Serguieï
- 1938, On a theorem of functional analysis, *Mat. Sbornik*, Moscou

Trèves François
- 1967, *Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels*, Academic Press.

Waelbroeck Lucien
- 1960, *Théorie spectrale des algèbres complètes*, Bruxelles, 142 pages

Weil, André
- 1937, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris