BD - COEFFICIENTS BINOMIAUX

On pose

(1) $$\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \le p \le n \\ \\ 0 & \text{pour les autres couples } (p,n) \text{ de } \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Donc

(2) $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad (n \ge 0)$$

(3) $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad (n \ge 0)$$

(4) $$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (n \ge 0)$$

(5) $$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1} \qquad (p \ge 0\ ,\ n \ge 0)$$

Formules élémentaires

(6) $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

(7) $$\binom{n}{p} = \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p} \qquad (n \ne p)$$

(8) $$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \qquad (p \ne 0)$$

(9) $$\binom{n}{p} = \frac{p+1}{n-p}\binom{n}{p+1} \qquad (n \ne p)$$

(10) $$\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1} \qquad (p \ne 0)$$

Les trois formules suivantes donnent des résultats non nuls si $0 \leq q \leq p \leq n$.

(11) $$\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{n-p}$$

(12) $$\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{p-q}\binom{n+q-p}{n-p}$$

(13) $$\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{n+q-p}\binom{n+q-p}{q}$$

Si $n = n_1 + \cdots + n_q$ avec $n_i \geq 0$ pour tout i,

(14) $$\binom{n}{n_1 + \cdots + n_{q-1}}\binom{n_1 + \cdots + n_{q-1}}{n_1 + \cdots + n_{q-2}} \cdots \binom{n_1 + n_2}{n_1} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_q!}\,.$$

Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux éléments qui commutent dans un anneau et $n \in \mathbb{N}$. On a

(15) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

(avec la convention $a^0 = 1$).

Fonctions génératrices

Soit n dans $\mathbb{N}$ et z complexe.

(16) $$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k\,.$$

Si l'on écrit le développement en série entière à l'origine de $(1-z)^{-n}$, on obtient, pour $|z| < 1$,

$$(1-z)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-z)^k$$

ce qui donne

(17) $$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} z^k\,,$$

ou encore, en multipliant par z^n,

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} z^k, \tag{18}$$

En combinant les fonctions précédentes, on obtient de nombreuses relations faisant intervenir les coefficients binomiaux. Partons par exemple de la relation

$$(1+z)^n(1+z)^m = (1+z)^{n+m}.$$

On obtient en effectuant le produit

$$\sum_{r=0}^{n+m} \sum_{h+k=r} \binom{n}{k}\binom{m}{h} z^r = \sum_{r=0}^{n+m} \binom{n+m}{r} z^r,$$

d'où

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{h+k=r} \binom{n}{k}\binom{m}{h}. \tag{19}$$

Si r est compris entre 0 et $n+m$, les termes de la somme sont non nuls lorsque k est compris entre 0 et n et $r-k$ entre 0 et m. On obtient donc

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=\max(0,r-m)}^{\min(n,r)} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}. \tag{20}$$

En particulier, si $m=1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \tag{21}$$

et, si $m=n=r$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2. \tag{22}$$

La formule (19) peut se généraliser à un nombre quelconque de facteurs. Posons $n = n_1 + \cdots + n_p$. Alors, en écrivant

$$(1+z)^{n_1} \cdots (1+z)^{n_p} = (1+z)^n,$$

on obtient

$$\binom{n}{r} = \sum_{r_1+\cdots+r_p=r} \binom{n_1}{r_1} \cdots \binom{n_p}{r_p}. \tag{23}$$

En partant maintenant de la relation

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^n \left(\frac{z}{1-z}\right)^m = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{n+m},$$

on obtient en effectuant le produit des séries entières et en identifiant

$$\binom{r-1}{n+m-1} = \sum_{h+k=r} \binom{k-1}{n-1}\binom{h-1}{m-1}, \tag{24}$$

ou encore, en ne conservant que les termes non nuls, et pour $r \geq m+n$,

$$\binom{r-1}{n+m-1} = \sum_{k=n}^{r-m} \binom{k-1}{n-1}\binom{r-k-1}{m-1}. \tag{25}$$

En particulier, si $m = 1$, pour $r \geq n+1$,

$$\binom{r-1}{n} = \sum_{k=n}^{r-1} \binom{k-1}{n-1}, \tag{26}$$

ou, en changeant de notations, pour $r \geq n$,

$$\binom{r+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{r} \binom{k}{n}, \tag{27}$$

La formule (24) se généralise à un nombre quelconque de facteurs. Posons $n = n_1 + \cdots + n_p$. On obtient

$$\binom{r-1}{n-1} = \sum_{r_1+\cdots+r_p=r} \binom{r_1-1}{n_1-1}\cdots\binom{r_p-1}{n_p-1}. \tag{28}$$

