Graphes
et
Recherche Opérationnelle

ESIAL 2ème année

Notes de cours de J.-F. Scheid

2010-2011

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Une définition possible de la R.O pourrait être la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (maths et info.) des phénomènes d'organisation qui traite de la *maximisation* d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la *minimisation* d'un coût, d'une dépense. La R.O. est avant tout un outil d'**aide à la décision**.

Le schéma général suivi par ces méthodes est : Problème concret (de type R.O) → modélisation → résolution par une méthode de R.O → interprétation des résultats → prise de décision.

1.1 Quelques exemples et domaines d'applications de la R.O.

1. **Un premier exemple :** *Les ponts de Königsberg* **(Euler 1735).**

   Deux îles de la ville sont reliées entre elles par 1 pont. D'autre part 6 autres ponts relient les îles à la ville. La question posée est la suivante : à partir d'un point de départ quelconque, existe-t-il un chemin passant une et une seule fois par chaque pont et qui revient au point de départ ?

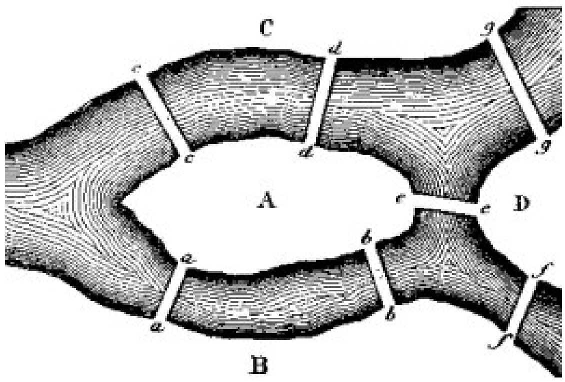


FIG. 1.1 – La ville de Königsberg et ses 7 ponts.

   La réponse (apportée par Euler) est **NON**. La preuve utilise un **graphe** : les arêtes du graphe représentent les ponts et les sommets correspondent aux différents endroits de la ville : les rives gauche et droite et les deux îles (cf. Figure 1.2).

   Supposons qu'un tel chemin existe. Un tel chemin est appelé *chemin eulérien.* Alors nécessairement en chacun des noeuds du graphe il y a toujours un nombre pair d'arêtes reliées au noeud : s'il y a une arête qui arrive au noeud, il y en a nécessairement une autre (différente) qui le quitte. Or, on constate que le graphe possède des noeuds (tous en fait !) reliés à un nombre impair d'arêtes. Par conséquent, il n'existe pas de chemin eulérien.

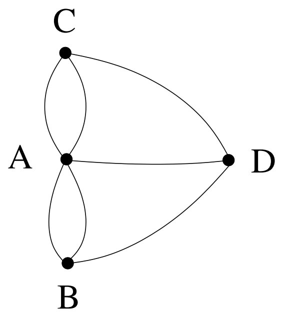


FIG. 1.2 – Graphe associé au problème des ponts de Königsberg

2. **Graphe et PageRank**

   Classement des pages Web utilisé par les moteurs de recherches. Le web est modélisé à l'aide d'un graphe orienté dont les sommets j représentent les pages du Web et les arcs $j \to i$ les hyperliens.

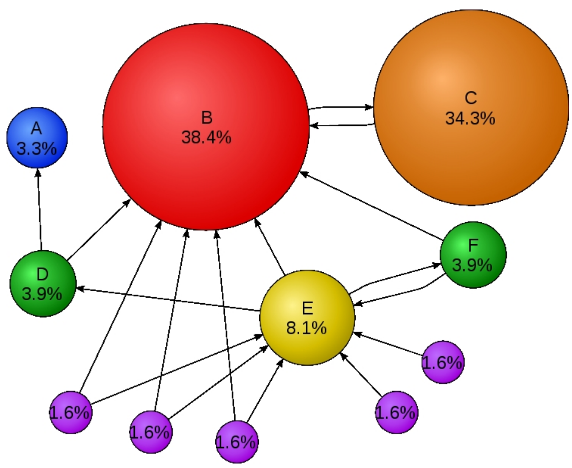


FIG. 1.3 – Exemple de pages Web et leurs *PageRank*

   Chaque page du web possède un score (PageRank) indiquant son importance. Le principe est le suivant : une page i est importante (score élevé) si beaucoup de pages importantes pointent vers i. Le score de la page i est défini par la valeur

$$\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} \mu_j$$

   où l_j désigne le nombre de liens partant de la page j. Le problème de la détermination des PageRank se ramène à un problème aux valeurs propres de la forme $\mu = A\mu$ où μ est le vecteur de tous les PageRank des pages web recensées (environ 20 milliards...).

3. **Un problème de production**

   Détermination d'un plan optimal de fabrication : une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

   ▶ *Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?*

On verra que ce problème peut se modéliser par programmation linéaire qui s'écrit formellement sous la forme suivante.

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \;\leftarrow \textit{l'objectif}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \;\leftarrow \textit{les contraintes} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

4. **Un problème de transport**.
   Une entreprise dispose de plusieurs dépôts (D_i) contenant chacun un certain nombre de containers. Différents magasins (M_j) commandent des containers. On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins. Par exemple,

	M_1	M_2	M_3	disponibilité dépôts ↓
D_1	5	3	4	8
D_2	6	7	2	9
demande magasins →	4	5	8	

   ▶ *Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?*

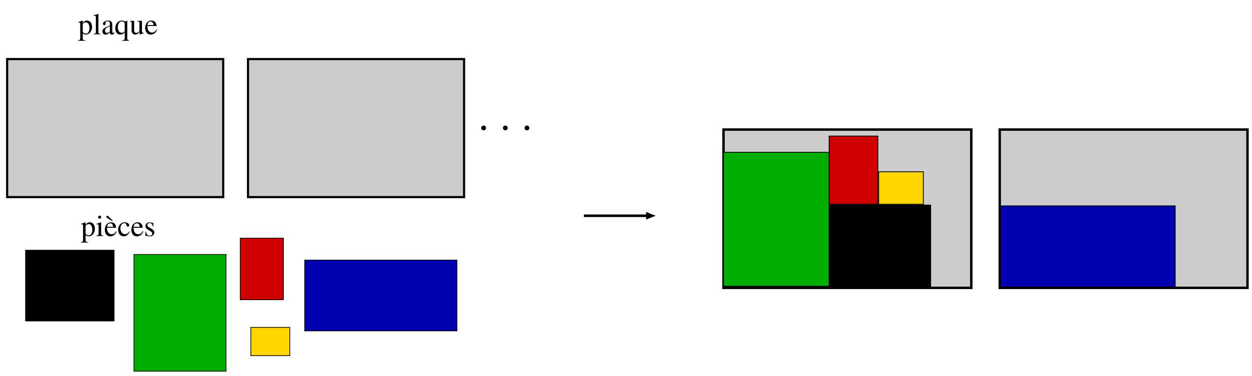
   Ce problème peut se modéliser par programmation linéaire **en nombres entiers** et sa résolution peut se faire par *Séparation et Evaluation*.
5. **Un problème d'affectation**.
   n tâches doivent être affectées à n machines (1 tâche par machine). Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu.

   ▶ *Trouver l'affectation qui minimise le coût total.*

   Ce problème peut se modéliser par programmation linéaire **en variables binaires** mais il peut être vu aussi comme un problème de *flot maximal à travers un graphe.*
6. **Un problème de voyageur de commerce**.
   Un voyageur de commerce doit visiter n villes. La distance entre chaque ville est donnée.

   ▶ *Trouver le plus court trajet passant par les n villes.*

   Ce problème sera résolu par *programmation dynamique.*
7. **Placement optimal de pièces 2D (Bin Packing)**.
   On dispose de plaques rectangulaires toutes identiques dans lesquelles on veut placer des pièces rectangulaires sans chevauchement. Les pièces à placer ont des dimensions différentes.



   ▶ *Trouver le placement pour minimiser le nombre de plaques utilisées.*

   Ce problème pourra être étudié par des méthodes heuristiques / méthodes évolutionnistes (algorithmes génétiques).

Tous les problèmes précédents sont des *problèmes de combinatoire*. Par ex., pour le problème d'affectation et du voyageur de commerce, il y a $n!$ possibilités.
Avec $n = 20$, l'énumération des affectations (trajets) possibles, à vitesse d'un million par seconde, prendrait 77094 années ... **Il est donc indispensable de trouver des méthodes efficaces**.

1.2 Formalisation

Tous les problèmes mentionnés ci-dessus et présentés dans ce cours peuvent se formaliser de la façon suivante. On cherche à maximiser une fonction f sur un ensemble X donné :

$$\max\{f(x),\ x \in X\}$$

- $f : X \to \mathbb{R}$ est la fonction **objectif**. f peut être linéaire, quadratique, nonlinéaire...
- X est l'ensemble des solutions possibles dites **réalisables** (les contraintes). L'ensemble X est fini mais en général de très grande taille.

