W - METHODES DE CALCUL APPROCHE DES INTEGRALES

Le but de ces méthodes et de calculer une valeur approchée d'une intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

où f est une fonction continue suffisamment régulière sur $[\,a,\,b\,]$.

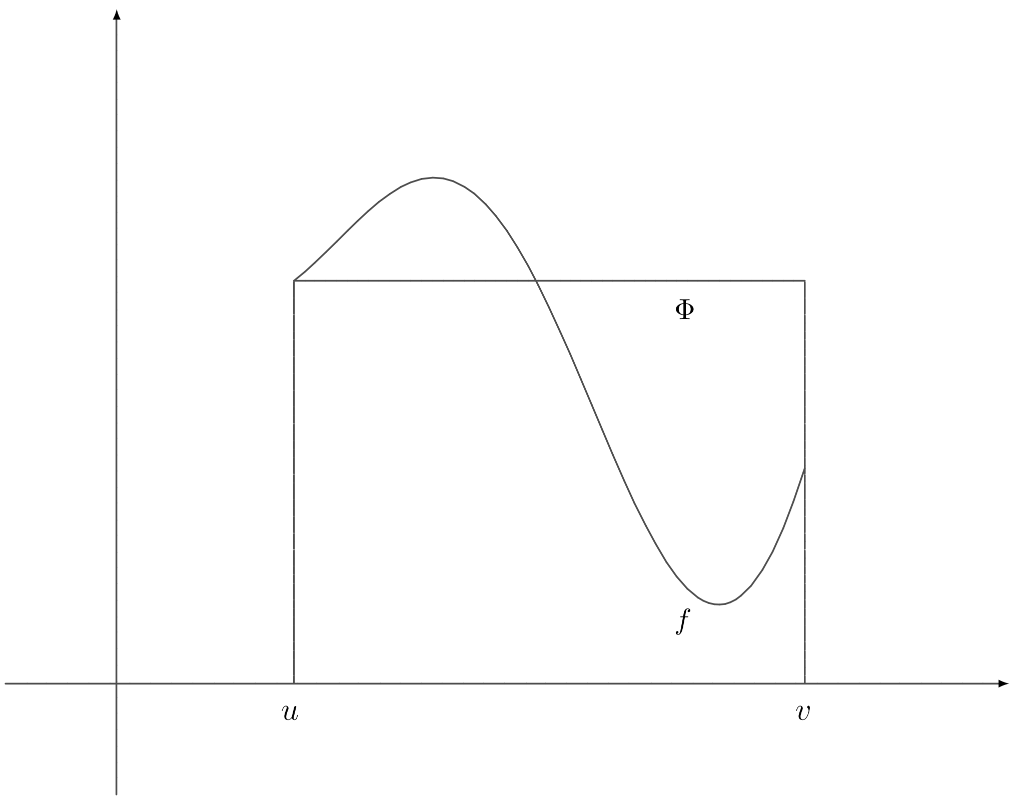
L'idée de base est de découper l'intervalle $[\,a,\,b\,]$ en n intervalles de longueur $(b-a)/n$ et de remplacer sur chaque intervalle la fonction f par une fonction plus simple : un polynôme.

On veut également avoir une majoration de l'erreur commise, et éventuellement le signe de cette erreur.

Polynômes d'interpolation

Notons $[\,u,\,v\,]$ un intervalle sur lequel f est remplacée par un polynôme Φ. Nous allons étudier trois cas.

1) Le polynôme Φ est constant et vaut $f(u)$.