Partons maintenant de la relation

$$(1+z)^{n+m}(1+z)^{-m} = (1+z)^n.$$

On obtient en développant le produit et en identifiant,

$$\binom{n}{r} = \sum_{h+k=r} (-1)^h \binom{m+n}{k}\binom{n+h-1}{m-1}, \tag{29}$$

ou encore, en déterminant les valeurs pour lesquelles les termes de la somme sont non nuls,

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0}^{\min(m+n,r)} (-1)^{r-k} \binom{m+n}{k}\binom{m+r-k-1}{m-1}. \tag{30}$$

En particulier, si $m = 1$ on obtient, lorsque $0 \leq r \leq n$,

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{n+1}{k} . \tag{31}$$

En partant de

$$(1-z)^{-(n+m)}(1-z)^m = (1-z)^{-n} ,$$

on obtient

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \sum_{h+k=r} \binom{m+n+h-1}{n+m-1} (-1)^k \binom{m}{k} , \tag{32}$$

ou, en ne conservant que les termes non nuls,

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \sum_{k=0}^{\min(m,r)} (-1)^k \binom{m+n+r-k-1}{n+m-1} \binom{m}{k} . \tag{33}$$

Si maintenant nous écrivons

$$(1+z)^n(1-z)^n = (1-z^2)^n ,$$

on obtient

$$\sum_{r=0}^{2n} \left(\sum_{h+k=r} \binom{n}{h} (-1)^k \binom{n}{k} \right) z^r = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} z^{2s} ,$$

et donc, en identifiant les termes pairs et les termes impairs, on obtient successivement

$$\sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2s-k} = (-1)^s \binom{n}{s} , \tag{34}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2s+1-k} = 0 . \tag{35}$$

En faisant de même avec

$$(1-z)^{-n}(1+z)^{-n} = (1-z^2)^{-n} ,$$

on obtiendra

$$\sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \binom{n+2s-k-1}{n-1} = \binom{n+s-1}{n-1} , \tag{36}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2s+1}(-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\binom{n+2s-k}{n-1}=0\,. \tag{37}$$

Autres formules

En utilisant la formule (13), on a

$$\sum_{k=s}^{n}\binom{r+k-1}{k}\binom{k}{s}=\sum_{k=s}^{n}\binom{r+k-1}{r+s-1}\binom{r+s-1}{s}=\binom{r+s-1}{s}\sum_{k=s}^{n}\binom{r+k-1}{r+s-1},$$

puis avec (26)

$$\sum_{k=s}^{n}\binom{r+k-1}{k}\binom{k}{s}=\binom{r+s-1}{s}\binom{r+n}{r+s}\,. \tag{38}$$

D'après (16), on a immédiatement, en prenant $z=1$,

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n\,, \tag{39}$$

et, en prenant $z=-1$,

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}=0\,. \tag{40}$$

Pour les sommes partielles des $\binom{n}{p}$, on a la relation suivante, valable si $0\leq k\leq n-1$,

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}=\sum_{p=0}^{k}2^p\binom{n-p-1}{k-p}\,. \tag{41}$$

On la démontre par récurrence sur n.

La relation est vraie lorsque $n=1$ ou $k=0$. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $n-1$, pour tout k compris entre 0 et $n-2$.

Pour une valeur de k comprise entre 1 et $n-1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p} &= \sum_{p=0}^{k}\binom{n-1}{p}+\sum_{p=1}^{k}\binom{n-1}{p-1}\\ &= \sum_{p=0}^{k}\binom{n-1}{p}+\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n-1}{p}\\ &= 2\sum_{p=0}^{k-1}\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{k}\,.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{k-1} 2^{p+1} \binom{n-1-p-1}{k-p-1} + \binom{n-1}{k} = \sum_{p=0}^{k} 2^p \binom{n-1-p}{k-p},$$

ce qui donne la relation au rang n.

Pour les sommes alternées, on a aussi

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n}{p} = (-1)^k \binom{n-1}{k}. \tag{42}$$

En effet cette somme vaut

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n-1}{p} + \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n-1}{p-1}$$

et se simplifie en donnant $(-1)^k \binom{n-1}{k}$.