On peut envisager de façon équivalente un problème de *minimisation* grâce à la relation

$$\min f = -\max(-f).$$

1.3 Contenu du cours

- *Programmation linéaire* : aspects géométriques, méthode du simplexe, dictionnaires, analyse de sensibilité, dualité.
- *Graphes et R.O*
  - *Flot optimal dans un graphe*
  - *Problèmes d'affectations (simples et multiples)*
  - *Programmation en nombres entiers (PLNE)*
  - *Programmation dynamique*
- *Introduction aux méthodes heuristiques et évolutionnistes* : recuit simulé, tabou, algorithmes génétiques, algorithme A^*.

Remarque. Les problèmes stochastiques - c'est-à-dire où interviennent le hasard - ne sont pas abordés dans ce cours (processus de Markov, file d'attente...).

1.4 Eléments de bibliographie

[1] *Précis de recherche opérationnelle – Méthodes et exercices d'application*, Faure, Lemaire, Picouleau ; 2008.
▷ *ouvrage de référence, un "classique".*

[2] *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle : Tome 1 (Graphes : leurs usages, leurs algorithmes), Tome 3 (Programmation linéaire et extensions, problèmes classiques).* Roseaux : Billionnet, Carlier, Chrétienne, Lemaire, Faure ; 1998/1985.
▷ *contient des exercices classiques en lien avec [1].*

[3] *Optimisation discrète – De la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématique*, Billionnet ; 2007.
▷ *ouvrage récent qui contient un exposé de méthodes plus modernes que [1]. Ouvrage très intéressant.*

[4] *Linear Programming*, Chvátal ; 1983.
▷ *ouvrage très didactique (style anglo-saxon...) avec de nombreux développements pratiques très importants.*

[5] *Recherche opérationnelle pour ingénieurs Tome I et II*, Hêche, Liebling, de Werra ; 2003.
▷ *malgré son titre (!), contenu assez mathématique ; contient des démonstrations intéressantes.*

[6] *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes*, Minoux ; 2008.
▷ *passe en revue de nombreuses méthodes contemporaines.*

[7] *Introduction à l'algorithmique*, Corman, Leiserson, Rivest ; 2002.
▷ *aspects algorithmiques des maths numériques, de la Recherche Opérationnelle et des probabilités.*

Chapitre 2

Programmation linéaire

2.1 Introduction

2.1.1 Modélisation

En R.O, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auquelles sont soumises ces variables et l'objectif visé (optimisation). Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions *linéaires* des variables.

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'oeuvre, matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. tableau).

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

Les deux produits P_1 et P_2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 euros et 4 euros par unité. Quelles quantités de produits P_1 et P_2 (valeurs non-nécessairement entières) doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

- *Choix des variables (les inconnues)* : x_1 et x_2 sont respectivement les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).
- *Choix de la fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif F correspond au bénéfice total. Elle vaut $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. Le problème se traduit donc par

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Détermination des contraintes.*
  - La disponibilité de chacune des ressources s'écrit :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 55 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 20 \end{aligned}$$

  - Positivité des variables : $x_1, x_2 \geq 0$.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme

$$
\begin{array}{l}
\max\limits_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right]. \\
\text{sous les contraintes :} \\
\quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{array} \right. \\
\quad \;\; x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\tag{2.1}
$$

2.1.2 Résolution graphique

Dans le cas d'un (PL) à deux variables, on peut envisager une résolution graphique. Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des demi-plans. L'intersection de ces demi-plans forme l'ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes (la partie hachurée de la figure 2.1). A la fonction objectif F correspond une droite $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 =$ constante, de coeffi-

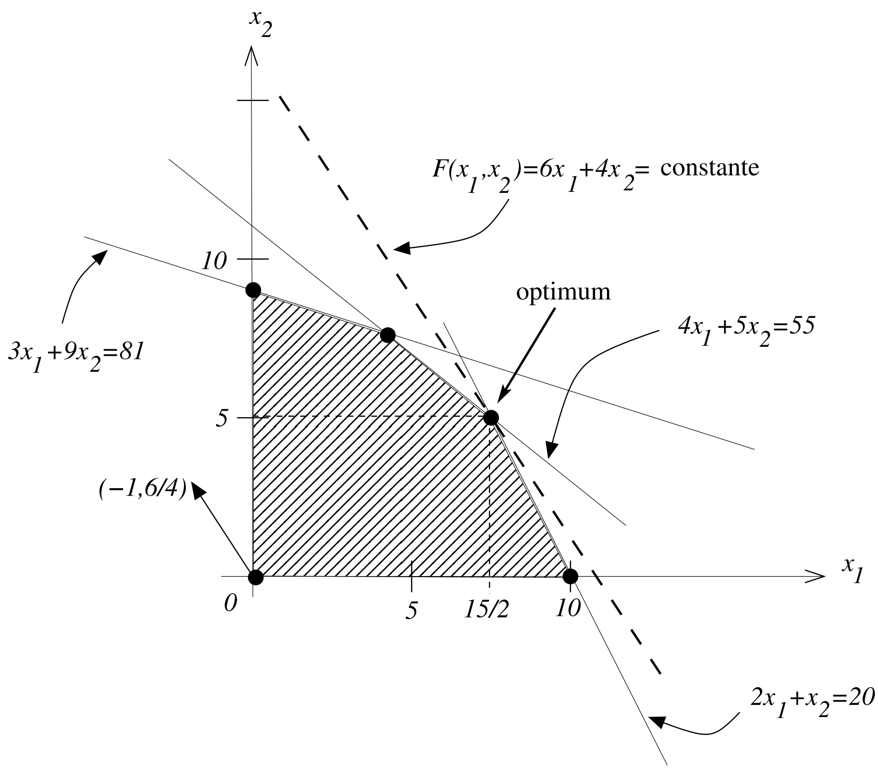


Fig. 2.1 – Résolution graphique du problème de production

cient directeur $(-1, 6/4)$. La constante précédente qui définie la droite doit être la plus grande possible (maximisation) et rencontrer l'ensemble des variables qui satisfont les contraintes. Pour déterminer cette valeur maximale, on fait donc "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes. Le maximum de F sur cet ensemble des contraintes est alors atteint. On obtient ainsi la solution optimale $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$ et ce qui donne une valeur maximale $\max(F) = 65$.

On remarque que l'ensemble des contraintes (la partie hachurée de la figure 2.1) est un <u>polygône convexe</u> et que le maximum de F est atteint <u>en un sommet</u> de ce polygône. Cette observation est, en fait, un résultat général que l'on établiera dans les sections suivantes.

2.2 Formes générales d'un programme linéaire

2.2.1 Forme canonique mixte

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire (encore appelé *programme linéaire*) écrit sous la forme suivante.

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$
$$\begin{cases} \text{contraintes inégalités :} & \forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \\ \text{contraintes égalités :} & \forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ \text{contraintes de signes :} & \forall j \in J_1,\ x_j \ge 0 \\ & \forall j \in J_2,\ x_j \text{ de signe quelconque.} \end{cases} \tag{2.2}$$

L'ensemble $I = I_1 \cup I_2$ est l'ensemble des indices de contraintes avec $\mathrm{card}(I) = m$. Autrement dit, il y a m contraintes. L'ensemble $J = J_1 \cup J_2$ est l'ensemble des indices des variables avec $\mathrm{card}(J) = n$. Il y a n variables.

2.2.2 Forme canonique pure

Sous cette forme, il n'y a pas de contraintes d'égalité c'est-à-dire $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.
On note

$$\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{c} = (c_1,\cdots,c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{b} = (b_1,\cdots,b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$$

et la matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top\mathbf{x} = c_1x_1 + \cdots c_nx_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \begin{cases} A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{cases} \end{array}} \tag{2.3}$$

2.2.3 Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$. Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top\mathbf{x} \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{cases} \end{array}} \tag{2.4}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard simpliciale si A de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, se décompose en :

$$A = \begin{pmatrix} I_m \mid H \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

où I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$ et H est une matrice de taille $m \times (n-m)$.

2.2.4 Variable d'écarts

Proposition 2.1. *Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.*

Démonstration. i) Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} \leq b \quad \Leftrightarrow \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i, \ \forall i = 1, \cdots, m \\ & \text{où } e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq 0 \end{array} \right.$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ sont appelées variables d'écart.

ii) Soit un PL sous forme standard. On a

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \hline -A \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\tilde{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}}$$

où $\tilde{\tilde{A}}$ est une matrice de taille $2m \times n$ et $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2m}$. □

2.3 Solutions de base réalisables

On considère désormais (sauf mention contraire) un PL toujours sous *forme standard*.

Définition 2.1. *On appelle solution réalisable tout vecteur* $\mathbf{x}$ *qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *et* $\mathbf{x} \geq 0$.

Hypothèse : On suppose désormais que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\text{rang}(A) = m \leq n}$.

