Annales Éc. Norm. Sup.,
4e série, **28** *(1995), 115–127.*

Sur un problème de crible et ses applications, 2. Corrigendum et étude du graphe divisoriel.

Gérald Tenenbaum

1. Introduction

Ce travail répond à la double motivation de corriger une erreur dans la démonstration du résultat principal de [6] et d'en développer une nouvelle application, concernant le plus long chemin simple dans le graphe divisoriel.

Soit $P^-(n)$ (resp. $P^+(n)$) le plus petit (resp. le plus grand) facteur premier d'un entier n, avec la convention $P^-(1) = +\infty$ (resp. $P^+(1) = 1$). Nous avons défini dans [6] la fonction F de Schinzel-Szekeres par la formule

$$F(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ \max\{dP^-(d) : d|n, d > 1\} & (n > 1), \end{cases} \tag{1.1}$$

et étudié le comportement asymptotique des fonctions de répartition

$$D(x, y) := |\{n \leqslant x : F(n) \leqslant yn\}|, \quad E(x, y) := |\{n \leqslant x : F(n) \leqslant yx\}|.$$

En particulier, nous avons annoncé le résultat suivant, où γ, λ sont des nombres réels arbitrairement fixés sous les contraintes

$$\gamma > \tfrac{5}{3}, \qquad \lambda > \tfrac{5}{3}\Big(1 - \frac{\log_2 \varphi}{\log \varphi}\Big) = 4{,}20001\ldots \qquad \Big(\varphi := \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\Big). \tag{1.2}$$

Théorème A. *On a pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $u := (\log x)/\log y$,*

$$\frac{x}{u} L(u, y) \ll D(x, y) \leqslant E(x, y) \ll \frac{x}{u} \log(2u), \tag{1.3}$$

où l'on a posé

$$L(u, y) := \begin{cases} \big(\log(2u)\big)^{-\lambda} & (2 \leqslant y \leqslant \exp\{(\log_2 x)^\gamma\}), \\ 1 & (y > \exp\{(\log_2 x)^\gamma\}). \end{cases}$$

Ici et dans la suite, nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Nous rétablissons à la section 2 la démonstration de la borne inférieure de (1.3), qui comportait une erreur. Nous montrons même que, notant μ la fonction de Möbius, cette minoration est valable pour la fonction

$$D'(x, y) := |\{n \leqslant x : \mu(n)^2 = 1,\ F(n) \leqslant yn\}|, \tag{1.4}$$

et en remplaçant $L(u, y)$ par

$$L^*(u, y) := \begin{cases} \big(\log(2u)\big)^{-\gamma} & (2 \leqslant y \leqslant \exp\{(\log_2 x)^\gamma\}), \\ 1 & (y > \exp\{(\log_2 x)^\gamma\}). \end{cases}$$

Dans la première partie de cet article [6], nous avons établi que l'on a pour tout entier n

$$F(n)/n = \max_{1 \leqslant i < \tau(n)} (d_{i+1}/d_i)$$

(où $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ désigne la suite croissante des diviseurs de n) et nous avons développé deux autres applications du théorème A, respectivement dévolues à l'estimation de la fonction de compte des entiers pratiques et au “petit crible” d'Erdős–Ruzsa. Nous en proposons ici une quatrième.

Pour chaque entier naturel n, le graphe divisoriel $\mathcal{D}_n$ est le graphe dont les sommets sont les entiers n'excédant pas n et dont les arêtes sont les couples $\{a, b\}$ tels que $a \leqslant n$, $b \leqslant n$ et $a|b$ ou $b|a$. Une variante intéressante introduite par Erdős, Freud et Hegyvári [1] consiste à considérer le graphe analogue $\mathcal{M}_n$ où les arêtes sont les couples $\{a,\, b\}$ d'entiers n'excédant pas n et dont le plus petit commun multiple $[a, b]$ satisfait à la condition $[a, b] \leqslant n$. On désigne par $f(n)$ (resp. $g(n)$) le nombre maximal d'éléments d'un chemin simple de $\mathcal{D}_n$ (resp. $\mathcal{M}_n$). On a bien entendu $f(n) \leqslant g(n)$, et, incidemment, on ignore si $f(n) < g(n)$ a lieu pour une infinité d'entiers n. W. Luther (communication personnelle) a montré que 40 est le plus petit entier satisfaisant cette inégalité stricte, en fait $f(40) = 32$, $g(40) = 33$. Etablissant une conjecture de [1], Pomerance montre dans [4] que