Une conséquence immédiate de la formule (39) est la suivante

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{p} = 2^{n-k} \binom{n}{k}. \tag{43}$$

En effet, en changeant de variable puis en utilisant (13), on a

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{p} = \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n}{p+k} \binom{p+k}{p} = \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n}{n-k} \binom{n-k}{p} = \binom{n}{n-k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p}.$$

Voici une autre formule

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n-i}{n} 2^i = 2^{2n}, \tag{44}$$

qui, par changement de variable équivaut à

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^k = 1. \tag{45}$$

Nous donnons une démonstration de cette formule à l'aide des séries entières.

Considérons la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)^{n+1}}.$$

On peut la décomposer en éléments simples. En effet, si l'on pose $z-2=u$, on a

$$f(2+u)=\frac{1}{(-1-u)(-u)^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{u^{n+1}(1+u)}\,.$$

Mais

$$\frac{1}{1+u}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k+\frac{(-1)^{n+1}u^{n+1}}{u+1}\,,$$

donc

$$f(2+u)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{u^{n+1-k}}-\frac{1}{1+u}\,,$$

et finalement

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)^{n+1}}=\frac{1}{1-z}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2-z)^k}\,.$$

En utilisant le développement en série donné par la formule (17),

$$\frac{1}{(2-z)^k}=\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-k}=\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{k+j-1}{k-1}\left(\frac{z}{2}\right)^j\,,$$

on calcule le coefficient de z^n dans le membre de droite. Ce coefficient vaut

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k-1}{k-1}\frac{1}{2^{n+k}}=1-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k-1}{n}\frac{1}{2^{n+k}}\\ &= 1-\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n+j}{n}\left(\frac{z}{2}\right)^j\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}z^j\right)\,.$$

On calcule le coefficient de z^n dans ce produit des séries. Il vaut

$$\alpha_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}\,.$$

Alors, de l'égalité

$$1-\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}\,,$$

on déduit que

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}=1\,.$$

Autres fonctions génératrices

En combinant les fonctions génératrices on obtient

(46) $$\frac{1}{2}\left((1+z)^{2s}+(1-z)^{2s}\right)=\sum_{k=0}^{s}\binom{2s}{2k}z^{2k}\,.$$

(47) $$\frac{1}{2}\left((1+z)^{2s+1}+(1-z)^{2s+1}\right)=\sum_{k=0}^{s}\binom{2s+1}{2k}z^{2k}\,.$$

(48) $$\frac{1}{2}\left((1+z)^{2s}-(1-z)^{2s}\right)=\sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{2k+1}z^{2k+1}\,.$$

(49) $$\frac{1}{2}\left((1+z)^{2s+1}-(1-z)^{2s+1}\right)=\sum_{k=0}^{s}\binom{2s+1}{2k+1}z^{2k+1}\,.$$

En prenant $z=1$ dans ces formules, on obtient

(50) $$\sum_{k=0}^{s}\binom{2s+1}{2k}=\sum_{k=0}^{s}\binom{2s+1}{2k+1}=2^{2s}\,,$$

(51) $$\sum_{k=0}^{s}\binom{2s}{2k}=\sum_{k=0}^{s-1}\binom{2s}{2k+1}=2^{2s-1}\,.$$

En prenant $z=i$, on obtient les formules suivantes

(52) $$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{2s}{2k}=\mathrm{Re}(1+i)^{2s}=2^s\cos\frac{s\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{si } s=2r+1\\ (-1)^r2^{2r} & \text{si } s=2r\end{cases}\,.$$

(53) $$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{2s+1}{2k}=\mathrm{Re}(1+i)^{2s+1}=2^s\sqrt{2}\cos\left(\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}(-1)^r2^{2r} & \text{si } s=2r\\ (-1)^{r+1}2^{2r+1} & \text{si } s=2r+1\end{cases}\,.$$

(54) $$\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\binom{2s}{2k+1}=\mathrm{Im}(1+i)^{2s}=2^s\sin\frac{s\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{si } s=2r\\ (-1)^r2^{2r+1} & \text{si } s=2r+1\end{cases}\,.$$

(55) $$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{2s+1}{2k+1}=\mathrm{Im}(1+i)^{2s+1}=2^s\sqrt{2}\sin\left(\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}(-1)^r2^{2r} & \text{si } s=2r\\ (-1)^r2^{2r+1} & \text{si } s=2r+1\end{cases}\,.$$

En combinant les formules précédentes, on obtient les sommes de 4 en 4 :

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s}{4p} = 2^{4s-2} + (-1)^s 2^{2s-1} \tag{56}$$

$$\sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s}{4p+2} = 2^{4s-2} + (-1)^{s+1} 2^{2s-1} \tag{57}$$

$$\sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s}{4p+1} = \sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s}{4p+3} = 2^{4s-2} \tag{58}$$