On rappelle que le rang de A est le nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes. C'est aussi le nombre de colonnes de A linéairement indépendantes. L'hypothèse de rang plein n'est pas restrictive car si $\text{rang}(A) < m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution *en général*. Si $\text{rang}(A) < m$ et $b \in \text{Im}(A)$, il y a des équations redondantes dans le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, qu'on peut donc supprimer pour obtenir un nouveau système de rang plein. Sous l'hypothèse de rang plein, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet toujours des solutions. Si $m < n$, il y en a une infinité. Si $m = n$, la solution est unique et vaut $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, dans ce cas, il n'y a rien à maximiser...

Remarque. Pour la forme canonique pure avec $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, l'hypothèse de rang plein n'est pas non plus restrictive car si $\text{rang}(A) < m$, il y a des contraintes inégalités redondantes qu'on peut supprimer pour obtenir un système de rang plein.

Définition 2.2. *Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble d'indices avec card$(B) = m$ tel que les colonnes A^j, $j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes A^j, $j \in B$, est inversible. On dit que l'ensemble B des indices est une base.*

- *Les variables $\mathbf{x}_B = (x_j,\ j \in B)$ sont appelées variables de base.*
- *Les variables $\mathbf{x}_H = (x_j,\ j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.*

Remarques.
- Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.
- Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$$A = (A_B|\ A_H) \text{ où } A_H \text{ est la matrice formée des colonnes } A^j,\ j \notin B$$
$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B|\ \mathbf{x}_H)^\top$$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à

$$A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

Par la relation précédente et du fait que la matrice A_B est inversible, on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées.

Définition 2.3. *On dit que $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B|\ \mathbf{x}_H)^\top$ est solution de base associée à la base B si*

$$\mathbf{x}_H = 0.$$

Propriétés des solutions de base réalisables : Si $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B|\ \mathbf{x}_H)^\top$ est une solution de base réalisable alors $\mathbf{x}_H = 0$ et $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Exemple. Reprenons l'exemple du problème de production de l'introduction. Sous forme standard (en introduisant des variables d'écart), le PL s'écrit

$$\begin{array}{l} \max\limits_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right]. \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array}\right. \end{array} \tag{2.6}$$

On a $m = 3$, $n = 5$, $\text{rang}(A) = m = 3$. Une base est donnée par $B = \{3,4,5\}$ avec $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La solution de base réalisable correspondante est $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top = (\underbrace{0,0}_{\mathbf{x}_H}, \underbrace{81,55,20}_{\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$.

Remarque. Il y a *au plus* C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

2.4 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}\,, \tag{2.7}$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

Commençons par rappeler les notions de polyèdre et d'ensemble convexe :

- Un *polyèdre* Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ où $\mathcal{A}$ est une matrice $m \times n$.
- Un ensemble E est dit *convexe* si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition 2.2. *L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.*

Exemple. L'ensemble $\mathcal{D}_R = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\right\}$ est représenté sur la figure 2.2.

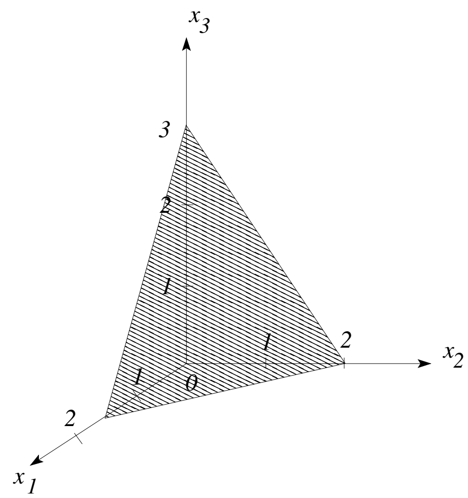


Fig. 2.2 – Polyèdre des solutions réalisables

Définition 2.4. *Un point $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$ est un* <u>sommet</u> *(ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.*

Théorème 2.1. $\mathbf{x}$ *est une solution de base réalisable si et seulement si* $\mathbf{x}$ *est un sommet de $\mathcal{D}_R$.*

On a vu sur l'exemple de l'introduction que la solution était atteinte sur un sommet de $\mathcal{D}_R$ et correspond donc à une solution de base. Le résultat général s'énonce ainsi :

Théorème 2.2. *L'optimum de la fonction objectif F sur $\mathcal{D}_R$, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_R$.*

Pour résoudre un PL sous forme standard, il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables (les sommets de $\mathcal{D}_R$). Tout se passe donc avec les solutions de base.

L'ensemble $\mathcal{D}_R$ n'est pas nécessairement borné. En fait pour un PL, 3 situations (et seulement 3) peuvent se produire :

1. $\mathcal{D}_R = \emptyset$: le PL n'a pas de solution.
2. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$: le maximum de F vaut $+\infty$. Si $\mathcal{D}_R$ est borné, ce cas est exclu.
3. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur $\mathcal{D}_R$: le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

Remarque. On a vu qu'il y a au plus C_n^m solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre un système linéaire ($\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$). La résolution d'un système linéaire par une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de m^3 opérations. Si on explore toutes les solutions de base et que l'on compare les coûts correspondants, on effectue de l'ordre de $m^3 C_n^m$ opérations. Ce nombre est vite très grand avec n et m. Par exemple, avec $n = 20$ et $m = 10$, on a $3 \cdot 10^8$ opérations. Dans la méthode du simplexe, on va explorer seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif. On va réduire ainsi le nombre de solution de base à explorer et donc le nombre de système linéaire à résoudre.

2.5 Algorithme du simplexe

La méthode du simplexe est due à G. Dantzig (1947). Elle comporte 2 phases.

- **Phase 1 - Initialisation** : Trouver une solution de base réalisable (ou bien détecter l'impossibilité).
- **Phase 2 - Progression** : On passe d'un sommet à un sommet voisin pour augmenter la fonction objectif (ou bien on détecte une fonction objectif F non majorée).

2.5.1 L'algorithme du simplexe proprement dit : la phase 2

On dispose d'une solution de base réalisable $\underline{\mathbf{x}}$ d'un PL sous forme standard. A une permutation près des colonnes , la matrice A peut s'écrire

$$A = (A_B \mid A_H)$$

avec A_B une matrice carrée de taille $m \times m$, *inversible*, correspondant aux variables de base et A_H une matrice de taille $m \times (n-m)$, correspondant aux variables hors-base. On décompose également (à la même permutation près des composantes)

$$\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}}_B \mid \underline{\mathbf{x}}_H)^\top$$

Le but est de trouver une autre base B^* et une solution de base $\mathbf{x}^*$ associée telles que

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\underline{\mathbf{x}}) \qquad (\mathbf{x}^* \text{ est meilleur que } \underline{\mathbf{x}})$$

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (*variable entrante*) et faire sortir à la place une variable de base (*variable sortante*).

a) Calcul des coûts réduits et variable entrante

On écrit la fonction objectif F avec les variables de base/hors-base. On a $\mathbf{b} = A\mathbf{x} = A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H$ avec A_B inversible donc $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}(\mathbf{b} - A_H\mathbf{x}_H)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^\top\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^\top\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_H^\top\mathbf{x}_H \text{ avec } \mathbf{c} = (\mathbf{c}_B \mid \mathbf{c}_H)^\top \\ &= \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}(\mathbf{b} - A_H\mathbf{x}_H) + \mathbf{c}_H^\top\mathbf{x}_H \\ &= \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_H)\mathbf{x}_H \end{aligned}$$

Or $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ (car $\underline{\mathbf{x}}_H = 0$) et $\mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^\top\underline{\mathbf{x}} = F(\underline{\mathbf{x}})$ donc

$$F(\mathbf{x}) = F(\underline{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_H)\mathbf{x}_H. \tag{2.8}$$

Le vecteur

$$\boxed{\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_H} \tag{2.9}$$

s'appelle vecteur des <u>*coûts réduits*</u>.

- Si les coûts réduits sont tous négatifs i.e. $\mathbf{L}_H^\top \leq 0$, il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif F : l'algorithme se termine *normalement* c'est-à-dire qu'on a trouvé une solution de base réalisable <u>*optimale*</u>.
- Dans le cas contraire (i.e. $\exists(\mathbf{L}_H)_i > 0$), on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable hors-base qui a le coût réduit <u>*positif le plus grand possible*</u>.