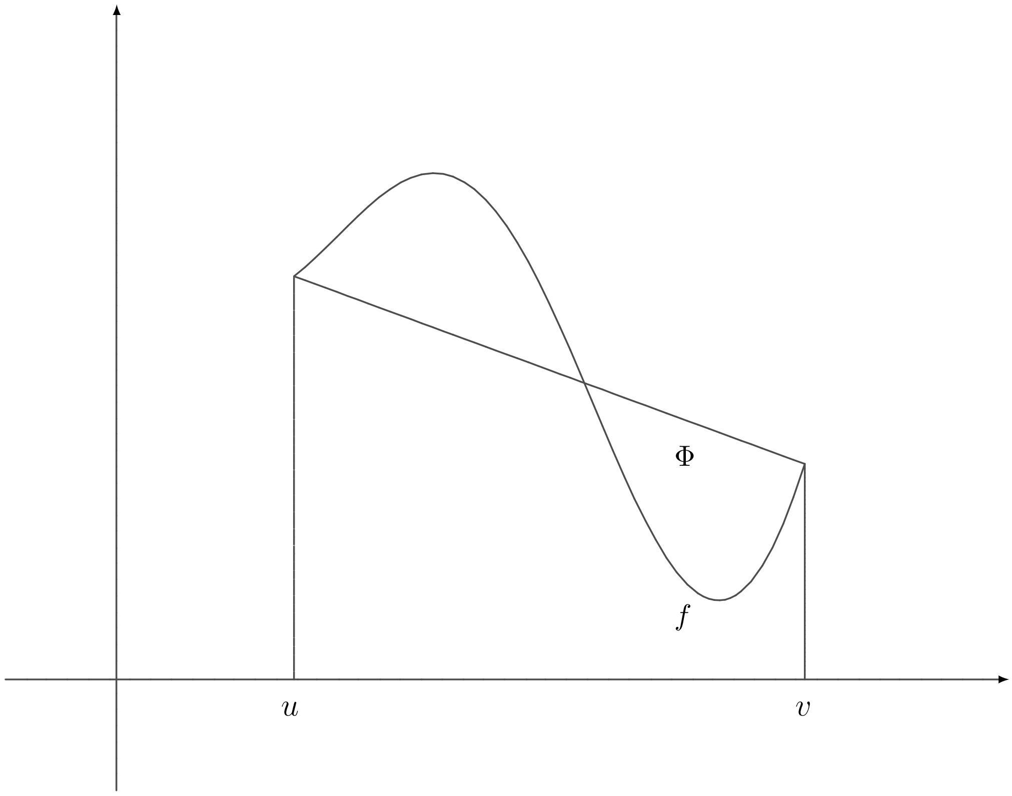


On remplace donc l'intégrale $\int_u^v f(t)\,dt$ par

$$\boxed{\int_u^v \Phi(t)\,dt = \int_u^v f(u)\,dt = (v-u)f(u)}$$

c'est-à-dire par l'aire d'un rectangle. La méthode est appelée pour cette raison **méthode des rectangles**.

2) Le polynôme Φ est la fonction affine qui coïncide avec f en u et v.

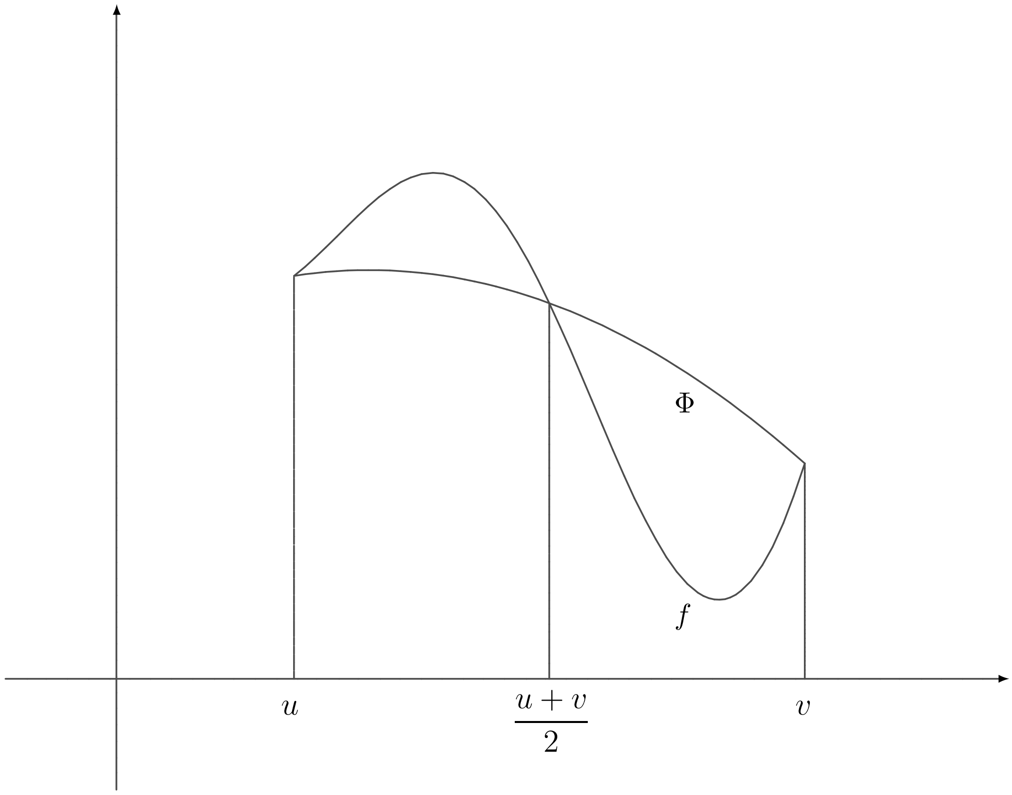


L'intégrale $\int_u^v \Phi(t)\,dt$ est l'aire d'un trapèze de hauteur $v-u$ et dont les bases ont pour longueur respectives $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$. On a donc

$$\boxed{\int_u^v \Phi(t)\,dt = \frac{1}{2}(v-u)(\Phi(u)+\Phi(v)) = \frac{1}{2}(v-u)(f(u)+f(v))}$$

Cette méthode est appelée **méthode des trapèzes**.

3) Le polynôme Φ est le polynôme de degré au plus 2 qui coïncide avec f en u, v, et $(u+v)/2$. Cette méthode fait partie d'une méthode plus générale appelée **méthode de Simpson**.



Pour déterminer Φ, montrons tout d'abord que le système $((x-u)^2,(x-v)^2,(x-u)(x-v))$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Puisque l'espace est de dimension 3, il suffit de montrer que le système est libre. Or, si l'on a,

$$\alpha(x-u)^2+\beta(x-v)^2+\gamma(x-u)(x-v)=0\,,$$

il suffit de remplacer x successivement par u et v pour obtenir $\beta=0$ puis $\alpha=0$, et finalement $\gamma=0$.

