Chapitre 1 : Programmation linéaire

J.-F. Scheid

v2.1

1) Modélisation

En Recherche Opérationnelle (RO), modéliser un problème consiste à identifier:

- les **variables** intrinsèques (inconnues)
- les différentes **contraintes** auquelles sont soumises ces variables
- l'**objectif** visé (optimisation).

Dans un problème de programmation linéaire **(PL)** les contraintes et l'objectif sont des fonctions **linéaires** des variables. On parle aussi de *programme linéaire*.

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités (non entières) de produits P_1 et P_2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

- *Variables* : x_1 et x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).
- *Fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif F correspond au bénéfice total : $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. On cherche donc

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Contraintes* :
    - Disponibilité de chacune des ressources :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 55 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 20 \end{aligned}$$

    - Positivité des variables: $x_1, x_2 \geq 0$.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un *programme linéaire* :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{array}\right.$$

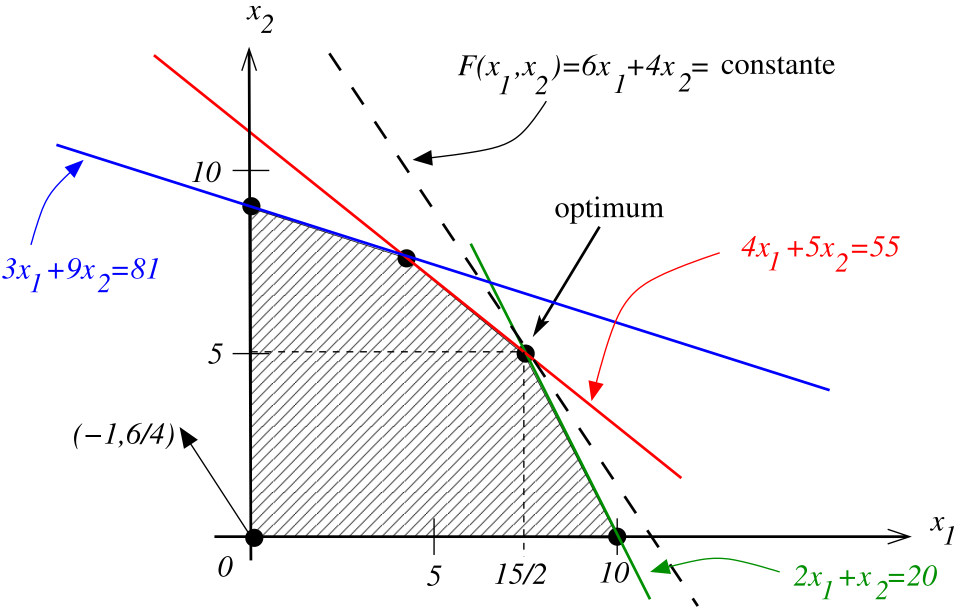
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) Résolution graphique (PL à 2 variables)

Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des **demi-plans**.

Intersection de ces demi-plans = ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes.

L'ensemble des contraintes est un **polygône convexe**.


x_2
$F(x_1,x_2)=6x_1+4x_2=$ constante
10
optimum
$4x_1+5x_2=55$
$3x_1+9x_2=81$
5
$(-1,6/4)$
x_1
0
5
15/2
10
$2x_1+x_2=20$

Détermination du maximum de F

Fonction objectif $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \Rightarrow$ droite de coefficient directeur $(-1, 6/4)$.

Pour déterminer $\max F$, on fait "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes $\Rightarrow$ *solution optimale* $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$ avec $\max(F) = 65$.

On remarque que le maximum de F est atteint en **un sommet** du **polygône convexe** des contraintes.

II. Formes générales d'un programme linéaire

1) Forme canonique mixte

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$

- contraintes inégalités : $\forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$
- contraintes égalités : $\forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$
- contraintes de signes : $\forall j \in J_1,\ x_j \geq 0$
- $\forall j \in J_2,\ x_j$ de signe quelconque.

$I = I_1 \cup I_2$: ens. des indices de contraintes, $\mathrm{card}(I) = m \Rightarrow$ <u>m **contraintes**</u>

$J = J_1 \cup J_2$: ens. des indices des variables, $\mathrm{card}(J) = n \Rightarrow$ <u>n **variables**</u>

Notations

Vecteurs :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \quad (\text{les inconnues})\\
&\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n,\\
&\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d'égalité $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}}$$

3) Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme standard s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard *simpliciale* si A de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, se décompose en:

$$A = \left(I_m \mid H \right)$$

- I_m matrice identité de taille $m \times m$
- H matrice de taille $m \times (n - m)$

Remarque sur la positivité des variables.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. En fait, on peut toujours se ramener au cas $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$:

- Si la variable x a une borne inférieure non nulle $x \geq l$, il suffit de considérer la nouvelle variable $y = x - l$ à la place de la variable x et alors on a $y \geq 0$.
- S'il n'y a pas de borne inférieure sur x (variable libre), on peut toujours poser $x = y - z$ avec les nouvelles variables $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4) Variables d'écarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

Démonstration. *i)* Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b}, \;\; \mathbf{e} \geq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ sont appelées *variables d'écart*.

$$\text{Ainsi,} \quad \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

avec $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix}$ matrice de taille $m \times (n+m)$.

ii) (Réciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \right. \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{A}{-A} \right) \mathbf{x} \leq \left(\frac{\mathbf{b}}{-\mathbf{b}} \right) \\
& \Leftrightarrow \quad \tilde{\tilde{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}}
\end{aligned}
$$

où $\tilde{\tilde{A}}$ est une matrice de taille $2m \times n$ et $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2m}$. $\square$

Exemple. Problème de production de l'introduction.
PL sous forme standard. On introduit 3 variables d'écarts e_1, e_2, e_3.

$$\max_{(x_1,x_2,e_1,e_2,e_3)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont désormais x_1, x_2, e_1, e_2, e_3.