On note $e \notin B$ l'indice de la *variable entrante*. On choisit e tel que

$$(\mathbf{L}_H)_e = \max_j \Big\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\Big\}$$

ce qu'on note par

$$\boxed{e = \operatorname*{argmax}_j \Big\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\Big\}} \tag{2.10}$$

Remarque. Si on traite d'un problème de minimisation c'est-à-dire avec $\min F(\mathbf{x})$, alors la variable entrante x_e est déterminée par l'indice

$$e = \operatorname*{argmin}_j \Big\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j < 0\Big\}$$

b) Variable sortante

Une fois l'indice e choisi, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on augmente x_e jusqu'à annuler une des variables de base. Cette variable sera alors la *variable sortante*.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad A_B\mathbf{x}_B + A^e x_e = \mathbf{b} \qquad \text{où } A^e \text{ désigne la } e\text{-ième colonne de } A \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = A_B^{-1}(\mathbf{b} - A^e x_e) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = \underline{\mathbf{x}}_B - A_B^{-1}A^e x_e \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = \underline{\mathbf{x}}_B - \mathbf{z}x_e \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\boxed{\mathbf{z} = A_B^{-1}A^e \in \mathbb{R}^m.} \tag{2.11}$$

- Si $\mathbf{z} \leq 0$, on peut augmenter x_e autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base $\mathbf{x}_B$. La fonction objectif n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$ i.e. le maximum de F vaut $+\infty$. Dans ce cas, l'algorithme s'arrête.
- Sinon (i.e. il existe $z_i > 0$), pour avoir la positivité $(\underline{\mathbf{x}}_B)_i - z_i x_e \geq 0$ pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $(\underline{\mathbf{x}}_B)_i/z_i$ pour $i = 1, \cdots, m$ avec $z_i > 0$, est le plus petit possible. On choisit

  $$\boxed{s = \operatorname*{argmin}_i \Big\{\frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0\Big\}} \tag{2.12}$$

  On a, dans ce cas, $x_s = 0$ et $\mathbf{x}_B \geq 0$. La valeur de la variable entrante est donnée par

  $$\boxed{x_e = \min_i \Big\{\frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0\Big\}} \tag{2.13}$$

Résumé de la méthode du simplexe en phase 2 (progression)

1. – *Calcul des variables de base réalisables* : étant donné $A = (A_B \mid A_H)$, on calcule les variables de base réalisables $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.
   – *Calcul des coûts réduits* : $\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H$
   – Si $\mathbf{L}_H \leq 0$ alors $\underline{\mathbf{x}}_B$ est une solution optimale ($\rightarrow$ arrêt de l'algo.).
2. *variable entrante* : $e = \mathrm{argmax}_j \left\{ (\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0 \right\}$
3. *variable sortante* : Calcul de $\mathbf{z} = A_B^{-1} A^e$ puis $s = \mathrm{argmin}_i \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0 \right\}$.
4. On obtient une nouvelle base B^* et une nouvelle matrice A_{B^*} dans laquelle la colonne A^e remplace la colonne A^s. Calcul de $A_{B^*}^{-1}$ et retour en 1.

2.5.2 Méthode des dictionnaires

On considère un PL sous forme standard, c'est-à-dire de la forme

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

On se place à une itération donnée dans la méthode du simplexe. On dispose d'une base B ainsi que des variables de base $\mathbf{x}_B$ et des variables hors-base $\mathbf{x}_H$. On veut obtenir une nouvelle solution de base réalisable en déterminant des variables entrante et sortante pour augmenter F. Le principe de la méthode des dictionnaires est le suivant :

Principe de la méthode des dictionnaires : on exprime les variables de base $\mathbf{x}_B$ ainsi que F en fonction des variables hors-base $\mathbf{x}_H$. On obtient un système linéaire qu'on appelle **dictionnaire**. On choisit alors la variable entrante comme la variable de x_H qui fait le plus augmenter F. On détermine la variable sortante en choisissant la valeur de la variable entrante la plus grande possible tout en maintenant les conditions de positivité sur les variables de base $\mathbf{x}_B$.

Exemple du problème de production. Le problème de production de l'introduction s'écrit sous forme standard (variables d'écart e_1, e_2, e_3)

$$\max F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

⋆ **Etape 1**.
– *Solution de base réalisable initiale* :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ e_1 = 81,\ e_2 = 55,\ e_3 = 20 \text{ avec } F = 0.$$

– **Dictionnaire** : On exprime les variables de base e_1, e_2, e_3 en fonction des variables hors-base x_1, x_2.

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2 \\ e_3 = 20 - 2x_1 - x_2 \\ \hline F = 6x_1 + 4x_2 \end{array}}$$

– *Variable entrante* x_e : $\max\limits_{>0}\{\mathbf{6},\ 4\} = 6 \Rightarrow \boxed{x_e = x_1}$.

– *Variable sortante* x_s : on maintient les contraintes $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $e_3 \geq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \min_{>0}\{\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\} = 10 \Rightarrow \boxed{x_s = e_3}.$$

– *Nouvelle Solution de base réalisable* :

$$\boxed{x_1 = 10}, x_2 = 0,\ e_1 = 51,\ e_2 = 15,\ \boxed{e_3 = 0} \text{ avec } F = 60.$$

⋆ **Etape 2**.

– *Dictionnaire* : On exprime la nouvelle variable de base x_1 en fonction de x_2 et e_3 (e_3 est une nouvelle variable hors-base). On utilise la 3ème équation du dictionnaire de l'étape 1 et on substitue x_1 dans les autres relations.

$$\begin{array}{l}
x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\
e_1 = 81 - 3(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 9x_2 \\
e_2 = 55 - 4(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 5x_2 \\
\hline
F = 6(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) + 4x_2
\end{array}$$

ce qui donne le dictionnaire :

$$\begin{array}{|l|}
\hline
x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\
e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3 \\
e_2 = 15 - 3x_2 + 2e_3 \\
\hline
F = 60 + x_2 - 3e_3 \\
\hline
\end{array}$$

– *Variable entrante* x_e : $\max\limits_{>0}\{\mathbf{1},\ -3\} = 1 \Rightarrow \boxed{x_e = x_2}$.

– *Variable sortante* x_s : on maintient $x_1 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_2 = \min_{>0}\{\frac{10}{1/2}, \frac{51}{15/2}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}\} = 5 \Rightarrow \boxed{x_s = e_2}.$$

– *Nouvelle Solution de base réalisable (étape 2)* :

$$x_1 = \frac{15}{2},\ \boxed{x_2 = 5}, e_1 = \frac{27}{2},\ \boxed{e_2 = 0}, e_3 = 0 \text{ avec } F = 65.$$

⋆ **Etape 3**.

– *Dictionnaire* : On exprime la nouvelle variable de base x_2 en fonction des variables hors-base e_2 et e_3. On utilise la 3ème équation du dictionnaire de l'étape 2 et on substitue x_2 dans les autres relations.

$$\begin{array}{|l|}
\hline
x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\
x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3 \\
e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_3 \\
\hline
F = 65 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}e_2 - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}e_3 \\
\hline
\end{array}$$

Tous les coûts réduits sont ≤ 0 donc on ne peut plus augmenter F : l'optimum est atteint et la solution optimale est

$$x_1^* = \frac{15}{2},\ x_2^* = 5,\ e_1^* = \frac{27}{2},\ e_2^* = 0,\ e_3^* = 0 \text{ avec } \max F = 65.$$

2.5.3 Méthode des tableaux

Les calculs précédents peuvent se simplifier si on s'arrange pour avoir toujours "$A_B = I_d$". On dit "qu'on maintient l'identité sous la base". De cette façon, la résolution d'un système $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ est immédiate, puisque $\mathbf{x}_B = b$. On va donc chercher à travailler avec la forme *simpliciale* de PL (cf. (2.5)). On suppose donc que la matrice A se décompose en

$$A = (I_m \mid A_H)$$

où I_m est la matrice identité d'ordre m, et on dispose d'une solution de base réalisable $\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}}_B \mid \underline{\mathbf{x}}_H)^\top$ avec $\underline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$ et $\underline{\mathbf{x}}_H = 0$. Dans ce cas, les coûts réduits (cf. (2.9)) se simplifient en :

$$\boxed{\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_H} \tag{2.14}$$

et les indices e et s des variables entrante et sortante sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \operatorname*{argmax}_j \Big\{(\mathbf{L}_H)_j, \quad \text{avec } (\mathbf{L}_H)_j > 0\Big\} \\ s &= \operatorname*{argmin}_i \Big\{\frac{b_i}{a_{ie}}, \quad \text{avec } a_{ie} = (A_H)_{i,e} > 0\Big\} \end{aligned}} \tag{2.15}$$

avec

$$\boxed{x_e = \frac{b_s}{a_{se}}}. \tag{2.16}$$

Une fois les variables entrante et sortante choisies, on doit retrouver un système *simplicial.*

a) Retour à un système simplicial et mise à jour des matrices de base

Après permutation des variables entrante et sortante, la nouvelle base $\tilde{B}$ et le nouvel ensemble des indices hors-base $\tilde{H}$ valent

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{B} &= B + \{e\} - \{s\} \\ \widetilde{H} &= H - \{e\} + \{s\} \end{aligned}} \tag{2.17}$$

La nouvelle matrice s'écrit alors

$$A' = \left(A_{\widetilde{B}} \mid A_{\widetilde{H}}\right).$$

La matrice $A_{\widetilde{B}}$ est donnée par :

$$A_{\widetilde{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & a_{1,e} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & a_{s,e} & & \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & a_{m,e} & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Puisque $a_{s,e} > 0$, la matrice $A_{\widetilde{B}}$ est inversible et on a :

$$A_{\widetilde{B}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & -a_{1,e}/a_{s,e} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & 1/a_{s,e} & & \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -a_{m,e}/a_{s,e} & & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.18}$$