On écrit alors Φ dans cette base. On cherche α, β, γ tels que

$$\Phi(x)=\alpha(x-u)^2+\beta(x-v)^2+\gamma(x-u)(x-v)\,.$$

On doit donc avoir

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Phi(u)=f(u) & = & \beta(u-v)^2 \\ \Phi(v)=f(v) & = & \alpha(v-u)^2 \\ \Phi\left(\dfrac{u+v}{2}\right)=f\left(\dfrac{u+v}{2}\right) & = & \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\,(v-u)^2 \end{array}\right. .$$

On en déduit que

$$\Phi(x)=\frac{1}{(v-u)^2}\left(f(v)(x-u)^2+f(u)(x-v)^2+\left(f(u)+f(v)-4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)(x-u)(x-v)\right)\,.$$

D'autre part

$$\int_u^v (t-u)^2\,dt = \int_u^v (t-v)^2\,dt = \frac{1}{3}\,(v-u)^3\,,$$

et, en intégrant par parties,

$$\int_u^v (t-u)(t-v)\,dt = \left[\frac{1}{2}(t-u)^2(t-v)\right]_u^v - \int_u^v \frac{1}{2}\,(t-u)^2\,dt = -\frac{1}{6}\,(v-u)^3\,.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\int_u^v \Phi(t)\,dt = \frac{1}{6}\,(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)}$$

Majoration de l'erreur

Dans ce qui suit, nous notons D la différence

$$D = \int_u^v f(t)\,dt - \int_u^v \Phi(t)\,dt\,.$$

Il s'agit d'obtenir une majoration de $|D|$ ainsi que le signe de D sous certaines conditions portant sur f. Nous reprenons les trois cas précédentes.

1) **Méthode des rectangles**

PROPOSITION 1 Soit f de classe C^1 sur $[\,u,\,v\,]$. On a

$$\left|\int_u^v f(t)\,dt - (v-u)f(u)\right| \leq \frac{1}{2}\,(v-u)^2 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f'(t)|\,. \tag{1}$$

– L'égalité a lieu dans (1) si f est un polynôme de $\mathbb{R}_1[x]$.
– Si f' garde un signe constant sur $[\,u,\,v\,]$ c'est le signe de l'erreur D.

Soit g définie sur $[\,u,\,v\,]$ par

$$g(x) = \int_u^x f(t)\,dt - (x-u)f(u)\,.$$

Cette fonction est de classe C^2 sur $[\,u,\,v\,]$, et l'on a

$$g'(x) = f(x) - f(u) \quad \text{et} \quad g''(x) = f'(x)\,.$$

Puisque $g(u)$ et $g'(u)$ sont nuls, en appliquant la formule de Taylor, il existe ξ dans $]\,u,\, v\,[$ tel que

$$g(v) = \frac{1}{2}\,(v-u)^2 g''(\xi)\,,$$

soit

$$g(v) = \frac{1}{2}\,(v-u)^2 f'(\xi)\,. \tag{2}$$

Alors

$$|g(v)| \leq \frac{1}{2}\,(v-u)^2 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f'(t)|\,,$$

ce qui donne (1).

D'autre part, si f est un polynôme de degré au plus 1, la fonction f' est constante, et d'après (2)

$$|g(v)| = \frac{1}{2}\,(v-u)^2|f'(\xi)| = \frac{1}{2}\,(v-u)^2 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f'(t)|\,.$$

Enfin, toujours d'après (2), l'erreur $D = g(v)$ est du signe de f', si f' garde un signe constant sur $[\,u,\, v\,]$.

Corollaire 1 Soit f de classe C^1 sur $[\,a,\, b\,]$, et, pour tout entier i entre 1 et n, soit

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\,.$$

Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right| \leq \frac{1}{2n}\,(b-a)^2 \sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f'(t)|\,. \tag{3}$$

- Si f' garde un signe constant sur $[\,a,\, b\,]$ c'est le signe de l'erreur commise en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

Pour $1 \leq i \leq n-1$, on applique la proposition 1 à l'intervalle $[\,x_i,\, x_{i+1}\,]$. Notons D_i la différence D associée à cet intervalle. On a

$$|D_i| = \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt - (x_{i+1}-x_i)f(x_i)\right| \leq \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 \sup_{t\in[\,x_i,\,x_{i+1}\,]} |f'(t)|\,.$$

En remplaçant $x_{i+1}-x_i$ par sa valeur $(b-a)/n$ et en majorant $\displaystyle\sup_{t\in[\,x_i,\,x_{i+1}\,]} |f'(t)|$ par $\displaystyle\sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f'(t)|$, on obtient

$$|D_i| = \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\, f(x_i) \right| \leq \frac{1}{2n^2}(b-a)^2 \sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f'(t)|\,.$$

Or

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\, f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i\,.$$

Alors

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} D_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |D_i| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f'(t)|$$

ce qui donne (3).

De plus, si f' garde un signe constant sur $[\,a,\,b\,]$, tous les D_i sont de ce signe et donc leurs somme également.

Remarque : on retrouve d'après (3) le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)\,dt\,,$$

qui est la valeur moyenne de f sur $[\,a,\,b\,]$.

