S - EQUATIONS DE DEGRE 3 ET 4 ; RACINES D'UN POLYNOME MESURANT LES COTES D'UN TRIANGLE

Equations de degré 3

Soit
$$P(X) = X^3 + bX^2 + cX + d$$
un polynôme de degré 3 à coefficients réels. On peut écrire
$$P(X) = Q\left(X + \frac{b}{3}\right)$$
où
$$Q(X) = X^3 + pX + q$$
avec
$$p = c - \frac{b^2}{3} \quad \text{et} \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}\,.$$
Il suffira de savoir calculer les racines de Q pour obtenir celles de P.

Si l'on pose
$$X = x + y\,,$$
on trouve
$$Q(X) = x^3 + y^3 + (3xy + p)(x + y) + q\,,$$
et donc, si (x, y) est solution du système
$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{r} 3xy + p = 0 \\ x^3 + y^3 + q = 0 \end{array} \right. ,$$
le nombre $x + y$ est racine de Q.

Inversement, si z est racine de Q, il existe deux nombres complexes x et y tels que
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = z \\ xy = -\dfrac{p}{3} \end{array} \right. ,$$
et on a aussi
$$0 = Q(z) = x^3 + y^3 + q\,.$$
Donc (x, y) est solution de (S), et on obtiendra toutes les racines de Q en résolvant le système (S).

Ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} x^3y^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ x^3 + y^3 = -q \\ xy \in \mathbb{R} \end{cases},$$

et donc, cela équivaut à dire que x^3 et y^3 sont racines du trinôme

$$R(T) = T^2 + qT - \frac{p^3}{27}\,.$$

Si Δ est le discriminant de ce trinôme, on a

$$D = 27\Delta = 4p^3 + 27q^2\,.$$

Nous allons étudier les diverses situations obtenues suivant le signe de cette expression.

• Si D est strictement positif, le trinôme R possède deux racines réelles distinctes t et t', et, en tenant compte du fait que le produit xy doit être réel, le système (S) a pour solutions (à une permutation près des variables),

$$(t^{1/3}, t'^{1/3}) \quad , \quad (j^2t^{1/3}, jt'^{1/3}) \quad , \quad (jt^{1/3}, j^2t'^{1/3})\,.$$

Il en résulte que Q a pour racines

$$t^{1/3} + t'^{1/3} \quad , \quad j^2t^{1/3} + jt'^{1/3} \quad , \quad jt^{1/3} + j^2t'^{1/3}\,.$$

Seule la première est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées.

• Si D est strictement négatif, le trinôme admet deux racines non réelles conjuguées, t et $\bar{t}$. Appelons x une racine cubique de t, alors les solutions de (S) seront

$$(x, \bar{x}) \qquad (jx, j^2\bar{x}) \qquad (j^2x, j\bar{x})\,.$$

Il en résulte que Q a pour racines

$$x + \bar{x} \qquad jx + j^2\bar{x} \qquad j^2x + j\bar{x}\,.$$

Ce sont trois racines réelles.

• Si D est nul, le trinôme a une racine double

$$t = -\frac{q}{2}\,.$$

Le système (S) a alors comme solutions

$$(t^{1/3}, t^{1/3}) \quad , \quad (jt^{1/3}, j^2t^{1/3})\,,$$

donc Q a pour racines

$$2t^{1/3} \quad , \quad -t^{1/3}\,.$$

Les deux racines sont réelles et l'une est racine double.

Comme
$$1 = -\frac{27q^2}{4p^3}\,,$$
on a aussi
$$-t = \frac{q}{2} = -\frac{27q^3}{8p^3}\,,$$
et donc
$$-t^{1/3} = -\frac{3q}{2p}\,.$$
Mais, si l'on calcule $Q'(-t^{1/3})$, on trouve
$$3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = \frac{4p^3+27q^2}{4p^2} = 0\,,$$
ce qui prouve que $-t^{1/3}$ est aussi racine de Q', et donc que c'est la racine double de Q.

Inversement ; si x est racine multiple de Q, on doit avoir
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = Q(x) = x^3+px+q \\ 0 = Q'(x) = 3x^2+p \end{array}\right.\,,$$
d'où
$$0 = 3Q(x) - xQ'(x) = 2px + 3q\,,$$
donc
$$x = -\frac{3q}{2p}\,,$$
et
$$Q'\left(-\frac{3q}{2p}\right) = \frac{27q^2}{4p^2} + p = 0\,.$$
On en déduit que la condition
$$D = 4p^3 + 27q^2 = 0$$
est une condition nécessaire et suffisante pour que Q ait des racines multiples.