Plus précisément, pour tout $i = 1, \cdots, m$,

$$\left(A_{\widetilde{B}}^{-1}\right)_{ij} = \delta_{ij} \text{ si } j \neq s \qquad \text{et} \qquad \left(A_{\widetilde{B}}^{-1}\right)_{is} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ie}}{a_{se}}, & \text{si } i \neq s \\ \dfrac{1}{a_{se}}, & \text{si } i = s \end{cases}$$

On factorise alors la matrice A' par $A' = A_{\widetilde{B}}\left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)$ avec

$$\boxed{\widetilde{A}_{\widetilde{H}} = A_{\widetilde{B}}^{-1} A_{\widetilde{H}}}. \tag{2.19}$$

On note $\mathbf{x}'$ la nouvelle solution de base après permutation des variables entrante et sortante. On obtient

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad A'\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad A_{\widetilde{B}}\left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)\mathbf{x}' = \widetilde{\mathbf{b}}. \end{aligned}$$

avec le second membre

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{b}} = A_{\widetilde{B}}^{-1}\mathbf{b}}. \tag{2.20}$$

On obtient ainsi un système sous forme *simplicial.*

En tenant compte de la forme explicite de $A_{\widetilde{B}}^{-1}$ donné par (2.18), on a les formules suivantes pour le calcul de $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$.

Proposition 2.3. *On note $[M]_i$ la i-ème ligne (vecteur) d'une matrice M. On a les relations pour les matrices*

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_i &= \left[A_{\widetilde{H}}\right]_i - \frac{a_{ie}}{a_{se}}\left[A_{\widetilde{H}}\right]_s, \quad \forall i \neq s \\ \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s &= \frac{1}{a_{se}}\left[A_{\widetilde{H}}\right]_s. \end{aligned}} \tag{2.21}$$

et de même avec le second membre :

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{b}_i &= b_i - \frac{a_{ie}}{a_{se}} b_s, \quad \forall i \neq s \\ \widetilde{b}_s &= \frac{b_s}{a_{se}}. \end{aligned}} \tag{2.22}$$

b) Mise à jour des coûts réduits

On a $F(\mathbf{x}) = F_{opt} + \mathbf{L}_H^\top \mathbf{x}_H$ où $F_{opt} = F(\underline{\mathbf{x}})$ avec $\underline{\mathbf{x}}$ une solution de base réalisable associée à la base B. On veut exprimer F dans la nouvelle base $\widetilde{B} = B + \{e\} - \{s\}$ et avec le nouvel ensemble d'indices des variables hors-base $\widetilde{H} = H - \{e\} + \{s\}$.

Proposition 2.4. *On a* $F(\mathbf{x}) = \widetilde{F}_{opt} + \widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^\top \mathbf{x}_{\widetilde{H}}$ *avec*

$$\boxed{\widetilde{F}_{opt} = F_{opt} + (\mathbf{L}_H)_e \widetilde{b}_s} \tag{2.23}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^{\top} = \mathbf{L}_{\widetilde{H}}^{\top} - (\mathbf{L}_H)_e \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s} \tag{2.24}$$

avec $\widetilde{b}_s = \dfrac{b_s}{a_{se}}$ *et où* $\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s$ *désigne la s-ième ligne de* $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$.

Démonstration. Si on note

$$\mathbf{L} = (0 \mid \mathbf{L}_H)^{\top} \in \mathbb{R}^n,$$

alors la fonction objectif s'écrit

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= F_{opt} + \mathbf{L}^{\top}\mathbf{x} = F_{opt} + \sum_{j\in H} L_j x_j \\
&= F_{opt} + \sum_{j\in H-\{e\}+\{s\}} L_j x_j + \underbrace{L_e}_{=(\mathbf{L}_H)_e} x_e - \underbrace{L_s}_{=0} x_s \\
&= F_{opt} + \sum_{j\in\widetilde{H}} L_j x_j + (\mathbf{L}_H)_e x_e \\
&= F_{opt} + \mathbf{L}_{\widetilde{H}}^{\top}\mathbf{x}_{\widetilde{H}} + (\mathbf{L}_H)_e x_e. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

On exprime ensuite x_e par rapport aux nouvelles variables hors-base, en écrivant la relation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sur la composante s :

$$\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = \mathbf{b}$$

ce qui donne

$$x_s + \sum_{j\in H} a_{sj}x_j = b_s.$$

On écrit alors

$$x_s + \sum_{j\in H-\{e\}} a_{sj}x_j + a_{se}x_e = b_s. \tag{2.26}$$

Puisque $a_{ss} = 1$ (car $A_B = I_m$), on obtient

$$x_s + \sum_{j\in H-\{e\}} a_{sj}x_j = \sum_{j\in H-\{e\}+\{s\}} a_{sj}x_j = \sum_{j\in\widetilde{H}} a_{sj}x_j.$$

La relation (2.26) donne $x_e = \dfrac{b_s}{a_{se}} - \displaystyle\sum_{j\in\widetilde{H}} \frac{a_{sj}}{a_{se}}x_j$. En notant $\widetilde{b}_s = \dfrac{b_s}{a_{se}}$ et en remarquent que $\left(\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)_{sj} = \dfrac{a_{sj}}{a_{se}}$, on obtient

$$x_e = \widetilde{b}_s - \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s \mathbf{x}_{\widetilde{H}},$$

où $\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s$ désigne la s-ième ligne de $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$. En injectant l'expression de x_e dans (2.25), on obtient :

$$F(\mathbf{x}) = \underbrace{F_{opt} + (\mathbf{L}_H)_e\widetilde{b}_s}_{\widetilde{F}_{opt}} + \underbrace{\left(\mathbf{L}_{\widetilde{H}}^{\top} - (\mathbf{L}_H)_e \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s\right)}_{\widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^{\top}} \mathbf{x}_{\widetilde{H}}.$$

□

c) Mise en place de la méthode des tableaux

A chaque étape de la méthode des tableaux, on regroupe dans un seul tableau, la matrice A et second membre b, les coûts réduits et la valeur F_{opt} de la fonction objectif sur la solution de base courante. Dans le tableau, on sépare les variables de base des variables hors-base (voir le tableau 2.1).

variables de base $\mathbf{x}_B$	variables hors-base $\mathbf{x}_H$	
$A_B = I_m$	A_H	b
$\mathbf{L}_B = 0$	$\mathbf{L}_H$	F_{opt}

TAB. 2.1 – Méthode des tableaux

On utilise les formules de mise à jour données par les Proposition (2.3) et (2.4). En traduisant ces formules sur le tableau ci-dessus, la méthode des tableaux s'écrit alors :

1. *choix de la variable entrante* $(e \in H)$: $e = \underset{j}{\text{argmax}} \left\{ (\mathbf{L}_H)_j, \quad \text{avec } (\mathbf{L}_H)_j > 0 \right\}$.
2. *choix de la variable sortante* $(s \in B)$: $s = \underset{i}{\text{argmin}} \left\{ \frac{b_i}{a_{ie}}, \quad \text{avec } a_{ie} = (A_H)_{ie} > 0 \right\}$.
3. pour $i \neq s$, $\text{ligne}[i] \leftarrow \text{ligne}[i] - \frac{a_{ie}}{a_{se}} \text{ligne}[s]$.
4. $\text{ligne}[s] \leftarrow \frac{1}{a_{se}} \text{ligne}[s]$.

Remarque pratique importante. Compte tenu des relations (2.21)–(2.24), les transformations sur les lignes concernent également *le second membre* et *la ligne des coûts réduits.*

Au début de l'étape suivante, on commence par permuter les variables entrante et sortante dans le tableau.

d) Exemple

Reprenons encore une fois le problème de production (sous forme standard) :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Une solution de base réalisable évidente est donnée par $e_1 = 81$, $e_2 = 55$, $e_3 = 20$ (variables de base) et $x_1 = x_2 = 0$ (variables hors-base), ce qui donne une valeur de la fonction objectif $F_{opt} = 0$.

$\star$ **Etape 1.**

variables de base			variables hors-base		
e_1	e_2	e_3	x_1	x_2	b
1	0	0	3	9	81
0	1	0	4	5	55
0	0	1	2	1	20
0	0	0	6	4	$F_{opt} = 0$

variable entrante : $\max_j\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\} = 6 \ \Rightarrow\ x_e^{(1)} = x_1$ variable entrante.

variable sortante : $x_e^{(1)} = x_1 = \min\left(\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{20}{2} \ \Rightarrow x_s^{(1)} = e_3$ variable sortante.