2) **Méthode des trapèzes**

Proposition 2 Soit f de classe C^2 sur $[\,u,\,v\,]$. On a

(4) $$\left| \int\limits_u^v f(t)\,dt - \frac{1}{2}\,(v-u)(f(u)+f(v)) \right| \leq \frac{1}{12}\,(v-u)^3 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f''(t)|\,.$$

– L'égalité a lieu dans (4) si f est un polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$.
– Si f'' garde un signe constant sur $[\,u,\,v\,]$ c'est le signe opposé de celui de l'erreur D.

Soit g définie sur $[\,u,\,v\,]$ par

$$g(x) = \int\limits_u^x f(t)\,dt - \frac{1}{2}\,(x-u)(f(x)+f(u))\,.$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $[\,u,\,v\,]$, et l'on a

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,(f(x)-f(u)-(x-u)f'(x))\,.$$

On a également

$$g(u) = 0\,.$$

D'après la formule de Taylor, il existe ξ dans $]\,u,\, x\,[$ tel que

$$f(u) = f(x) + (u-x)f'(x) + \frac{1}{2}\,(u-x)^2 f''(\xi)\,.$$

Il en résulte que

$$g'(x) = -\frac{1}{4}\,(x-u)^2 f''(\xi)\,, \tag{5}$$

d'où l'on déduit

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{4}\,(x-u)^2 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f''(t)|\,,$$

et en intégrant,

$$|g(v)| = \left| \int\limits_u^v g'(t)\,dt \right| \leq \int\limits_u^v |g'(t)|\,dt \leq \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f''(t)| \int\limits_u^v \frac{1}{4}\,(t-u)^2 dt\,,$$

ce qui donne finalement

$$|g(v)| \leq \frac{1}{12}\,(v-u)^3 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f''(t)|\,.$$

Si f est de degré au plus 2, la fonction f'' est constante et en intégrant (5)

$$g(v) = f''(\xi) \int_u^v \left(-\frac{1}{4}\,(t-u)^2\right) dt = -\frac{1}{12}\,(v-u)^3 f''(\xi)\,.$$

Donc

$$|g(v)| = \frac{1}{12}\,(v-u)^3 \sup_{t\in[\,u,\,v\,]} |f''(t)|\,.$$

Enfin, si f'' garde un signe constant sur $[\,u,\,v\,]$, la fonction g' est du signe de $-f''$. Comme $g(u)$ est nul, la fonction g est aussi du signe de $-f''$ en effet, si g' est positive, g croît à partir de 0 donc est positive, et si g' est négative, g décroît à partir de 0 est donc est négative).

COROLLAIRE 2 Soit f de classe C^2 sur $[a,\, b]$, et, pour tout entier i entre 1 et n, soit

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\,.$$

Alors

$$(6) \qquad \left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\,(b-a)\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right| \leq \frac{1}{12n^2}\,(b-a)^3 \sup_{t\in[a,\,b]} |f''(t)|\,.$$

- Si f'' garde un signe constant sur $[a,\, b]$ c'est le signe opposé de celui de l'erreur commise en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{1}{2n}\,(b-a)\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$.

La méthode de démonstration est identique à celle du corollaire 1.

3) **Méthode de Simpson**

PROPOSITION 3 Soit f de classe C^4 sur $[u,\, v]$. On a

$$(7) \qquad \left| \int_u^v f(t)\,dt - \frac{1}{6}\,(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{2880}\,(v-u)^5 \sup_{t\in[u,\,v]} |f^{(4)}(t)|\,.$$

– L'égalité a lieu dans (7) si f est un polynôme de $\mathbb{R}_4[x]$.
– Si $f^{(4)}$ garde un signe constant sur $[u,\, v]$ c'est le signe opposé de celui de l'erreur D.

Nous allons démontrer tout d'abord la proposition dans le cas particulier où $[u,\, v] = [0,\, 1]$, soit la formule

$$(8) \qquad \left| \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{6}\left(f(0)+f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{2880} \sup_{t\in[0,\,1]} |f^{(4)}(t)|\,.$$

Posons

$$g(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{6\cdot 3!} = \frac{x^3}{4!}\left(x - \frac{2}{3}\right)\,.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{1/2} g(t)f^{(4)}(t)\,dt = \Big[g(t)f^{(3)}(t) - g'(t)f''(t) + g''(t)f'(t) - g^{(3)}(t)f(t)\Big]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} f(t)g^{(4)}(t)\,dt\,.$$

On a aussi

$$\int_{1/2}^{1} g(1-t)f^{(4)}(t)\,dt = \Big[g(1-t)f^{(3)}(t)+g'(1-t)f''(t)+g''(1-t)f'(t)+g^{(3)}(1-t)f(t)\Big]_{1/2}^{1}+\int_{1/2}^{1} f(t)g^{(4)}(1-t)\,dt\,.$$

On obtient successivement

$$g'(x)=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^2}{6\cdot 2}\quad,\quad g''(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{6}\quad,\quad g^{(3)}(x)=x-\frac{1}{6}\quad,\quad g^{(4)}(x)=1\,.$$

Toutes les dérivées de g s'annulent en 0 jusqu'à l'ordre 2.

