BL - CALCUL D'UN DETERMINANT PAR BLOCS

Dans ce qui suit la signature d'une permutation σ d'un ensemble fini sera notée $\varepsilon(\sigma)$, et l'ensemble des permutations d'un ensemble fini A sera notée $\mathscr{S}(A)$.

Deux nombres n et k tels que $1 \leq k \leq n$ étant fixés, l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ sera notée Φ.

Préliminaires

Proposition 1 Soit n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n-1$, et φ une application strictement croissante de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Il existe un unique prolongement de φ en une permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que la restriction à $[\![k+1, n]\!]$ soit également strictement croissante.
La signature $\varepsilon(\varphi)$ de ce prolongement est alors obtenue par la formule

$$\varepsilon(\varphi) = \operatorname{sign} \prod_{1 \leq i \leq k < j \leq n} (\varphi(j) - \varphi(i)) = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{k} (\varphi(i) - i)\right)}.$$

Soit

$$\{x_1, \ldots, x_{n-k}\} = [\![1, n]\!] \setminus \varphi([\![1, k]\!]),$$

avec

$$x_1 < \cdots < x_{n-k}.$$

La seule façon de prolonger φ en une permutation de $[\![1, n]\!]$ qui soit croissante sur $[\![k+1, n]\!]$ est de poser, pour $k+1 \leq i \leq n$,

$$\varphi(i) = x_{i-k}.$$

Déterminons alors la signature de cette permutation. C'est le signe du produit

$$\varepsilon(\varphi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\varphi(j) - \varphi(i)).$$

On remarque :
- que le produit $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\varphi(j) - \varphi(i))$ est positif car φ est croissante sur $[\![1, k]\!]$,
- que le produit $\displaystyle\prod_{k+1 \leq i < j \leq n} (\varphi(j) - \varphi(i))$ l'est également car φ est croissante sur $[\![k+1, n]\!]$.

La signature est donc le signe du produit

$$\prod_{1\leq i\leq k<j\leq n} (\varphi(j)-\varphi(i))\,.$$

Cherchons quels sont les termes négatifs. Pour une valeur de i fixée, on doit avoir

$$\varphi(j)<\varphi(i)\,,$$

ce qui revient à dire que $\varphi(j)$ appartient à $[\![1,\,\varphi(i)]\!]\setminus\varphi([\![1,\,i]\!])$. Cela donne donc $\varphi(i)-i$ termes, et par suite

$$\varepsilon(\varphi)=(-1)^{\left(\sum_{i=1}^{k}(\varphi(i)-i)\right)}\,.$$

Proposition 2 A tout couple (τ_1,τ_2) de $\mathscr{S}([\![1,\,k]\!])\times\mathscr{S}([\![k+1,\,n]\!])$ on associe de manière naturelle une permutation τ de $[\![1,\,n]\!]$. Alors

$$\varepsilon(\tau)=\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\,.$$

La signature $\varepsilon(\tau)$ est le signe du produit

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (\tau(j)-\tau(i))\,.$$

Il est composé de trois produits

$$\prod_{1\leq i<j\leq k} (\tau(j)-\tau(i))=\prod_{1\leq i<j\leq n} (\tau_1(j)-\tau_1(i))\,.$$

qui est $\varepsilon(\tau_1)$,

$$\prod_{k+1\leq i<j\leq n} (\tau(j)-\tau(i))=\prod_{k+1\leq i<j\leq n} (\tau_2(j)-\tau_2(i))\,,$$

qui est $\varepsilon(\tau_2)$, et

$$\prod_{1\leq i\leq k<j\leq n} (\tau(j)-\tau(i))=\prod_{1\leq i\leq k<j\leq n} (\tau_2(j)-\tau_1(i))\,,$$

qui est toujours positif car

$$\tau_2(j)\geq k+1>\tau_1(j)\,.$$

Cela donne la formule voulue.