L'inverse de la matrice de base est donnée par $A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

⋆ **Etape 2.**

e_1	e_2	x_1	e_3	x_2	$\widetilde{b}$
1	0	0	-3/2	15/2	51
0	1	0	-2	3	15
0	0	1	1/2	1/2	10
0	0	0	-3	1	$F_{opt} = 60$

variable entrante : $\max_j\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\} = 1 \ \Rightarrow\ x_e^{(2)} = x_2$ variable entrante.

variable sortante : $x_e^{(2)} = x_2 = \min\left(\frac{51}{15/2}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}, \frac{10}{1/2}\right) = \frac{15}{3} \ \Rightarrow x_s^{(2)} = e_2$ variable sortante.

L'inverse de la matrice de base est donnée par $A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette étape correspond à l'examen du sommet $\mathbf{x} = (x_1 = 10,\ x_2 = 0)$ de l'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables (cf. Figure 2.1).

⋆ **Etape 3.**

e_1	x_2	x_1	e_3	e_2	$\widetilde{b}$
1	0	0	7/2	-5/2	27/2
0	1	0	-2/3	1/3	5
0	0	1	5/6	-1/6	15/2
0	0	0	-11/3	-1/3	$F_{opt} = 65$
			< 0	< 0	

Tous les nouveaux coûts réduits sont négatifs. L'optimum est donc atteint avec $\max F = 65$.

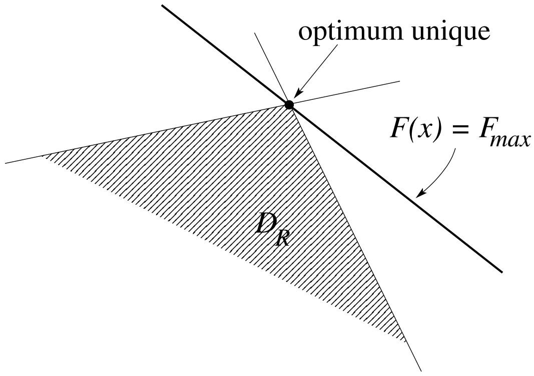
Solution optimale $\mathbf{x}^*$ *:*

$$\begin{cases} e_1^* = 27/2,\ x_2^* = 5,\ x_1^* = 15/2 \\ e_3^* = e_2^* = 0 \end{cases}$$

2.5.4 Finitude du simplexe

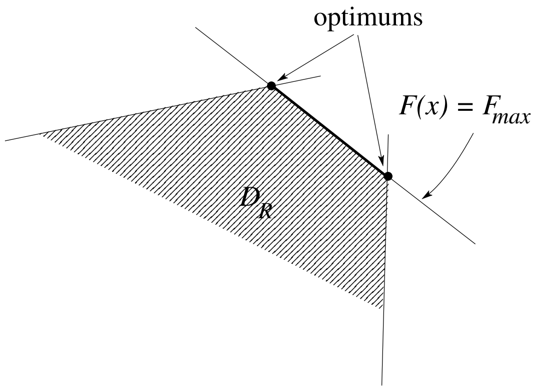
A chaque étape de l'algorithme du simplexe (en phase 2), on peut distinguer des cas remarquables qui conduisent tous à l'arrêt de l'algorithme.

1. Si les coûts réduits $\mathbf{L}_H < 0$, alors la solution de base réalisable courante est l'unique optimum.

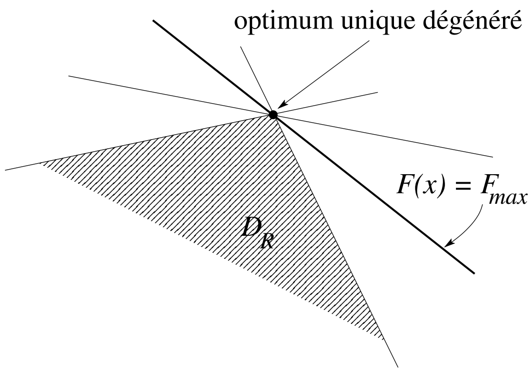


2. Si les coûts réduits $\mathbf{L}_H \leq 0$, alors il y a deux cas remarquables :

   i) si $(\mathbf{L}_H)_e = 0$ et $x_e > 0$, alors l'optimum n'est pas unique.



   ii) si $(\mathbf{L}_H)_e = 0$ et $x_e = 0$, alors l'optimum est unique (a priori). Dans ce cas, la base est dite **dégénérée** c'est-à-dire qu'il existe une variable de base *nulle*.



3. Si $(\mathbf{L}_H)_e > 0$ et x_e est non borné alors la fonction objectif F n'est pas majorée.

Une solution de base réalisable est dite **dégénérée** si au moins une des variables de base est *nulle*.

Théorème 2.3. *Si au cours de l'algorithme du simplexe, aucune base rencontrée n'est dégénérée, alors l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations.*

Démonstration. A une itération donnée de l'algorithme, soit on détecte une fonction objectif non majorée ($\rightarrow$ arrêt de l'algo.), soit elle est strictement croissante car $\widetilde{F}_{opt} - F_{opt} = (\mathbf{L}_H)_e \dfrac{b_s}{a_{se}} = (\mathbf{L}_H)_e x_e > 0$ puisque $(L_H)_e > 0$ et $x_e > 0$ (par hypothèse, aucune base rencontrée n'est dégénérée). Par conséquent, on ne rencontre jamais une base déjà rencontrée à une itération précédente. Le nombre de solution de base réalisable étant fini ($\leq C_n^m$), l'algorithme s'arrête nécessairement en un nombre fini d'itérations. □

Remarque : S'il existe une base dégénérée, alors on peut rencontrer un éventuel *cyclage* de l'algorithme : on retrouve une base déjà rencontrée et on boucle indéfiniment. Pour traiter les cas de dégénérescence, on peut appliquer la règle de Bland (1977) qui assure l'arrêt de l'algorithme en un nombre fini d'itérations. Cette règle s'énonce de la façon suivante : *Lorsque plusieurs variables sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours celle qui a l'indice le plus petit.*

2.5.5 Initialisation et variables artificielles : la phase 1

Pour un PL sous forme canonique pure avec les contraintes $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, on peut déterminer facilement une solution de base réalisable dans le cas où $\mathbf{b} \geq 0$. En effet, sous forme standard les contraintes deviennnent $A\mathbf{x}+\mathbf{e} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{x}, \mathbf{e} \geq 0$ où $\mathbf{e}$ désignent les variables d'écarts. Une solution de base réalisable évidente est alors $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{e} = \mathbf{b} \geq 0$. Cependant, pour un PL sous forme standard, il n'y a pas toujours de solution de base réalisable évidente. On va voir comment contruire des solutions de base réalisable : c'est la phase d'initialisation du simplexe.

On considère le PL sous forme standard

$$(PL) \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

On ne suppose pas que la matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ est de rang plein, ni qu'il existe bien des solutions réalisables. Pour obtenir une solution de base réalisable ou bien pour détecter l'impossibilité, on introduit un problème de programmation linéaire **auxiliaire** pour des variables supplémentaires appelées **variables artificielles**.

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ les variables artificielles et on considère

$$(PLA) \quad \begin{cases} \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{a})} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \\ A\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{a} \geq 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

On a la propriété (évidente) suivante.

Proposition 2.5. *Un (PL) admet une solution réalisable si et seulement si le problème auxiliaire (PLA) admet une solution de base optimale avec* $\mathbf{a} = 0$.

Ce résultat fournit un procédé pratique pour obtenir une solution de base réalisable pour le problème (PL). On applique l'algorithme du simplexe au problème auxiliaire (PLA). A la fin du simplexe, le coût minimal est nul sinon on a détecté l'impossibilité pour (PL) (i.e. $\mathcal{D}_R = \emptyset$). A la fin du simplexe sur (PLA), si tout s'est déroulé normalement (coût nul), on cherche à éliminer de la base toutes les variables artificielles. Deux cas de figure se présentent alors :

1. On a réussi à faire sortir toutes les variables artificielles. On passe à la phase 2 du simplexe.

2. S'il reste des variables artificielles dans la base (base *dégénérée*) alors les lignes associées à ces variables sont des contraintes redondantes qu'on élimine.

Résumé de la phase d'initialisation du simplexe (phase 1).

On note F_{aux} la valeur de la fonction objectif du problème auxiliaire (PLA) à la fin du simplexe, c'est-à-dire $F_{aux} = \min_{(\mathbf{x},\mathbf{a})} \sum_{i=1}^{m} a_i$.

1. Si $F_{aux} = 0$ et $\nexists a_j \in X_B$ où X_B désigne l'ensemble des variables de base pour (PLA), alors fin normale de la phase 1. On passe à la phase 2 du simplexe.
2. Si $F_{aux} = 0$ et $\exists a_j \in X_B$ avec $a_j = 0$, alors on supprime les lignes et colonnes associées aux a_j et on passe à la phase 2.
3. Si $F_{aux} > 0$ alors pas de solution réalisable ($\mathcal{D}_R = \emptyset$).

2.6 Analyse post-optimale

L'analyse optimale permet de déterminer des intervalles de variations des données pour lesquels la base optimale B^* n'est pas modifiée. Elle permet de déterminer la sensibilité de (PL) par rapport aux données. Une faible variation des données entraine-t-elle un changement important de la solution optimale ?