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s+1}{4p} = \sum_{p=0}^{s} \binom{4s+1}{4p+1} = 2^{4s-1} + (-1)^s 2^{2s-1} \tag{59}$$

$$\sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s+1}{4p+2} = \sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s+1}{4p+3} = 2^{4s-1} + (-1)^{s+1} 2^{2s-1} \tag{60}$$

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s+2}{4p} = \sum_{p=0}^{s} \binom{4s+2}{4p+2} = 2^{4s} \tag{61}$$

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s+2}{4p+1} = 2^{4s} + (-1)^s 2^{2s} \tag{62}$$

$$\sum_{p=0}^{s-1} \binom{4s+2}{4p+3} = 2^{4s} + (-1)^{s+1} 2^{2s} \tag{63}$$

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s+3}{4p} = \sum_{p=0}^{s} \binom{4s+3}{4p+3} = 2^{4s+1} + (-1)^{s+1} 2^{2s} \tag{64}$$

$$\sum_{p=0}^{s} \binom{4s+3}{4p+1} = \sum_{p=0}^{s} \binom{4s+3}{4p+2} = 2^{4s+1} + (-1)^s 2^{2s} \tag{65}$$

On a encore d'autres fonctions génératrices :

(66)
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n}+\left(\frac{-z}{1+z}\right)^{2n}\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{2k-1}{2n-1}z^{2k}$$

(67)
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n+1}+\left(\frac{-z}{1+z}\right)^{2n+1}\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{2k-1}{2n}z^{2k}$$

(68)
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n}-\left(\frac{-z}{1+z}\right)^{2n}\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{2k}{2n-1}z^{2k+1}$$

(69)
$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2n}-\left(\frac{-z}{1+z}\right)^{2n}\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{2k}{2n}z^{2k+1}$$

En changeant z en iz, on obtient, pour z réel,

(70)
$$\mathrm{Re}\left(\frac{iz}{1-iz}\right)^{2n}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\binom{2k-1}{2n-1}z^{2k}$$

(71)
$$\mathrm{Re}\left(\frac{iz}{1-iz}\right)^{2n+1}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\binom{2k-1}{2n}z^{2k}$$

(72)
$$\mathrm{Im}\left(\frac{iz}{1-iz}\right)^{2n}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\binom{2k}{2n-1}z^{2k+1}$$

(73)
$$\mathrm{Im}\left(\frac{iz}{1-iz}\right)^{2n+1}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\binom{2k}{2n}z^{2k+1}$$

Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci, définie par $u_0=u_1=1$ et, si $n\geq 1$, la relation de récurrence

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}\,,$$

s'exprime en fonction des coefficients binomiaux par une des deux formules

(74)
$$u_n=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)}5^p\binom{n+1}{2p+1}$$

$$u_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n-p}{p}. \tag{75}$$

Les nombres $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2$ sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Il en résulte que la suite (u_n) est combinaison linéaire des suites $((1+\sqrt{5})/2)^n)$ et $((1-\sqrt{5})/2)^n)$. Avec les conditions initiales, on obtient l'expression de u_n sous la forme

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}},$$

et en développant par la formule du binôme, on obtient la première expression après simplification. La seconde se démontre facilement par récurrence à l'aide de (21).

Equivalents

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, on a alors l'équivalent suivant

$$(an+b)! \sim (an)^{an+b} e^{-an} \sqrt{2an\pi}. \tag{76}$$

En effet, d'après la formule de Stirling

$$(an+b)! = \left(\frac{an+b}{e}\right)^{an+b} \sqrt{2(an+b)\pi}.$$

Mais

$$(an+b)^{an+b} = e^{(an+b)\ln(an+b)} = e^{(an+b)(\ln(an)+b(an)^{-1}+\circ(n^{-1}))},$$

et en développant

$$(an+b)^{an+b} = e^{an\ln(an)+b+b\ln(an)+\circ(1)} \sim (an)^{an+b} e^b.$$

On en déduit facilement l'équivalent de $(an+b)!$ indiqué, puis les équivalents suivantes :

les nombres $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$ étant fixés, on a

$$\binom{an+b}{d} \sim \frac{(an)^d}{d!}. \tag{77}$$

On a aussi

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}, \tag{78}$$

et de manière générale, si $a \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$,

$$\binom{an+b}{cn+d} \sim \frac{\alpha\lambda^n}{\sqrt{n}} \tag{79}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2c(a-c)\pi}}\,\frac{a^b}{c^d(a-c)^{b-d}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{a^a}{c^c(a-c)^{a-c}}\,.$$

Lois binomiales

1) **Loi binomiale (positive)**

Une variable aléatoire X suit une loi **binomiale** $\mathscr{B}(n,p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]\,0,\,1\,[$, si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\,, \tag{80}$$

où $q = 1-p$.