En remplaçant dans les deux relations obtenues, et en les additionnant terme à terme, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} g(t)f^{(4)}(t)\,dt+\int_{1/2}^{1} g(1-t)f^{(4)}(t)\,dt &= g^{(3)}(0)f(1)+g^{(3)}(0)f(0)-2g'(1/2)f''(1/2)\\ &\quad -2g^{(3)}(1/2)f(1/2)+\int_0^1 f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Or, on obtient facilement,

$$g^{(3)}(0)=-\frac{1}{6}\quad,\quad g'(1/2)=0\quad,\quad g^{(3)}(1/2)=\frac{1}{3}\,,$$

ce qui donne finalement

$$\text{(9)}\qquad D=\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{6}\,(f(0)+f(1)+4f(1/2))=\int_0^{1/2} g(t)f^{(4)}(t)\,dt+\int_{1/2}^{1} g(1-t)f^{(4)}(t)\,dt\,.$$

Le membre de droite se majore en valeur absolue par

$$\sup_{t\in[\,0,1\,]}|f^{(4)}(t)|\left(\int_0^{1/2}|g(t)|\,dt+\int_{1/2}^{1}|g(1-t)|\,dt\right)$$

c'est-à-dire par

$$2\sup_{t\in[\,0,1\,]}|f^{(4)}(t)|\int_0^{1/2}|g(t)|\,dt\,.$$

Mais g est négative sur $[\,0,\,1/2\,]$, et

$$\int_0^{1/2}|g(t)|\,dt=\int_0^{1/2}\left(\frac{t^3}{6\cdot 3!}-\frac{t^4}{4!}\right)dt=\left[\frac{t^4}{6\cdot 4!}-\frac{t^5}{5!}\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5!}\,.$$

Il en résulte que

$$|D| \leq \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5!} \sup_{t \in [0,1]} |f^{(4)}(t)|,$$

ce qui donne le résultat puisque

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5! = 2880.$$

Si f est un polynôme de degré au plus 4, la fonction $f^{(4)}$ est constante, et d'après (9)

$$D = 2f^{(4)}(t) \int_0^{1/2} g(t)\, dt = -\frac{f^{(4)}(t)}{2880},$$

et donc

$$|D| = \frac{1}{2880} \sup_{t \in [0,1]} |f^{(4)}(t)|.$$

On voit également que si $f^{(4)}$ garde un signe constant sur $[0, 1]$, comme g est négative sur $[0, 1/2]$, c'est celui de $-f^{(4)}$.

Pour revenir au cas général, on remarque que si f est de classe C^4 sur $[u, v]$, alors en posant

$$F(x) = f(u + x(v - u))$$

on obtient une fonction F de classe C^4 sur $[0, 1]$, avec les relations

$$\int_0^1 F(t)\, dt = \frac{1}{v-u} \int_u^v f(t)\, dt;$$

$$F^{(4)}(x) = (v-u)^4 f^{(4)}(u + x(v-u)),$$

$$F(0) = f(u) \quad , \quad F(1) = f(v) \quad , \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

En appliquant alors la formule (8), on obtient alors

$$\left| \frac{1}{v-u} \int_u^v f(t)\, dt - \frac{1}{6}\left(f(u) + f(v) + f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) \right| \leq \frac{1}{2880} (v-u)^4 \sup_{t \in [u,v]} |f^{(4)}(t)|,$$

ce qui donne (7) en multipliant par $v - u$.

Remarque : si f est un polynôme de degré 3, les deux membres de (7) sont nuls, et donc

$$\int_u^v f(t)\, dt = \frac{1}{6}(v-u)\left(f(u) + f(v) + f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)$$

alors que cette égalité n'avait été obtenue que pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$.

Corollaire 3 Soit f de classe C^4 sur $[\,a,\,b\,]$, et, pour tout entier i entre 1 et $n-1$, soit

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad z_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\,.$$

Alors

$$(10) \qquad \left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{6n}(b-a)\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2880\,n^4}(b-a)^5 \sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f^{(4)}(t)|\,.$$

- Si $f^{(4)}$ garde un signe constant sur $[\,a,\,b\,]$ c'est le signe de l'erreur commise en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{1}{6n}(b-a)\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\right)$ est l'opposé de celui de $f^{(4)}$.

La démonstration est toujours analogue à celle du corollaire 1 en remarquant que

$$z_i = \frac{x_1 + x_{i+1}}{2}\,.$$

3) **Méthode de Simpson : formule générale**

La proposition 3 est un cas particulier de la proposition suivante :

Proposition 4 Soit $n \geq 2$ et f de classe C^{2n} sur $[\,u,\,v\,]$. On a

(11)

$$\left|\int_u^v f(t)\,dt - \frac{1}{6}(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(k-1)(v-u)^{2k+1}}{3\cdot 2^{2k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{n-1}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)!}(v-u)^{2n+1}\sup_{t\in[\,u,\,v\,]}|f^{(2n)}(t)|\,.$$

– L'égalité a lieu dans (11) si f est un polynôme de $\mathbb{R}_{2n}[x]$.
– Si $f^{(2n)}$ garde un signe constant sur $[\,u,\,v\,]$ c'est le signe opposé de celui de l'erreur.