Si maintenant on remplace p et q par leur valeur, on trouve
$$D = 4c^3 + 27d^2 + 4db^3 - b^2c^2 - 18bcd\,.$$

En résumé
Si $D > 0$, le polynôme P a une racine réelle et deux racines non réelles conjuguées.
Si $D = 0$, le polynôme P a trois racines réelles et l'une est multiple.
Si $D < 0$, le polynôme P a trois racines réelles distinctes.

Equations de degré 4

Comme dans le cas des polynômes de degré 3, on peut toujours, par un changement de variable, se ramener à un polynôme de la forme

$$P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c\,.$$

On cherche tout d'abord à mettre P sous la forme $T^2 + S$, où S est un trinôme du second degré et T un binôme du type

$$T(X) = X^2 + \Phi\,.$$

Posons

$$S(X) = uX^2 + vX + w\,.$$

On veut avoir

$$X^4 + aX^2 + bX + c = X^4 + (2\Phi + u)X^2 + vX + \Phi^2 + w\,,$$

soit

$$a = 2\Phi + u \quad , \quad b = v \quad , \quad c = \Phi^2 + w\,,$$

ou encore

$$u = a - 2\Phi \quad , \quad v = b \quad , \quad w = c - \Phi^2\,.$$

On cherche maintenant à déterminer Φ de telle sorte que S soit le carré d'un polynôme du premier degré

$$S(X) = u(X + g)^2\,.$$

On doit avoir

$$uX^2 + vX + w = uX^2 + 2ugX + ug^2\,,$$

soit

$$2ug = v \quad \text{et} \quad ug^2 = w\,.$$

On en tire la relation

$$v^2 = 4uw\,,$$

d'où en remplaçant u, v, w par leur valeur

$$b^2 = 4(a - 2\Phi)(c - \Phi^2)\,.$$

Donc Φ doit vérifier la relation

$$(2\Phi)^3 - a(2\Phi)^2 - 4c(2\Phi) + 4ac - b^2 = 0\,,$$

et l'on est ramené à résoudre une équation de degré 3. En particulier, si P est à coefficients réels, il existe une racine réelle pour cette dernière équation.

Soit Φ_0 une solution particulière de cette équation, et z une solution de l'équation

$$z^2 = a - 2\Phi_0\,.$$

Si z est non nul, on obtient

$$(X^2+\Phi_0)^2+z^2\left(X+\frac{b}{2z^2}\right)^2 = X^4+(2\Phi_0+z^2)X^2+bX+\Phi_0^2+\frac{b^2}{4z^2}\,.$$

Or,

$$2\Phi_0+z^2=a\,,$$

et,

$$\Phi_0^2+\frac{b^2}{4z^2}=\frac{4z^2\Phi_0^2+b^2}{4z^2}=\frac{4(a-2\Phi_0)\Phi_0^2+b^2}{4z^2}=\frac{-8\Phi_0^3+4a\Phi_0^2+b^2}{4z^2}\,.$$

Mais, en utilisant l'équation vérifiée par Φ_0, on trouve

$$\frac{-8c\Phi_0+4ac}{4z^2}=c\,.$$

Il en résulte que l'on a

$$P(X)=(X^2+\Phi_0)^2+z^2\left(X+\frac{b}{2z^2}\right)^2\,,$$

et donc que l'on peut factoriser $P(X)$ en

$$P(X)=\left(X^2+izX+i\,\frac{b}{2z}+\Phi_0\right)\left(X^2-izX-i\,\frac{b}{2z}+\Phi_0\right)\,.$$

On est ramené à la résolution de deux équations de degré 2.

Si z est nul, on a alors

$$a=2\Phi_0\,,$$

et en remplaçant dans l'équation vérifiée par Φ_0, on en déduit

$$b^2=0\,.$$

Cela signifie que l'équation

$$P(X)=0$$

est bicarrée et se résout facilement.

Condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'un polynôme de degré 3 mesurent les côtés d'un triangle

Cas général

Soit

$$P(X)=X^3+bX^2+cX+d$$

un polynôme de degré 3. Les conditions pour que les racines de P mesurent les côtés d'un triangle sont les suivantes :

S 6

1) Les racines doivent être réelles, ce qui d'après la première partie s'écrit

$$(1) \qquad 4c^3 + 27d^2 + 4db^3 \leq b^2c^2 + 18bcd\,.$$

Condition que nous supposerons vérifiée par la suite.

2) Les racines doivent être strictement positives.

3) Les racines doivent vérifier les inégalités triangulaires.

Montrons tout d'abord le lemme suivant :

> Lemme Trois nombres réels sont strictement positifs, si et seulement si, leur somme, leur produit et la somme des doubles produits sont strictement positifs.
> Trois nombres réels sont strictement négatifs, si et seulement si, leur somme et leur produit sont strictement négatifs et la somme des doubles produits est strictement positive.

Il est clair que si u, v, w sont strictement positifs, alors il en est de même de $u+v+w$, uvw et de $uv+vw+wu$.

Réciproquement, si ces trois expressions sont strictement positives, le produit étant strictement positif, un des nombres u, v, w est strictement positif et les deux autres sont de même signe. Supposons par exemple u strictement positif. Alors v et w ont le même signe, et ce signe est aussi celui de $v+w$. D'autre part

$$(v+w)(v+w+u) = (v^2 + v.w + w^2) + (uv + vw + wu)\,.$$

Comme $v^2 + vw + w^2$ et $uv + vw + wu$ sont strictement positifs, on a donc

$$(v+w)(v+w+u) > 0\,,$$

et puisque $u+v+w$ est strictement positif, on en déduit que $v+w$ est strictement positif, donc v et w également.

Pour la seconde partie du lemme, il suffit d'appliquer ce qui précède à $-u$, $-v$, $-w$.

Condition 2

Si l'on appelle u, v, w les racines de P, la condition 2 s'exprime alors, à cause du lemme, par

$$\left\{\begin{array}{c} u+v+w = -b > 0 \\ uv+vw+wu = c > 0 \\ uvw = -d > 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne les trois conditions

(2) $$b<0 \quad , \quad c>0 \quad , \quad d<0\,.$$

Condition 3

Les inégalités triangulaires peuvent s'écrire

$$\begin{cases} u+v>w \\ v+w>u \\ w+u>v \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} u+v+w>2w \\ u+v+w>2u \\ u+v+w>2v \end{cases}.$$

Ceci s'exprime encore en disant que la demi-somme $-b/2$ des racines est supérieure aux racines de P.

Si l'on introduit le polynôme

$$Q(X)=P\left(X-\frac{b}{2}\right)=X^3-\frac{b}{2}X^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)X+\frac{b^3}{8}-\frac{bc}{2}+d\,,$$

les racines de Q seront

$$u+\frac{b}{2} \quad , \quad v+\frac{b}{2} \quad , \quad w+\frac{b}{2}\,,$$

et ces trois nombres seront négatifs. En appliquant la seconde partie du lemme, les conditions s'écrivent

$$\frac{b}{2}<0 \quad , \quad c-\frac{b^2}{4}>0 \quad , \quad \frac{b^3}{8}-\frac{bc}{2}+d>0$$

ce qui donne les conditions

(3) $$b<0 \quad , \quad c>\frac{b^2}{4} \quad , \quad 4bc<b^3+8d\,.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc donnée, en plus de l'inéquation (1) par les systèmes (2) et (3) qui se réduisent au système unique suivant

$$\boxed{b<0 \quad , \quad d<0 \quad , \quad 4bc<b^3+8d}\,.$$

En effet, si l'on a ces trois conditions, on tire de la dernière, en utilisant le fait que d est négatif, que

$$4bc<b^3$$

et en divisant par b qui est négatif

$$4c>b^2\,.$$

Il en résulte aussi que c est positif. On a ainsi toutes les conditions de (2) et (3).

On peut calculer en fonction de b, c et d divers éléments du triangle.