Alors

$$\mathbb{E}(X) = np \tag{81}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = npq \tag{82}$$

$$g_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = (pz+q)^n\,. \tag{83}$$

La formule (84) est conséquences immédiate de la formule du binôme puisque

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k = (pz+q)^n\,.$$

On en déduit facilement

$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = np$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2 = npq\,.$$

Cas particulier : lorsque $n = 1$, on a une loi de **Bernoulli** de paramètre p telle que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = p\,. \tag{84}$$

Théorème — Soit $(X_1, \ldots, X_r)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, telles que X_i suive une loi binomiale $\mathscr{B}(n_i, p)$, alors

$$X = X_1 + \cdots + X_r$$

suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n_1 + \cdots + n_r, p)$.

Avec la fonction caractéristique, on a immédiatement, en raison de l'indépendance des variables aléatoires,

$$g_X(z) = \prod_{i=1}^{r} g_{X_i}(z) = (pz+q)^{n_1+\cdots+n_r}\,.$$

COROLLAIRE Toute variable binomiale de paramètre (n, p) peut être considérée comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

THÉORÈME Lorsque l'on effectue n épreuves indépendantes ne pouvant présenter que deux possibilités :
- réussite, avec probabilité p
- échec, avec probabilité $q = 1 - p$

la variable X donnant le nombre de réussites suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$.

L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque, sur n épreuves, k sont réussies et $n - k$ ne le sont pas. La probabilité d'une suite particulière de n épreuves vérifiant cette condition est donc $p^k q^{n-k}$. Comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k épreuves réussies parmi n, on obtient bien

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\,.$$

2) **Loi binomiale négative**

Une variable aléatoire X suit une loi **binomiale négative** de paramètres (n, p), avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]\,0,\,1\,[$, si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

(85) $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k\,,$$

où $q = 1 - p$.

Alors

(86) $$\mathbb{E}(X) = \frac{nq}{p}$$

(87) $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{nq}{p^2}$$

(88) $$g_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^n\,.$$

D'après la formule (17)

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k z^k = \frac{p^n}{(1-zq)^n}\,,$$

Les valeurs de $\mathbb{E}(x)$ et $\mathrm{Var}(X)$ s'en déduisent alors comme pour la loi binomiale positive.

Cas particulier : lorsque $n = 1$, on a une loi **géométrique** ou loi de **Pascal** de paramètre p telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^k\,. \tag{89}$$

THÉORÈME Soit $(X_1, \ldots, X_r)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, telles que X_i suive une loi binomiale négative de paramètres (n_i, p), alors

$$X = X_1 + \cdots + X_r$$

suit une loi binomiale négative de paramètres $(n_1 + \cdots + n_r, p)$.

Avec la fonction caractéristique, on a immédiatement, en raison de l'indépendance des variables aléatoires,

$$g_X(z) = \prod_{i=1}^{r} g_{X_i}(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{n_1+\cdots+n_r}\,.$$

Les valeurs de $\mathbb{E}(x)$ et $\mathrm{Var}(X)$ s'en déduisent alors comme pour les lois binomiales positives.

COROLLAIRE Toute variable binomiale négative de paramètre (n, p) peut être considérée comme la somme de n variables de Pascal indépendantes de paramètre p.

THÉORÈME Lorsque l'on effectue n épreuves indépendantes ne pouvant présenter que deux possibilités :
– réussite, avec probabilité p
– échec, avec probabilité $q = 1 - p$
la variable X qui est telle que la $n-$ième épreuve réussie se réalise la $X + n-$ième fois suit une loi binomiale négative de paramètres (n, p).