Comme dans la partie précédente, il suffit de démontrer le résultat si $[\,u,\,v\,] = [\,0,\,1\,]$, soit

$$(12)\qquad \left| \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{6}\left(f(0)+f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{3\cdot 2^{2k-1}(2k+1)!} f^{(2k)}\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{n-1}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)!} \sup_{t\in[\,0,1\,]} |f^{(2n)}(t)|\,.$$

Pour cela, on pose

$$g(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{6(2n-1)!} = \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\left(x - \frac{n}{3}\right)\,.$$

En intégrant par parties

$$\int_0^{1/2} g(t) f^{(2n)}(t)\,dt = \left[\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} g^{(2n-i-1)}(t) f^{(i)}(t) \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} g^{(2n)}(t) f(t)\,dt$$

et

$$\int_{1/2}^{1} g(1-t) f^{(2n)}(t)\,dt = \left[\sum_{i=0}^{2n-1} g^{(2n-i-1)}(1-t) f^{(i)}(t) \right]_{1/2}^{1} + \int_{1/2}^{1} g^{(2n)}(1-t) f(t)\,dt\,.$$

Or, si $0 \leq i \leq 2n-1$, on a

$$g^{(2n-i-1)}(x) = \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} - \frac{x^i}{6\cdot i!}$$

et donc, si $1 \leq i \leq 2n-1$,

$$g^{(2n-i-1)}(0) = 0\,,$$

En prenant $i = 0$, on obtient

$$g^{(2n-1)}(0) = -\frac{1}{6}\,.$$

D'autre part,

$$g^{(2n)}(x) = 1\,.$$

En sommant membre à membre les deux expressions écrites plus haut, on trouve

$$\begin{aligned} D_n &= \int_0^{1/2} g(t) f^{(2n)}(t)\,dt + \int_{1/2}^{1} g(1-t) f^{(2n)}(t)\,dt \\ &= -\frac{f(0)}{6} - \frac{f(1)}{6} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} g^{(2n-i-1)}(1/2) f^{(i)}(1/2) - \sum_{i=0}^{2n-1} g^{(2n-i-1)}(1/2) f^{(i)}(1/2) + \int_0^1 f(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Il ne reste que les indices pairs dans la somme. Pour k variant de 0 à $n-1$ posons $i = 2k$. Alors

$$D_n = -2 \sum_{k=0}^{n-1} g^{(2n-2k-1)}(1/2) f^{(2k)}(1/2) - \frac{1}{6}(f(0)+f(1)) + \int_0^1 f(t)\,dt\,.$$

Par ailleurs, si $k > 0$,

$$g^{(2n-2k-1)}(1/2) = -\frac{k-1}{3 \cdot 2^{2k}(2k+1)!}$$

et

$$g^{(2n-1)}(1/2) = \frac{1}{3}\,.$$

En remplaçant, on obtient la formule

$$(13) \quad \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{6}(f(0)+f(1)+4f(1/2)) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{3 \cdot 2^{2k-1}(2k+1)!}\, f^{(2k)}(1/2) = \int_0^{1/2} g(t) f^{(2n)}(t)\,dt$$

$$+ \int_{1/2}^1 g(1-t) f^{(2n)}(t)\,dt\,.$$

(Le terme correspondant à $k = 1$ est nul).

On en déduit

$$|D_n| \leq 2 \sup_{t \in [0,1]} |f^{(2n)}(t)| \int_0^{1/2} |g(t)|\,dt\,,$$

et, puisque g est négative sur $[0, 1/2]$,

$$\int_0^{1/2} |g(t)|\,dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{t^{2n-1}}{6(2n-1)!} - \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) dt = \frac{n-1}{3 \cdot 2^{2n}(2n+1)!}\,.$$

Finalement

$$|D_n| \leq \frac{n-1}{3 \cdot 2^{2n-1}(2n+1)!} \sup_{t \in [0,1]} |f^{(2n)}(t)|\,.$$

ce qui est la formule (12).

On déduit facilement de (13), comme dans la proposition 3, que l'égalité a lieu pour les polynômes de degré au plus $2n$ et que, si $f^{(2n)}$ garde un signe constant sur $[0, 1]$, c'est l'opposé de celui de D_n, puisque g est négative sur $[0, 1/2]$.

Remarque : les deux membres de l'inégalité de la proposition 4 sont nuls pour des polynômes de degré au plus $2n - 1$.

Corollaire 4 Soit f de classe C^∞ sur $[\,u,\,v\,]$. Si la suite de terme général

$$\alpha_n = \frac{n-1}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)!}\,(v-u)^{2n+1}\sup_{t\in[\,0,\,1\,]}|f^{(2n)}(t)|$$

converge vers 0, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{6}(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k-1}{3\cdot 2^{2k-1}(2k+1)!}\,(v-u)^{2k+1}f^{(2k)}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = \int_u^v f(t)\,dt\,.$$

On peut aussi exprimer cela en disant que la série de terme général

$$\frac{n-1}{2^{2n-1}(2n+1)!}\,(v-u)^{2n+1}f^{(2n)}\left(\frac{u+v}{2}\right)\ \ (n\geq 2)$$

converge et a pour somme

$$\frac{1}{2}(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)-3\int_u^v f(t)\,dt\,.$$

La convergence de la suite (α_n) est assurée en particulier s'il existe des constantes K et λ telles que, pour tout entier n,

$$\sup_{t\in[\,u,\,v\,]}|f^{(2n)}(t)|\leq K\lambda^n n!\,.$$

Seule la dernière assertion n'est pas évidente. Si on a la majoration indiquée, alors

$$0\leq\alpha_n\leq\frac{K(n-1)\lambda^n n!}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)!}=\beta_n\,.$$

Mais

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\frac{\lambda}{8}\,\frac{n}{(n-1)(2n+3)}\,,$$

et ce rapport converge vers 0, ce qui, d'après le critère de d'Alembert, prouve que la série de terme général β_n converge, et donc que la suite (β_n) converge vers 0. Il en résulte que (α_n) converge vers 0.