2.6.1 Analyse post-optimale de l'objectif

On regarde l'influence des coefficients de la fonction objectif sur l'optimum. On considère un PL sous forme standard qui admet une base optimale B^* c'est-à-dire un PL pour lequel l'algorithme du simplexe se termine normalement. A l'optimum, on a la condition suivante d'optimalité :

Condition d'optimalité :

$$\boxed{\mathbf{L}_{H^*}^\top = \mathbf{c}_{H^*}^\top - \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{H^*}^* \leq 0} \tag{2.29}$$

où $A_{H^*}^*$ est la matrice hors-base obtenue à l'optimum dans le tableau du simplexe. A une permutation près des colonnes, A se décompose en $A = (A_{B^*} \mid A_{H^*})$ et la matrice $A_{H^*}^*$ est donnée par $A_{H^*}^* = A_{B^*}^{-1} A_{H^*}$.

> *La condition d'optimalité est une condition suffisante pour qu'une solution de base réalisable soit optimale.*

En effet, on a, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \mathbf{L}_{H^*}^\top \mathbf{x}_{H^*}^\top$$

où $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_{B^*}^* \mid \mathbf{x}_{H^*}^* = 0)$ est une solution de base réalisable associée à la base B^*, avec $\mathbf{x}_{B^*}^* = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b}$. Par conséquent, sous la condition d'optimalité (2.29) c'est-à-dire avec $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$, on a

$$F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \geq 0$$

c'est-à-dire que $\mathbf{x}^*$ est optimale.

On utilise la condition d'optimalité pour déterminer l'influence d'un coefficient de la fonction objectif F. On remplace ce coefficient par un paramètre et on calcule la condition d'optimalité. On obtient alors une condition sur ce paramètre. Cette condition est une condition nécessaire pour que la solution de base optimale soit inchangée et une condition suffisante pour que la solution obtenue soit optimale.

Exemple. On reprend l'exemple du problème de production de l'introduction et on veut regarder la sensibilité de l'optimum par rapport au prix de vente unitaire du produit P_1 qui vaut 6. De combien peux-t-on faire varier ce prix, sans changer le plan de production ? On remplace le coefficient 6 par un paramètre c_1 dans F :

$$\mathbf{c}_{B^*}^\top = (0,\ 4,\ c_1), \quad \mathbf{c}_{H^*}^\top = (0,\ 0).$$

On a trouvé la solution de base optimale $\mathbf{x}_{B^*}^* = (e_1^*, x_2^*, x_1^*)$, $\mathbf{x}_{H^*} = (e_3^*, e_2^*)$ avec $e_1^* = 27/2$, $x_2^* = 5$, $x_1^* = 15/2$ et $F^* = 65$. De plus,

$$A_{H^*}^* = \begin{pmatrix} 7/2 & -5/2 \\ -2/3 & 1/3 \\ 5/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Les coûts réduits valent donc

$$\mathbf{L}_{H^*}^\top = \mathbf{c}_{H^*}^\top - \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{H^*}^* = \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{6}c_1,\ \frac{c_1}{6} - \frac{4}{3}\right).$$

La condition d'optimalité $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ donne alors

$$\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8.$$

Interprétation. Si on choisit $\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8$, la solution de base optimale est inchangée c'est-à-dire que le plan de production ne change pas. On a $F^* = \frac{15}{2}c_1 + 20$. Avec $c_1 = 8$ (la valeur max. permise pour c_1), on obtient $F^* = 80$ soit un écart de $\Delta F = 15$.

2.6.2 Analyse post-optimale du second membre des contraintes

On examine à présent l'influence du second membre des contraintes sur la solution de base optimale. Soit une base optimale B^*. A l'optimum, une condition de faisabilité est satisfaite.

Condition de faisabilité :

$$\boxed{\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \geq 0.} \tag{2.30}$$

Pour déterminer l'influence d'un coefficient du second membre sur la solution optimale, on remplace ce coefficient par un paramètre. On obtient ainsi un second membre $\mathbf{d}$. On calcule alors la solution de base $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d}$ et on impose la *condition de faisabilité*. On obtient de cette façon une condition sur le paramètre introduit. Cette condition est une condition nécessaire pour que la base optimale B^* soit inchangée. En revanche, les valeurs de la solution de base $\mathbf{x}_{B^*}$ changent, mais $\mathbf{x}_{B^*}$ est toujours une solution de base réalisable optimale car on maintient les coûts réduits $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ inchangés.

Remarque. On calcule $A_{B^*}^{-1}$ directement à partir des tableaux du simplexe. Si l'algorithme du simplexe se déroule en $q+1$ étapes, alors $A_{B^*}^{-1} = A_{B_q}^{-1} \times A_{B_{q-1}}^{-1} \times \cdots \times A_{B_2}^{-1} \times A_{B_1}^{-1}$ où la matrice $A_{B_k}^{-1}$ est déterminée par (2.18) à l'étape k du simplexe.

Exemple. Avec l'exemple du problème de production, on veut examiner la sensibilité de la solution optimale par rapport à la quantité disponible de main d'oeuvre qui vaut 55 unités. On introduit donc un paramètre $d_2 \in \mathbb{R}$ avec le second membre

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 81 \\ d_2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

et on calcule $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d}$ avec $A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$. On obtient

$$\mathbf{x}_{B^*} = \begin{pmatrix} e_1^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 - \frac{5}{2}d_2 \\ \frac{1}{3}(d_2 - 40) \\ \frac{1}{6}(-d_2 + 100) \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

La condition de faisabilité $\mathbf{x}_{B^*} \geq 0$ donne alors :

$$40 \leq d_2 \leq 60{,}4$$

Interprétation. Si on choisit $40 \leq d_2 \leq 60{,}4$ alors la solution de base réalisable $\mathbf{x}_{B^*}$ donnée par (2.31) est optimale.

2.7 Dualité

2.7.1 Introduction et définition

Revenons encore une fois au problème de production de l'introduction. Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources b_i, $1 \leq i \leq m$, de l'entreprise. Il propose à l'entreprise un prix unitaire y_i, $1 \leq i \leq m$, pour chacune des ressources. L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit P_j un prix de vente au moins égal au profit c_j qu'elle ferait en vendant ses produits. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} &3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq c_1 = 6 \\ &9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq c_2 = 4 \\ &y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

De son côté, l'acheteur cherche à minimiser le prix total d'achat. On se demande alors quels sont les prix unitaires y_i, $1 \leq i \leq m$, que l'acheteur doit proposer à l'entreprise en question pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources ? Le problème peut donc s'écrire

$$\min_{\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)} [G(\mathbf{y}) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3]$$

avec les contraintes (2.32).

Définition 2.5. *Au programme linéaire primal*

$$(PL) \quad \begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ &\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

on associe le programme linéaire dual

$$(PLD) \quad \boxed{\begin{aligned} &\min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\ &\begin{cases} A^\top\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

Comparaison primal/dual.

$$
\begin{array}{rcl}
\boxed{\textit{Primal}} & & \boxed{\textit{Dual}} \\
\max(F) & \leftrightarrow & \min(G) \\
\text{coefficient } \mathbf{c} \text{ de } F & \leftrightarrow & \text{second membre } \mathbf{c} \\
\text{second membre } \mathbf{b} & \leftrightarrow & \text{coefficient } \mathbf{b} \text{ de } G \\
m \text{ contraintes inégalités } (\leq) & \leftrightarrow & m \text{ contraintes de positivité} \\
n \text{ contraintes de positivité} & \leftrightarrow & n \text{ contraintes inégalités } (\geq)
\end{array}
$$

Si le problème primal est sous forme standard avec les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alors on passe à la forme canonique pure en écrivant les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$. De façon générale, on a la définition suivante lorsque le problème primal est sous forme <u>*canonique mixte*</u> :

$$
\begin{array}{ll}
\boxed{\text{Primal}} & \boxed{\text{Dual}} \\
\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] & \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\
\forall i \in I_1,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in I_1,\ y_i \geq 0 \\
\forall i \in I_2,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \forall i \in I_2,\ y_i \text{ de signe quelconque} \\
\forall j \in J_1,\ x_j \geq 0 & \forall j \in J_1,\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \\
\forall j \in J_2,\ x_j \text{ de signe quelconque} & \forall j \in J_2,\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j
\end{array}
$$

2.7.2 Propriétés - Théorèmes de dualité

Proposition 2.6. *Le dual du dual est le primal*

Démonstration. A partir de la définition du dual d'un PL sous forme canonique pure :

$$
\begin{array}{l}
\min\limits_{\mathbf{y}} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\
\left\{ \begin{array}{l} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
\iff
\begin{array}{l}
\max\limits_{\mathbf{y}} \left[-G(\mathbf{y}) = (-\mathbf{b})^\top \mathbf{y}\right] \\
\left\{ \begin{array}{l} -A^\top \mathbf{y} \leq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

Si on prend le dual du dual, on a donc

$$
\begin{array}{l}
\min\limits_{\mathbf{x}} \left[(-\mathbf{c})^\top \mathbf{x}\right] \\
\left\{ \begin{array}{l} \left(-A^\top\right)^\top \mathbf{x} \geq (-\mathbf{b})^\top \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
\iff
\begin{array}{l}
\max\limits_{\mathbf{x}} \left[\mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\
\left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

et on reconnait le problème primal du départ. □

On s'intéresse à présent au lien entre les solutions de programmes linéaires en dualité.