Dire que la $n-$ième épreuve réussie se réalise la $k+n-$ième fois, signifie qu'il y a eu k échecs parmi les $k+n-1$ premières épreuves, la $k+n-$ième étant un succès. La probabilité d'une telle suite particulière d'épreuves est donc $q^{k+n-1}p^n$. Mais il y a $\binom{k+n-1}{k}$ façons de choisir les k épreuves non réussies parmi $n + k - 1$. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+n-1}{k} q^k p^n = \binom{k+n-1}{n-1} q^k p^n\,.$$

BD 16

Propriétés arithmétiques des nombres $\binom{n}{p}$

Théorème Si d_n désigne le PGCD des nombres de l'ensemble $\left\{\binom{n}{k} \,\middle|\, 1 \leq k \leq n-1\right\}$, on a

$$d_n = \begin{cases} u & \text{si } n = u^k \text{ avec } u \text{ premier} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Quel que soit n, le nombre d_n divise $\binom{n}{1} = n$. Par ailleurs

$$n! = \binom{n}{k} k!(n-k)!\,.$$

Si n est premier, il est premier avec $k!(n-k)!$ donc divise $\binom{n}{k}$. Il en résulte qu'il divise d_n.

On a donc démontré que si n est premier, alors

$$d_n = n\,.$$

2) Par la formule du binôme, on a, pour tout entier r,

$$(r+1)^n - r^n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} r^k\,,$$

et ce nombre est divisible par d_n. On en déduit que, pour tout entier p, le nombre d_n divise la somme

$$\sum_{r=0}^{p-1} ((r+1)^n - r^n - 1) = p^n - p\,.$$

Soit a un facteur premier de d_n. On a donc

$$d_n = ab\,,$$

et, puisque d_n divise $a^n - a$, il en résulte que

$$a^n - a = sab\,,$$

donc

$$a^{n-1} - 1 = sb\,,$$

ce qui, d'après le théorème de Bézout, montre que a et b sont premiers entre eux. Donc d_n a des facteurs premiers d'ordre 1 au plus.

En particulier, si n est une puissance d'un nombre premier u, comme d_n divise n, il ne peut valoir que u ou que 1.

3) Exprimons $\binom{nm}{p}$ en fonction des coefficients $\binom{n}{k}$.

Notons
$$\Theta = \{\sigma = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid s_0 + \cdots + s_n = m\},$$
et, pour un élément σ de Θ, posons
$$H(\sigma) = \frac{m!}{s_0! \cdots s_n!}.$$
Alors

$$\begin{aligned}
(x+1)^{nm} &= ((x+1)^n)^m = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)^m \\
&= \sum_{\sigma \in \Theta} H(\sigma) \prod_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} x^k\right]^{s_k} \\
&= \sum_{p=0}^{nm} \left(\sum_{\{\sigma \in \Theta \mid \sum_{k=1}^{n} k s_k = p\}} H(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^{s_k} \right) x^p.
\end{aligned}$$

Si $0 < p < nm$, on a donc,
$$\binom{nm}{p} = \sum_{\{\sigma \in \Theta \mid \sum_{k=1}^{n} k s_k = p\}} H(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^{s_k}.$$

Notons Σ_1 la somme des termes correspondant à des σ tels que $s_1, \dots s_{n-1}$ ne soient pas tous nuls. Chaque terme contenant au moins un $\binom{n}{k}$ avec $1 \le k \le n-1$, est divisible par d_n. Donc Σ_1 est divisible par d_n.

Si $s_1, \dots, s_{n-1}$ sont tous nuls, alors
$$n s_n = p \quad \text{et} \quad s_0 + s_n = m.$$

Il y a donc deux possibilités :

– Le nombre p n'est pas divisible par n. Il n'existe pas de σ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} k s_k = p$$
  avec
$$s_1 = \cdots = s_{n-1} = 0.$$
  Dans ce cas
$$\binom{nm}{p} = \Sigma_1.$$

- On a $p = tn$ avec $1 \leq t \leq m-1$. Il existe un seul σ possible tel que $s_1, \ldots s_{n-1}$ ne soient pas tous nuls :
$$\sigma = (m-t, 0, \ldots, 0, t)\,,$$
et
$$H(\sigma) = \binom{m}{t}\,,$$
alors
$$\binom{nm}{p} = \Sigma_1 + \binom{m}{t}\,.$$

4) Lorsque $n = u^s$ avec u premier, montrons par récurrence sur s que $d_n = u$.

On a vu en 1) que la propriété est vraie pour $s = 1$. Supposons qu'elle le soit jusqu'à l'ordre $s-1$. Si l'on pose
$$n = u \quad \text{et} \quad m = u^{s-1}\,,$$
on a, par hypothèse de récurrence,
$$d_n = d_m = u\,,$$
et, d'après 3), les nombres $\binom{nm}{p}$ sont tous divisibles par u pour p compris entre 1 et $nm-1$. Il en résulte que u divise d_{nm}. Alors, puisque d_{nm} ne peut valoir que 1 ou u, c'est donc qu'il vaut u.