On peut utiliser également les techniques des parties précédentes en utilisant un découpage de $[\,a,\,b\,]$. On a par exemple, si $n=3$:

Corollaire 5 Soit f de classe C^6 sur $[\,a,\,b\,]$, et, pour tout entier i entre 1 et $n-1$, soit

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad z_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\,.$$

Alors

$$\text{(14)} \qquad \left| \int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{6n}\,(b-a)\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\right) + \frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(z_i)\right|$$

$$\leq \frac{1}{241\,920\,n^6}\,(b-a)^7 \sup_{t\in[\,a,\,b\,]} |f^{(6)}(t)|\,.$$

– Si $f^{(6)}$ garde un signe constant sur $[\,a,\,b\,]$ c'est le signe opposé de celui de l'erreur.

Application du corollaire 4

Soit μ une constante non nulle, et f une solution de l'équation différentielle

$$f'' - \mu f = 0\,.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$f^{(2n)} = \mu^n f\,,$$

et

$$\sup_{t\in[\,0,\,x\,]} |f^{(2n)}(t)| = |\mu|^n \sup_{t\in[\,0,\,x\,]} |f(t)|\,.$$

La fonction f satisfait aux conditions du corollaire 4 dans $[\,0,\,x\,]$. On a donc

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)x^{2k+1}}{2^{2k-1}(2k+1)!} f^{(2k)}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(f(x) + f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 3\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Mais, comme

$$f^{(2k)}\left(\frac{x}{2}\right) = \mu^k f\left(\frac{x}{2}\right)\,,$$

on obtient, si $f(x/2)$ n'est pas nul,

$$S(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)x^{2k+1}\mu^k}{2^{2k-1}(2k+1)!} = \frac{1}{f(x/2)}\left[\frac{x}{2}\left(f(x) + f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 3\int_0^x f(t)\,dt\right]\,.$$

On constate que le résultat ne dépend pas de la solution f choisie. Pour obtenir la somme de la série, prenons

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{\mu}} & \text{si } \mu > 0 \\ e^{ix\sqrt{-\mu}} & \text{si } \mu < 0 \end{cases}\,.$$

On obtient dans le premier cas

$$S(x) = \left[\frac{x}{2}(e^{x\sqrt{\mu}} + 1 + 4e^{x\sqrt{\mu}/2}) - \frac{3}{\sqrt{\mu}}\,(e^{x\sqrt{\mu}} - 1)\right] e^{-x\sqrt{\mu}/2}\,,$$

ce qui donne

$$S(x) = x\left(\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{\mu}}{2} + 2\right) - \frac{6}{\sqrt{\mu}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{\mu}}{2}\,.$$

Par un calcul analogue, on obtient dans le second cas

$$S(x) = x\left(\cos\frac{x\sqrt{-\mu}}{2} + 2\right) - \frac{6}{\sqrt{-\mu}}\sin\frac{x\sqrt{-\mu}}{2}\,.$$

Exemples

1) Calcul d'une valeur approchée de $\ln 2 = \int\limits_1^2 t^{-1}dt$

Si l'on pose, pour tout x de $[\,1,\,2\,]$,

$$f(x) = x^{-1}$$

on a, pour tout $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-(k+1)}\,,$$

et donc

$$\sup_{t\in[\,1,\,2\,]} |f^{(k)}(t)| = k!\,.$$

On remarque que les dérivées paires sont positives. Les erreurs commises seront donc négatives dans ce cas.

a) Utilisation du corollaire 2 avec $n = 10$.

On obtient

$$\left|\ln 2 - \frac{1}{20}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \cdots + \frac{10}{19}\right)\right)\right| \leq \frac{2}{12\cdot 100} = \frac{1}{600}\,,$$

ce qui donne une valeur approchée I_1 de $\ln 2$ égale à $\dfrac{161\,504\,821}{232\,792\,560}$. On a donc

$$0,6937 \leq I_1 \leq 0,6938\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant $\ln 2$ par I_1 est telle que

$$0 \leq I_1 - \ln 2 \leq 1,7\cdot 10^{-3}\,.$$

On en déduit que

$$0,6921 \leq \ln 2 \leq 0,6938\,.$$

b) Utilisation de la proposition 3

$$\left|\ln 2 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + 4\,\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{4!}{6\cdot 4\cdot 5!} = \frac{1}{120}\,,$$

ce qui donne une valeur approchée I_2 de $\ln 2$ égale à $\frac{25}{36}$. On a donc

$$0,694 \le I_2 \le 0,695\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant $\ln 2$ par I_1 est telle que

$$0 \le I_2 - \ln 2 \le 9\cdot 10^{-3}\,.$$

On en déduit que

$$0,685 \le \ln 2 \le 0,695\,.$$

c) Utilisation du corollaire 3 avec $n = 2$.