Théorème 2.4. THÉORÈME FAIBLE DE DUALITÉ
Soit $\mathbf{x}$ *une solution réalisable d'un (PL) sous forme canonique mixte et* $\mathbf{y}$ *une solution réalisable du problème dual (PLD). Alors :*

1. $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{y})$
2. *Si* $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y})$ *alors* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont des solutions optimales de (PL) et (PLD) respectivement.*

Démonstration. Dans le cas où (PL) est sous forme canonique pure :

1. On a d'une part $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ et d'autre part $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq 0$. Par conséquent,

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq (A^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \underbrace{A\mathbf{x}}_{\leq \mathbf{b}} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = G(\mathbf{y}) \text{ car } \mathbf{y} \geq 0$$

2. Soient $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ des solutions réalisables de (PL) et (PLD) respectivement telles que $F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*)$. D'après 1., pour toute solution réalisable $\mathbf{x}$ de (PL), on a $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*)$ donc $\mathbf{x}^*$ est une solution réalisable optimale. Idem pour $\mathbf{y}^*$. $\square$

Théorème 2.5. THÉORÈME FORT DE DUALITÉ
Si le problème primal (PL) admet une solution réalisable optimale $\mathbf{x}^*$ *alors le problème dual (PLD) admet lui aussi une solution réalisable optimale* $\mathbf{y}^*$ *et on a*

$$F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*).$$

Démonstration. On suppose que (PL) est sous forme standard. Si (PL) admet une solution réalisable optimale, il admet une *solution de base* réalisable optimale (cf. Théorème 2.2). On note B^* la base optimale et on désigne par $\mathbf{x}^*$ la solution de base réalisable optimale : $\mathbf{x}^* = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b}$. On choisit alors

$$\boxed{\mathbf{y}^* = (A_{B^*}^{-1})^\top \mathbf{c}_{B^*}}.$$

Montrons que $\mathbf{y}^*$ est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD). On a

$$\begin{array}{rcl} A_{H^*}^\top \mathbf{y}^* & = & A_{H^*}^\top (A_{B^*}^{-1})^\top \mathbf{c}_{B^*} \\ & = & \left(A_{B^*}^{-1} A_{H^*}\right)^\top \mathbf{c}_{B^*} \\ & = & \mathbf{c}_{H^*} - \mathbf{L}_{H^*}. \end{array}$$

Or, à l'optimum tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls ($\mathbf{L}_{H^*} \leq 0$) donc $A_{H^*}^\top \mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}_{H^*}$. Par définition, on a $A_{B^*}^\top \mathbf{y}^* = \mathbf{c}_{B^*}$ et donc on obtient

$$\begin{array}{l} A^\top \mathbf{y}^* \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y}^* \text{ de signe quelconque.} \end{array}$$

Par conséquent, $\mathbf{y}^*$ est une <u>solution réalisable</u> du dual (PLD). On remarquera que le problème primal (PL) étant mis sous forme standard, il n'y a pas de contrainte de positivité sur les variables $\mathbf{y}$ du dual. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} F(\mathbf{x}^*) & = & \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \\ & = & \Big(\underbrace{(A_{B^*}^{-1})^\top \mathbf{c}_{B^*}}_{\mathbf{y}^*}\Big)^\top \mathbf{b} \\ & = & G(\mathbf{y}^*) \end{array}$$

et donc par le Théorème faible de dualité, $\mathbf{y}^*$ est optimale pour (PLD). $\square$

On a vu qu'il y avait 3 cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal (PL) :
(1) il existe (au moins) une solution optimale.
(2) l'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
(3) pas de solution réalisable ($\mathcal{D}_R = \emptyset$).

Les mêmes situations se retrouvent pour le problème dual. Plus précisément, le lien entre les deux problèmes en dualité est donné par le résultat suivant.

Théorème 2.6. *Etant donnés un problème primal (PL) et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes peut se produire.*
(a) les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).
(b) un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.
(c) aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.

Il y a donc 3 situations (au lieu de 9) qui peuvent se résumer dans le tableau suivant :

		Dual		
		(1) Solution optimale	*(2) Optimum infini*	*(3) pas de solution*
Primal	*(1) Solution optimale*	(a)	impossible	impossible
	(2) Optimum infini	impossible	impossible	(b)
	(3) pas de solution	impossible	(c)	impossible

2.7.3 Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

On s'intéresse au cas (a) où les problèmes primal et dual possèdent chacun des solutions optimales (optimum fini). On peut alors calculer l'une à partir de l'autre.

Théorème 2.7. *Soient* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *des solutions réalisables respectivement du problème primal (PL) et du problème dual (PLD). Alors* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont des solutions réalisables optimales si et seulement si les conditions d'optimalité primal-dual (COPD) suivantes sont vérifiées :*
- *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'inégalité stricte dans (PL) (resp. dans (PLD)) alors la variable correspondante de (PLD) (resp. de (PL)) est nulle.*
- *Si la valeur d'une variable dans (PL) ou (PLD) est strictement positive alors la contrainte correspondante de l'autre programme est une égalité.*

Supposons que le problème primal s'écrive sous forme canonique mixte. Alors $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont optimales respectivement pour le problème primal et le problème dual *si et seulement si* on a les COPD :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall i \in I_1,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \ \textbf{ou}\ y_i = 0 \\[2ex] \bullet\ \forall j \in J_1,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \ \ \textbf{ou}\ x_j = 0 \end{cases}$$

Démonstration de la condition nécessaire du Théorème 2.7. Supposons pour simplifier que le problème primal (PL) soit mis sous forme canonique pure. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des solutions réalisables *optimales* de (PL) et (PLD) respectivement. On a donc $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ et $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq 0$. En introduisant les variables d'écart $\mathbf{e}$ et ε respectivement pour (PL) et (PLD), on a

$$\begin{array}{l} A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{e} \geq 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} A^\top \mathbf{y} - \varepsilon = \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0, \ \varepsilon \geq 0 \end{array}$$

Dans ces conditions,

$$\begin{array}{l} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = (A^\top \mathbf{y} - \varepsilon)^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} - \varepsilon^\top \mathbf{x} \\ G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} = (A\mathbf{x} + \mathbf{e})^\top \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y}. \end{array}$$

Or d'après le Théorème de la dualité forte, $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y})$ donc on obtient

$$\boxed{\varepsilon^\top \mathbf{x} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y} = 0}. \tag{2.33}$$

Puisque $\mathbf{x} \geq 0$ et $\mathbf{y} \geq 0$, on a nécessairement

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_i x_i = 0, & \forall i \\ e_j y_j = 0, & \forall j \end{array} \right.$$

ce qui donne les COPD (encore appelées "relations d'exclusion") :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varepsilon_i \neq 0 \text{ alors } x_i = 0 \\ \text{Si } x_i \neq 0 \text{ alors } \varepsilon_i = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } e_j \neq 0 \text{ alors } y_j = 0 \\ \text{Si } y_j \neq 0 \text{ alors } e_j = 0. \end{array} \right.$$

La réciproque (condition suffisante) se démontre à partir du Théorème faible de dualité. □

Utilisation pratique des COPD.

La dualité et les COPD permettent souvent de vérifier si une solution réalisable d'un (PL) est optimale ou non, à partir de la connaissance d'une solution optimale du problème dual. Lorsque (PL) et (PLD) ont des solutions réalisables optimales $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ respectivement, on a :

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \ \Rightarrow \ y_i^* = 0$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \ \Rightarrow \ x_j^* = 0$

et

- $y_i^* > 0 \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$
- $x_j^* > 0 \ \Rightarrow \ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$

Exemple. Le problème dual du problème de production s'écrit

$$\min_{\mathbf{y}} \left[G(\mathbf{y}) = 81 y_1 + 55 y_2 + 20 y_3 \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq 4 \\ y_1, \ y_2, \ y_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Le problème primal (PL) admet la solution optimale :

$$\begin{array}{lcl} e_1^* = 27/2 > 0 & \stackrel{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & y_1^* = 0 \\ x_1^* = 15/2 > 0 & \stackrel{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & 3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 6 \ (\varepsilon_1^* = 0) \\ x_2^* = 5 > 0 & \stackrel{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & 9y_1^* + 5y_2^* + y_3^* = 4 \ (\varepsilon_2^* = 0) \\ e_2^* = e_3^* = 0 & & \end{array}$$

En résolvant le système pour $\mathbf{y}^*$, on obtient la solution optimale du problème dual :

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1/3, \quad y_3^* = 7/3.$$