Si p désigne le demi-périmètre, l'aire S du triangle s'obtient par la formule

$$S^2 = p(p-u)(p-v)(p-w)\,.$$

C'est une expression symétrique des racines du trinôme. On obtient

$$S^2 = p(p^3 - (u+v+w)p^2 + (uv+vw+wu)p - uvw) = p(-p^3 + (uv+vw+wu)p - uvw)\,,$$

d'où, en fonction des coefficients :

$$S^2 = -\frac{b}{2}\left(\frac{b^3}{8} - \frac{bc}{2} + d\right)\,,$$

et finalement

$$\boxed{S^2 = \frac{b(4bc - b^3 - 8d)}{16}}$$

Le rayon R du cercle inscrit est lié à l'aire par la relation

$$R = \frac{uvw}{4S}\,,$$

d'où l'on tire

$$\boxed{R = \frac{-d}{\sqrt{b(4bc - b^3 - 8d)}}}$$

Le rayon R' du cercle inscrit est lié à la surface par

$$S = R'\,\frac{u+v+w}{2}\,,$$

d'où

$$\boxed{R' = -\frac{\sqrt{b(4bc - b^3 - 8d)}}{2b}}$$

Triangle équilatéral

Le triangle est équilatéral si et seulement si le polynôme P a une racine triple positive. Si tel est le cas, on a

$$b = -3u \quad , \quad c = 3u^2 \quad , \quad d = -u^3\,,$$

ce qui entraine

$$d = \frac{bc}{9} = \frac{b^3}{27}\,,$$

avec de plus u positive, donc b et d négative.

Ces conditions sont suffisantes pour que $-b/3$ soit racine triple positive de P. On peut d'ailleurs vérifier que ces solutions entrainent celles du cas général.

EN RÉSUMÉ Le triangle est isocèle si et seulement si $$d = \frac{bc}{9} = \frac{b^3}{27} \quad \text{et} \quad d < 0\,.$$

Triangle rectangle

On veut par exemple
$$u^2 = v^2 + w^2\,,$$
ce qui donne aussi
$$2u^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2(uv + vw + wu) = b^2 - 2c\,.$$
Si u est racine de P, on a aussi
$$(u^3 + bu^2 + cu + d)(u^3 - bu^2 + cu - d) = 0\,,$$
ou encore
$$u^6 + (2c - b^2)u^4 + (c^2 - 2bd)u^2 - d^2 = 0\,.$$
En remplaçant u^2 par $(b^2 - 2c)/2$, on obtient la condition
$$8d^2 + 8b^3d + b^6 + 8b^2c^2 - 16bcd - 6b^4c = 0\,.$$
Supposons maintenant qu'en plus de la condition (1), le polynôme P vérifie le système
$$8d^2 + 8b^3d + b^6 + 8b^2c^2 - 16bcd - 6b^4c = 0 \quad , \quad b < 0 \quad , \quad d < 0\,.$$
La dernière équation peut se mettre sous la forme
$$(b^2 - 2c)\frac{b^4}{8} = \left(\frac{b}{2}(b^2 - 2c) + d\right)^2\,.$$
On en déduit que $b^2 - 2c$ est positif. On peut encore écrire l'équation sous la forme
$$b(4bc - 8d - b^3)(b^2 - 2c) = 8d^2\,,$$
et comme b est négatif, on en déduit que
$$4bc - 8d - b^3 \leq 0\,.$$
Mais, ni $b^2 - 2c$, ni $4bc - 8d - b^3$ ne peuvent être nuls, sinon d devrait l'être aussi. Il en résulte que l'on obtient le système voulu pour que les racines de P mesurent les côtés d'un triangle. Il reste à montrer

qu'il est rectangle.

Posons
$$u = \sqrt{\frac{b^2 - 2c}{2}}\,.$$
La dernière équation traduit simplement le fait que u est racine positive du polynôme
$$(X^3 + bX^2 + cX + d)(X^3 - bX^2 + cX - d)\,.$$
Mais les racines de P sont positives, et donc celles de $X^3 - bX^2 + cX - d$ sont négatives. Il en résulte que u est racine de P. Alors
$$2u^2 = b^2 - 2c = u^2 + v^2 + w^2\,,$$
d'où l'on déduit que le triangle est rectangle.

En résumé Le triangle est rectangle si et seulement si, on a en plus de l'inéquation (1), le système
$$8d^2 + 8b^3d + b^6 + 8b^2c^2 - 16bcd - 6b^4c = 0 \quad , \quad b < 0 \quad , \quad d < 0\,.$$