III. Solutions de base réalisables

PL sous *forme standard* ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

Hypothèse de rang plein

On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\text{rang}(A) = m \leq n}$.

Rappel : $\text{rang}(A) =$ nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes (=nombre max. de colonnes linéairement indépendantes).

Remarques : Sous l'hypothèse de rang plein :

- le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet toujours des solutions.
- si $m < n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une infinité de solution.
- si $m = n$, la solution est unique et vaut $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, dans ce cas, il n'y a rien à maximiser...
- Hypothèse non restrictive : si $\text{rang}(A) < m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution *en général*. Si $\text{rang}(A) < m$ et $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, il y a des équations redondantes qu'on peut supprimer.

Quelques définitions...

Définition (solution réalisable)

On appelle <u>solution réalisable</u> tout vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Définition (variables de base)

Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\mathrm{card}(B) = m$ tel que les colonnes A^j, $j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes A^j, $j \in B$, est <u>inversible</u>. On dit que l'ensemble B des indices est une <u>base</u>.

- Les variables $\mathbf{x}_B = (x_j,\ j \in B)$ sont appelées <u>variables de base</u>.
- Les variables $\mathbf{x}_H = (x_j,\ j \notin B)$ sont appelées <u>variables hors-base</u>.

Remarques.

- Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.
- Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$$A = (A_B |\ A_H) \text{ où } A_H \text{ est la matrice formée des colonnes } A^j,\ j \notin B$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}.$$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à

$$A_B \mathbf{x}_B + A_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

$\Rightarrow$ on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées (la matrice A_B est inversible)

Définition (solution de base)

On dit que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est solution de base associée à la base B si $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$.

Propriétés des solutions de base réalisables

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable alors $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Remarque. Il y a *au plus* C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

Exemple. Problème de production de l'introduction.
Sous forme standard, le PL s'écrit

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a $m = 3$, $n = 5$, $\mathrm{rang}(A) = m = 3$. **Une base** est donnée par $B = \{3, 4, 5\}$ avec $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **La solution de base réalisable** correspondante est $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top = (\underbrace{0, 0}_{\mathbf{x}_H}, \underbrace{81, 55, 20}_{\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$.

IV. Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

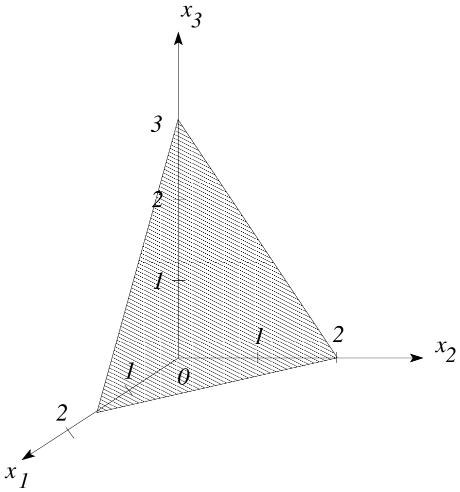
Définitions (rappels)

- Un *polyèdre* Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ où $\mathcal{M}$ est une matrice $m \times n$.
- Un ensemble E est dit *convexe* si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

Exemple. $\mathcal{D}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 3,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$



Caractérisation de l'optimum

Définition (sommet)

Un point $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$ est un <u>sommet</u> (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.

Théorème

- $\mathbf{x}$ est une solution de base réalisable si et seulement si $\mathbf{x}$ est un sommet de $\mathcal{D}_R$.
- L'optimum de la fonction objectif F sur $\mathcal{D}_R$, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_R$.

Tout se passe donc avec les solutions de base : pour résoudre un PL sous forme standard, **il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables** (les sommets de $\mathcal{D}_R$).

3 situations possibles :

1. $\mathcal{D}_R = \emptyset$: le PL n'a pas de solution.
2. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$: le maximum de F vaut $+\infty$ (cas exclu si $\mathcal{D}_R$ est borné).
3. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur $\mathcal{D}_R$: le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

Remarque. Au plus C_n^m solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre $A_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$. Une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de $\mathcal{O}(m^3)$ opérations.

$\Rightarrow$ *Exploration exhaustive* de toutes les solutions de base (comparaison des coûts correspondants) : $\mathcal{O}(m^3 C_n^m)$ opérations.
Ce nombre est vite très grand avec n et m. Par exemple, avec $n = 20$ et $m = 10$, on a $3 \cdot 10^8$ opérations.

Méthode du simplexe : on explore seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ on réduit le nombre de solution de base à explorer.