On obtient

$$\left|\ln 2 - \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\,\frac{2}{3} + 4\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right)\right)\right| \le \frac{1}{120\cdot 16} = \frac{1}{1920}\,,$$

ce qui donne une valeur approchée I_3 de $\ln 2$ égale à $\frac{1747}{2520}$. On a donc

$$0,69325 \le I_3 \le 0,6933\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant $\ln 2$ par I_3 est telle que

$$0 \le I_3 - \ln 2 \le 5,3\cdot 10^{-4}\,.$$

On en déduit que

$$0,6927 \le \ln 2 \le 0,6933\,.$$

d) Utilisation du corollaire 5 avec $n = 2$.

On obtient

$$\left|\ln 2 - \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\,\frac{2}{3} + 4\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right) + \frac{4!}{2880\cdot 32}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{7}\right)^5\right)\right)\right| \le \frac{6!}{241\,920\cdot 2^6} = \frac{1}{21\,504}\,,$$

ce qui donne une valeur approchée I_4 de $\ln 2$ égale $\frac{13\,106\,045\,903}{18\,907\,875\,000}$. On a donc

$$0,69315 \le I_4 \le 0,69316\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant $\ln 2$ par I_4 est telle que

$$0 \le I_4 - \ln 2 \le 4.6\cdot 10^{-5}\,.$$

On en déduit que

$$0,69310 \leq \ln 2 \leq 0,69316\,.$$

On a donc les quatre premiers chiffres exacts.

2) Calcul d'une valeur approchée de $I = \int\limits_0^1 e^{-t^2/2}dt$

Si l'on pose

$$f(x) = e^{-x^2/2}\,,$$

on a successivement

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} \quad , \quad f''(x) = (x^2-1)e^{-x^2/2} \quad , \quad f^{(3)}(x) = x(3-x^2)e^{-x^2/2}\;,$$

$$f^{(4)}(x) = (3-6x^2+x^4)e^{-x^2/2} \quad , \quad f^{(5)}(x) = -x(x^4-10x^2+15)e^{-x^2/2}\,.$$

a) Utilisation du corollaire 2 avec $n = 10$.

Comme $f^{(3)}$ est positive sur $[\,0,\,1\,]$, la fonction f'' est croissante et varie de -1 à 0, donc, f'' est négative et

$$\sup_{t\in[\,0,1\,]} |f''(t)| = 1\,.$$

On a alors

$$\left| I - \frac{1}{20}(1+e^{-1/2}+2(e^{-0,005}+e^{-0,02}+e^{-0,045}+e^{-0,08}+e^{-0,125}+e^{-0,18}+e^{-0,245}+e^{-0,32}+e^{-0,405})\right|$$

$$\leq \frac{1}{1200}\,,$$

ce qui donne une valeur approchée I_1 vérifiant l'encadrement suivant

$$0,8556 \leq I \leq 0,856\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant I par I_1 est telle que

$$0 \leq I - I_1 \leq 9\cdot 10^{-4}\,.$$

On en déduit que

$$0,8556 \leq I \leq 0,8566\,.$$

b) Utilisation de la proposition 3

Les nombres 0 et 1 sont tous deux inférieurs à la plus petite des racines du trinôme

$$P(X) = X^2 - 10X + 15$$

car $P(0)$ et $P(1)$ sont positifs et la demi-somme des racines vaut 5. On en déduit que P est positif sur $[\,0,\,1\,]$ et donc que $f^{(5)}$ est négative sur cet intervalle. Donc $f^{(4)}$ décroît de 3 à -2. Elle n'est pas de signe constant et on a

$$\sup_{t\in[\,0,1\,]} |f^{(4)}(t)| = 3\,.$$

On a

$$\left|I - \frac{1}{6}(1 + e^{-1/2} + 4e^{-1/8})\right| \leq \frac{1}{960}$$

ce qui donne une valeur approchée I_2 vérifiant l'encadrement suivant

$$0,8560 \leq I_2 \leq 0,8561\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant I par I_1 est telle que

$$-0,0011 \leq I - I_2 \leq 0,0011\,.$$

On en déduit que

$$0,8549 \leq I \leq 0,8572\,.$$

c) Utilisation du corollaire 3 en prenant $n = 2$.

On obtient

$$\left|I - \frac{1}{12}(1 + e^{-1/2} + 2e^{-1/8} + 4e^{-1/32} + 4e^{-9/32})\right| \leq \frac{1}{15\,360}$$

ce qui donne une valeur approchée I_3 vérifiant l'encadrement suivant

$$0,85565 \leq I_3 \leq 0,85566\,.$$

D'autre par, l'erreur commise en remplaçant I par I_1 est telle que

$$-0,00007 \leq I - I_3 \leq 0,00007\,.$$

On en déduit que

$$0,85558 \leq I \leq 0,85573\,.$$

On a donc trois décimales exactes.