5) Soit n un entier ayant au moins deux facteurs premiers. Supposons que d_n soit différent de 1. Soit s un facteur premier de d_n. Alors
$$n = s^a m\,,$$
où s est premier avec m, et l'on a
$$\binom{s^a m}{s^a t} = \Sigma_1 + \binom{m}{t}\,,$$
avec $d_{s^a} = s$ divisant Σ_1. Il en, résulte que s divise $\binom{m}{t}$ pour tout t entre 1 et $m-1$, donc divise aussi d_m et finalement m. On obtient une contradiction. Il en résulte que d_n vaut 1.

Corollaire Le nombre $\displaystyle\binom{n}{p}$ est divisible par n pour tout p de $\{1, \ldots, n-1\}$ si et seulement si n est premier.

Corollaire Le nombre $\displaystyle\binom{n-1}{p-1}$ est divisible par p pour tout p de $\{1, \ldots, n-1\}$ si et seulement si n est premier.

Cela résulte de la formule
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}\,.$$

Le nombre $\binom{n}{p}$ est divisible par n si et seulement si $\binom{n-1}{p-1}$ est divisible par p.

Restes des coefficients du binôme modulo un entier premier p

> Théorème Soit a et u deux entiers positifs, b et v deux entiers tels que
>
> $$0 \leq v \leq p-1 \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq p-1\,.$$
>
> Alors, si p est premier,
>
> $$\binom{ap+b}{up+v} \equiv \binom{a}{u}\binom{b}{v} \mod p\,. \tag{90}$$

Notons $P(a,b)$ la propriété suivante :

quels que soient u positif, et v compris entre 0 et $p-1$,

$$\binom{ap+b}{up+v} \equiv \binom{a}{u}\binom{b}{v} \mod p\,.$$

1) Si $1 \leq b \leq p-1$, alors $P(a,b-1)$ implique $P(a,b)$.

Lorsque $1 \leq v \leq p-1$ et $u \geq 0$, on écrit

$$\binom{ap+b}{up+v} = \binom{ap+b-1}{up+v} + \binom{ap+b-1}{up+v-1}\,.$$

D'après $P(a,b-1)$, on a donc

$$\binom{ap+b}{up+v} \equiv \binom{a}{u}\binom{b-1}{v} + \binom{a}{u}\binom{b-1}{v-1} \mod p\,,$$

d'où

$$\binom{ap+b}{up+v} \equiv \binom{a}{u}\left(\binom{b-1}{v} + \binom{b-1}{v-1}\right) \equiv \binom{a}{u}\binom{b}{v} \mod p\,.$$

Lorsque $v=0$ et $u \geq 1$, on a cette fois

$$\binom{ap+b}{up} = \binom{ap+b-1}{up} + \binom{ap+b-1}{(u-1)p+p-1}\,.$$

D'après $P(a,b-1)$, on a donc

$$\binom{ap+b}{up} \equiv \binom{a}{u}\binom{b-1}{0} + \binom{a}{u-1}\binom{b-1}{p-1} = \binom{a}{u}\binom{b}{0} \mod p\,,$$

car

$$\binom{b}{0} = \binom{b-1}{0} = 1\,,$$

et, puisque $b < p$,

$$\binom{b-1}{p-1} = 0\,.$$

Si $u = v = 0$, le résultat est évident.

2) Si, pour $a \geq 1$, la propriété $P(a-1, p-1)$ est vraie, alors $P(a, 0)$ est vraie.

On a

$$\binom{ap}{up+v} = \binom{ap-1}{up+v} + \binom{ap-1}{up+v-1}\,,$$

ce qui s'écrit

$$\binom{ap}{up+v} = \binom{(a-1)p+p-1}{up+v} + \binom{(a-1)p+p-1}{up+v-1}\,.$$

Si $v \geq 1$, il résulte de $P(a-1, p-1)$ que

$$\binom{ap}{up+v} \equiv \binom{a-1}{u}\binom{p-1}{v} + \binom{a-1}{u}\binom{p-1}{v-1} \equiv \binom{a-1}{u}\binom{p}{v} \mod p\,.$$

Or, si p est premier, p divise $\binom{p}{v}$ donc

$$\binom{ap}{up+v} \equiv 0 \equiv \binom{a}{u}\binom{0}{v} \mod p\,.$$

Si $v = 0$ et $u \geq 1$,

$$\binom{ap}{up} = \binom{(a-1)p+p-1}{up} + \binom{(a-1)p+p-1}{(u-1)p+p-1}\,,$$

donc

$$\binom{ap}{up} \equiv \binom{a-1}{u}\binom{p-1}{0} + \binom{a-1}{u-1}\binom{p-1}{p-1} \equiv \binom{a-1}{u} + \binom{a-1}{u-1} \mod p\,,$$

ce qui donne

$$\binom{ap}{up} \equiv \binom{a}{u} \equiv \binom{a}{u}\binom{0}{0} \mod p\,.$$

Le résultat est évident si $u = v = 0$.

