Etudier la courbe paramétrée par

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin 2t\,.$$

Domaine de définition

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.

Période

La fonction x est de période 2π et y de période π. Une période commune est donc 2π. On étudie la courbe sur un intervalle de longueur 2π.

Réduction du domaine d'étude

Si l'on veut commencer par étudier la parité des fonctions, on prend l'intervalle $I_0 = [\,-\pi,\, \pi\,]$.

L'application $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection de $I_1 = [\,0,\, \pi\,]$ sur $I'_1 = [\,-\pi,\, 0\,]$, et l'on a

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t)\,.$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox. On l'étudie sur I_1, et on complètera par la symétrie $\mathscr{S}_1$ par rapport à Ox.

L'application $\Phi_2 : t \mapsto \pi - t$ est une bijection de $I_2 = [\,0,\, \pi/2\,]$ sur $I'_2 = [\,\pi/2,\, \pi\,]$, et l'on a

$$x(\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = -y(t)\,.$$

La courbe est symétrique par rapport à O. On l'étudie sur I_2, et on complètera par la symétrie $\mathscr{S}_2$ par rapport à O.

Dérivées

On obtient

$$x'(t) = -\sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos 2t\,.$$

Sur I_2, la fonction x' s'annule en 0 et y' s'annule en $\pi/4$.

024 - 2

$\boxed{\text{Tableau de variation}}$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
x'	0	$-$		$-$	-1
x	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$	
y'/x'	∞		0		2

Remarque : l'origine est un point double de la courbe.

Tracé de la courbe

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque t varie de 0 à $\pi/2$, puis on complète par les symétries $\mathscr{S}_2$ puis $\mathscr{S}_1$.