Proposition 3 Soit σ une permutation de $[\![1,\, n]\!]$ et φ la bijection strictement croissante de $[\![1,\, k]\!]$ sur $\sigma([\![1,\, k]\!])$ prolongée à $[\![1,\, n]\!]$ par la proposition 1. Alors la restrictions τ_1 de $\varphi^{-1} \circ \sigma$ à $[\![1,\, k]\!]$ est une permutation de $[\![1,\, k]\!]$, et la restrictions τ_2 de $\varphi^{-1} \circ \sigma$ à $[\![k+1,\, n]\!]$ est une permutation de $[\![k+1,\, n]\!]$. De plus

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\,.$$

Comme σ envoie $[\![1,\, k]\!]$ sur $\sigma([\![1,\, k]\!])$ et φ^{-1} envoie $\sigma([\![1,\, k]\!])$ sur $[\![1,\, k]\!]$, on en déduit que $[\![1,\, k]\!]$ est stable par $\varphi^{-1} \circ \sigma$. Donc τ_1 est une permutation de $[\![1,\, k]\!]$. Le raisonnement est le même pour $[\![k+1,\, n]\!]$. On applique ensuite la proposition 2 pour avoir la signature, ce qui donne

$$\varepsilon(\varphi^{-1} \circ \sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\,.$$

On en déduit

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \sigma)) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\,.$$

Les notations de cette proposition sont donc telles que

$$\sigma(i) = \begin{cases} \varphi \circ \tau_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \varphi \circ \tau_2(i) & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}\,.$$

Déterminant par blocs

On utilise ici les notations introduites dans la proposition 3.

Théorème
Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n, et k tel que $1 \leq k < n$.
Si φ est dans Φ, notons D_φ le déterminant extrait de A formé des colonnes $1, \ldots, k$ et des lignes $\varphi(1), \ldots, \varphi(k)$, c'est-à-dire

$$D_\varphi = \det \left[a_{\varphi(i)j}\right]_{1 \leq i,j \leq k}\,.$$

Notons D'_φ le déterminant complémentaire de D_φ obtenu en prenant les autres lignes et les autres colonnes de A, c'est-à-dire

$$D_\varphi = \det \left[a_{\varphi(i)j}\right]_{k+1 \leq i,j \leq n}\,.$$

Alors

$$\det A = \sum_{\varphi \in \Phi} \varepsilon(\varphi) D_\varphi D'_\varphi\,.$$

On a, par définition,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}([\![1,n]\!])} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}, \cdots a_{\sigma(n)n}\,.$$

On regroupe les termes de cette somme en sommant tout d'abord sur toutes les permutations σ telles que

$$\sigma([\![1,\, k]\!]) = \varphi([\![1,\, k]\!])\,.$$

On a donc

$$\det A = \sum_{\varphi\in\Phi} \left(\sum_{\{\sigma \mid \sigma([\![1,k]\!])=\varphi([\![1,k]\!])\}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}, \cdots a_{\sigma(n)n} \right) ,$$

ce qui donne, en utilisant la proposition 3,

$$\det A = \sum_{\varphi\in\Phi} \left(\sum_{\{\sigma \mid \sigma([\![1,k]\!])=\varphi([\![1,k]\!])\}} \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) a_{\varphi\circ\tau_1(1)1} \cdots a_{\varphi\circ\tau_1(k)k} a_{\varphi\circ\tau_2(k+1)k+1} \cdots a_{\varphi\circ\tau_2(n)n} \right) .$$