3) La propriété $P(0, b)$ est vraie.

En effet, lorsque $u \geq 1$, on a

$$\binom{b}{up+v} = \binom{0}{u}\binom{b}{v} = 0\,,$$

et lorsque $u = 0$,

$$\binom{b}{up+v} = \binom{0}{0}\binom{b}{v}.$$

Le théorème résulte des trois démonstrations précédentes.

Corollaire Soit x et y deux nombres entiers et p un nombre premier. Si l'on a, en base p, les écritures

$$x = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_0} \quad \text{et} \quad y = \overline{b_r b_{r-1} \dots b_0}\,,$$

alors

(91)
$$\binom{x}{y} \equiv \prod_{k=0}^{r} \binom{a_k}{b_k} \mod p\,.$$

La démonstration se fait par récurrence sur r. Si l'on écrit

$$x = px' + a_0 \quad \text{et} \quad y = py' + b_0\,,$$

alors, en base p,

$$x' = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_1} \quad \text{et} \quad y' = \overline{b_r b_{r-1} \dots b_1}\,,$$

et

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x'}{y'}\binom{a_0}{b_0} \mod p\,.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à x' et y', on obtient le résultat.

Exemple : si p est premier et $r \in \mathbb{N}$, on a

(92)
$$\binom{2p^r}{p^r} \equiv 2 \mod p\,.$$

Théorème Soit p un nombre premier. Si $1 \le k \le p$ et $0 \le n \le p-k$, on a

(93)
$$\binom{p-k}{n} \equiv (-1)^n \binom{n+k-1}{n} \mod p\,.$$

La démonstration se fait par récurrence décroissante sur k.

Remarquons tout d'abord que, lorsque $n = 0$, on a

$$\binom{p-k}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{k-1}{0}.$$

En particulier la propriété est vraie au rang p puisqu'alors $n = 0$.

Supposons la propriété vraie au rang $k+1$ et montrons qu'elle est vraie au rang k.

Si $1 \leq n \leq p-(k+1)$, on a

$$\begin{aligned}\binom{p-k}{n} &= \binom{p-(k+1)}{n} + \binom{p-(k+1)}{n-1} \\ &\equiv (-1)^n \binom{n+k}{n} + (-1)^{n-1}\binom{n-1+k}{n-1} \mod p \\ &\equiv (-1)^n \left(\binom{n+k}{n} - \binom{n-1+k}{n-1}\right) \mod p \\ &\equiv (-1)^n \binom{n+k-1}{n} \mod p\,.\end{aligned}$$

Si $n = p-k$, on a cette fois

$$\begin{aligned}\binom{p-k}{p-k} &= 1 = \binom{p-(k+1)}{p-(k+1)} \equiv (-1)^{p-(k+1)} \binom{p-1}{p-(k+1)} \\ &\equiv (-1)^{p-(k+1)} \left(\binom{p}{p-k} - \binom{p-1}{p-k}\right)\,.\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\binom{p}{p-k}$ est divisible par p si $1 \leq k \leq p-1$, donc

$$\binom{p-k}{p-k} \equiv (-1)^{p-k} \binom{p-1}{p-k} \mod p\,.$$

Exemples : si p est premier

(94) $$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \mod p \qquad (0 \leq n \leq p-1)\,,$$

(95) $$\binom{p-2}{n} \equiv (-1)^n (n+1) \mod p \qquad (0 \leq n \leq p-2)\,,$$

(96) $$\binom{p-3}{n} \equiv (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \mod p \qquad (0 \leq n \leq p-3)\,.$$

0	1																				
1	1	1																			
2	1	2	1																		
3	1	3	3	1																	
4	1	4	6	4	1																
5	1	5	10	10	5	1															
6	1	6	15	20	15	6	1														
7	1	7	21	35	35	21	7	1													
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1												
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1

TRIANGLE DE PASCAL