BB - PROLONGEMENT DE LA DERIVEE D'UNE FONCTION

Théorème 1 Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle $[u,\, v]$ de $\mathbb{R}$, dérivable sur $]u,\, v[$.
Si $f'(x)$ tend vers une limite finie ℓ lorsque x tend vers u, alors f est dérivable à droite en u, la fonction dérivée f' est continue à droite en u, et $f'(u)$ est égale à ℓ.
Si $f'(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers u, il en est de même du taux de variation $\dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}$.

Il résulte du théorème des accroissements finis qu'il existe $c(x)$ dans $]u,\, x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} = f'(c(x))\,.$$

Lorsque x tend vers u, il en est de même de $c(x)$ et donc

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{x\to u} f'(x) = \ell\,.$$

Si ℓ est finie, ce taux de variation tend vers ℓ. Il en résulte que f' est dérivable en u et que $f'(u)$ vaut ℓ. Alors

$$\lim_{x\to u} f'(x) = \ell = f'(u)\,,$$

et f' est continue en u.

Si ℓ est infinie, la fonction f n'est pas dérivable en u.

Remarque : on obtient un résultat identique pour une limite à gauche.

Etudions le cas des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{C}$.

Lemme Soit f une fonction dérivable sur une partie convexe K de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un espace de Banach E sur $\mathbb{C}$. Quels que soient x et y dans K, le rapport $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ appartient à l'enveloppe convexe fermée $\overline{\Gamma}_{x,y}$ de $f'(]x,\, y[)$.

Pour tout t de $[0,\, 1]$, posons

$$g(t) = \frac{f(tx+(1-t)y)}{x-y}\,.$$

L'application g est continue sur $[0,\,1]$ et dérivable sur $]\,0,\,1\,[$. De plus

$$g'(t) = f'(tx + (1-t)y)\,.$$

Alors $g(1) - g(0)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de $g'(\,]\,0,\,1\,[\,)$, c'est-à-dire à $\overline{\Gamma}_{x,y}$, et puisque

$$g(1) - g(0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,,$$

cela donne le lemme.

Théorème 2 Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une application dérivable sur U à valeurs dans un espace de Banach E sur $\mathbb{C}$. Soit x_0 dans $\overline{U}$. On suppose que $f'(x)$ admet une limite, notée $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 dans U. Alors $f(x)$ admet une limite, notée $f(x_0)$, lorsque x tend vers x_0 dans U, et

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ (x,y)\in U\times U\\ x\neq y}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in U}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x de $B(x_0, \eta) \cap U$, on ait

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si x et y sont distincts et se trouvent dans $B(x_0, \eta) \cap U$ qui est un ouvert convexe, il en est de même de $]\,x,\,y\,[$. Il existe ζ dans $\Gamma_{x,y}$ tel que

$$\left\|\zeta - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} t_1 f'(z_i)\,,$$

où les nombres t_i sont des réels positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{n} t_1 = 1\,,$$

et où les z_i appartiennent à $]\,x,\,y\,[$. Il en résulte que

$$\left\|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x_0)\right\| \leq \left\|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \zeta\right\| + \sum_{i=1}^{n} t_i \|f'(z_i) - f'(x_0)\| < \varepsilon\,.$$

Ceci prouve que la limite du rapport $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ lorsque x et y tendent vers x_0 dans U en étant distincts, vaut $f'(x_0)$. On en déduit aussi que la limite de $f(x) - f(y)$ est nulle.

Le critère de Cauchy assure l'existence de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 dans U. Alors f est continue sur $U \cap \{x_0\}$. On peut reprendre les calculs en choisissant y dans $B(x_0, \eta) \cap (U \cup \{x_0\})$. Le segment $]\,x,\, y\,[$ sera encore dans $B(x_0, \eta) \cap U$ et les conclusions subsistent

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ (x,y)\in U\times(U\cup\{x_0\})\\ x\neq y}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x_0)\,.$$

On peut donc fixer $y = x_0$, ce qui donne

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in U}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\,.$$

Théorème 3 Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une application continûment dérivable sur $\overline{U}$ à valeurs dans un espace de Banach E sur $\mathbb{C}$. Soit x_0 dans $\overline{U}$. Alors

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ (x,y)\in \bar U\times \bar U\\ x\neq y}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x_0)\,,$$

et la fonction Φ définie sur $\overline{U} \times \overline{U}$ par

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\[2ex] f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

est continue sur $\overline{U} \times \overline{U}$.

La démonstration et la même que dans le théorème 1) en prenant x et y dans $\overline{U}$. La deuxième propriété est une conséquence de la première.

Théorème 4 Soit f une application définie et continue sur un arc de courbe régulier γ de classe C^1 de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose que f est dérivable sur γ privé de ses extrémités a et b et que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\gamma}} f'(x)$ existe. On la note $f'(a)$. Alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\gamma}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\,.$$

Soit g une application de classe C^1 bijective de l'intervalle $[\,u,\, v\,]$ de $\mathbb{R}$ sur γ telle que g' ne s'annule pas. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et f_i la composante de f sur le vecteur e_i, on a

$$\frac{f \circ g(t) - f \circ g(u)}{t-u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \circ g(t) - f_i \circ g(u)}{t-u}\, e_i = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g)'(t_i) e_i\,,$$

où t_i appartient à $]\,u,\, t\,[$, d'après le théorème des accroissements finis.

De même

$$\frac{g(t) - g(u)}{t-u} = (\operatorname{Re} g)'(s_1) + i(\operatorname{Im} g)'(s_2)\,,$$

avec s_i dans $]\,u,\, t\,[$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \left(\frac{g(t)-g(u)}{t-u}\right)^{-1} \frac{f \circ g(t) - f \circ g(u)}{t-u} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g)'(t_i)((\operatorname{Re} g)'(s_1) + i(\operatorname{Im} g)'(s_2))^{-1}\, e_i\,.\end{aligned}$$

Lorsque t tend vers u, il en est de même des t_i et des s_i. Donc l'expression $(\operatorname{Re} g)'(s_1) + i(\operatorname{Im} g)'(s_2)$ tend vers $g'(u)$. D'autre part, on a sur $]\,u,\, v\,[$

$$(f \circ g)' = f' \circ g\, g'\,,$$

donc, si t tend vers u, l'expression $(f \circ g)'(t)$ tend vers $f'(a)g'(u)$, et il en résulte que, pour tout i, l'expression $(f_i \circ g)'(t)$ tend vers $f_i'(a)g'(u)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g)'(t_i)\, e_i$ tend vers

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'(a) g'(u)\, e_i = f(a) g'(u)\,.$$

Le nombre $g'(u)$ n'étant pas nul, il en résulte bien que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'(a)$.