On fait apparaître alors le produit de deux sommes

$$\det A = \sum_{\varphi\in\Phi} \varepsilon(\varphi) \left(\sum_{\tau_1\in\mathscr{S}([\![1,k]\!])} \varepsilon(\tau_1) a_{\varphi\circ\tau_1(1)1} \cdots a_{\varphi\circ\tau_1(k)k} \right) \left(\sum_{\tau_2\in\mathscr{S}([\![k+1,n]\!])} \varepsilon(\tau_2) a_{\varphi\circ\tau_2(k+1)k+1} \cdots a_{\varphi\circ\tau_2(n)n} \right) ,$$

ce qui donne exactement

$$\det A = \sum_{\varphi\in\Phi} \varepsilon(\varphi) D_\varphi D'_\varphi .$$

Exemples

1) Lorsque $k = 1$, un élément φ de Φ est un nombre entre 1 et n. Alors $D_i = a_{i1}$ et D'_i est le mineur de a_{i1}. De plus

$$\varepsilon(\varphi) = (-1)^{i-1} .$$

On retrouve la formule du développement par rapport à la première colonne.

De même si $k = n-1$, on retrouverait la formule du développement par rapport à la dernière colonne.

2) Lorsque $k = 2$, posons

$$\varphi(1) = i \quad \text{et} \quad \varphi(2) = i+j .$$

Donc

$$D_\varphi = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i+j1} & a_{i+j2} \end{vmatrix} .$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{2} (\varphi(j) - j) = (i-1) + (i+j-2) ,$$

et

$$\varepsilon(\varphi) = (-1)^{2i+j-3} = (-1)^{j-1} .$$

Remarquons que $j-1$ n'est autre que le nombre de lignes séparant la ligne i de la ligne $i+j$ du déterminant D_φ extrait.

Donnons par exemple le développement d'un déterminant d'ordre 4 par la formule précédente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

3) Si l'on regarde la matrice

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{bmatrix}$$

avec A_1 d'ordre k et A_2 d'ordre $n-k$, on a

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \,.$$

En effet, en dehors de l'application croissante φ qui est l'identité sur $[\![1,\,k]\!]$ et qui admet 1 pour signature, avec

$$D_\varphi = \det A_1 \quad \text{et} \quad D'_\varphi = \det A_2 \,,$$

tous les autres déterminants D_φ ont une ligne de zéros et sont nuls.

Si l'on prend cette fois

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ A_1 & C \end{bmatrix}$$

avec A_1 d'ordre k et A_2 d'ordre $n-k$, on a

$$\det A = (-1)^{k(n-k)} \det A_1 \det A_2 \,.$$

En effet, la seule application croissante intervenant dans le calcul et celle définie sur $[\![1,\,k]\!]$ par

$$\varphi(i) = n-k+i \,,$$

et

$$\sum_{i=1}^{k} (\varphi(i)-i) = \sum_{i=1}^{k} (n-k) = k(n-k) \,.$$

Généralisation

Dans le théorème que nous venons de démontrer, nous avons choisi les déterminants en prenant les k premières colonnes. Il n'est pas nécessaire de procéder ainsi. Le théorème suivant donne la formule générale.

THÉORÈME Soit φ et φ' dans Φ. On considère le déterminant $D_{\varphi,\varphi'}$ extrait de A formé des lignes $\varphi(1),\dots,\varphi(k)$, et des colonnes $\varphi'(1),\dots,\varphi'(k)$, c'est-à-dire

$$D_{\varphi,\varphi'} = \det \left[a_{\varphi(i)\varphi'(j)}\right]_{1\leq i,j\leq k} .$$

Soit $D'_{\varphi,\varphi'}$ le déterminant complémentaire de $D_{\varphi,\varphi'}$. Alors

$$\det A = \varepsilon(\varphi') \sum_{\varphi\in\Phi} \varepsilon(\varphi) D_{\varphi,\varphi'} D'_{\varphi,\varphi'} .$$

On construit une matrice A' en rangeant les colonnes de A dans l'ordre $\varphi'(1),\dots,\varphi'(n)$. On a alors

$$\det A' = \varepsilon(\varphi') \det A .$$

En appliquant la formule du théorème précédent au développement de $\det A'$, on en déduit la formule voulue.

Remarque : on peut bien sûr dans ces formules inverser le rôle des lignes et des colonnes.