$$g(n) = o(n) \qquad (n \to +\infty) \tag{1.5}$$

mais ne donne pas de majoration effective. Un résultat de Pollington [3] fournit la borne inférieure

$$f(n) \geqslant n \exp\Big\{ - (2 + o(1)) \sqrt{\log n \log_2 n} \Big\}.$$

Nous déterminons ici, grâce aux estimations relatives à la fonction de Schinzel–Szekeres, le comportement asymptotique de $f(n)$ et $g(n)$ à un facteur multiplicatif près de l'ordre d'une puissance de $\log_2 n$. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1. *On a pour n assez grand*

$$D'(n/4, 2) \leqslant f(n) \leqslant g(n) \leqslant 2D\big(n, (\log n)^5\big) \tag{1.6}$$

Corollaire 1. *Pour tout nombre réel $\gamma > 5/3$, on a les estimations asymptotiques*

$$\frac{n}{\log n} (\log_2 n)^{-\gamma} \ll f(n) \leqslant g(n) \ll \frac{n}{\log n} (\log_2 n)^2. \tag{1.7}$$

La borne inférieure de (1.7) améliore également une estimation très récente de Saias [5], obtenue indépendemment du présent travail et par une méthode différente, dans laquelle la puissance de $\log_2 n$ est remplacée par un facteur du type $\exp\{-c\sqrt{\log_2 n}\}$ avec $c > 0$.

Nous pouvons déduire du théorème 1 le résultat suivant, qui précise dans de larges proportions le *Theorem* 4 d'Erdős, Freud et Hegyvári [1].

Corollaire 2. *Pour toute permutation $a_1, a_2, \ldots$ des entiers naturels, on a*

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{[a_j, a_{j+1}](\log_2 3j)^2}{j \log 2j} > 0. \tag{1.8}$$

Au vu de (1.7), il semble raisonnable de conjecturer qu'il existe une permutation $\{a_j\}$ de $\mathbb{Z}^+$ telle que l'on ait

$$[a_j, a_{j+1}] \ll j(\log 2j)^{1+o(1)} \quad (j \to +\infty). \tag{1.9}$$

Ainsi que nous l'avons signalé dans [6], la borne inférieure de (1.3) est améliorable sous l'hypothèse de Riemann. Nous pouvons alors redéfinir, pour tout $\varepsilon > 0$, $L^*(u, y)$ par

$$L^*(u, y) = \begin{cases} (\log 2u)^{-1-\varepsilon} & (2 \leqslant y \leqslant (\log x)^{2+\varepsilon}), \\ 1 & (y > (\log x)^{2+\varepsilon}). \end{cases}$$

Cela permet de remplacer par $(1 + \varepsilon)$ l'exposant γ de (1.7).

Nous tenons à exprimer ici nos remerciements d'une part à André Stef pour une astucieuse présentation de la construction du § 4 et pour la programmation du chemin simple $\Gamma(4000)$ donné à la fin de cet article, et d'autre part à Eric Saias, pour l'observation que la méthode de minoration du présent travail permettait de remplacer $L(u, y)$ par $L^*(u, y)$.

2. Corrigendum

La fonction construite au lemme 3.4 de [6] n'est pas continue en $v = 1$ et l'inégalité (3.3) du même énoncé n'est satisfaite que pour $1 < a \leqslant b$. Cela invalide la preuve du lemme 6.1 de [6] sur lequel est fondée la démonstration de la borne inférieure de (1.3).

Nous allons établir ici l'estimation

$$D'(x, y) \gg \frac{x}{u} L^*(u, y) \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{2.1}$$

Nous désignons par $D'_{z,w}(x, y)$ le nombre des entiers $m \leqslant x$, sans facteur carré et tels que $F(m) \leqslant ym$, $P^-(m) > z$, $P^+(m) \leqslant w$; lorsque $w \geqslant x$, nous notons simplement $D'_z(x, y)$.

Lemme 2.1. *On a pour* $1 < z \leqslant \min(y, w)$, $x \geqslant 1$,

$$D'_{z,w}(x, y) = 1 + \sum_{z<p\leqslant \min(y,w)} D'_{p,w}(x/p, py). \tag{2.2}$$

Démonstration. On classe les entiers $m > 1$ comptés dans $D'_{z,w}(x, y)$ selon la valeur de leur plus petit facteur premier. Si $m = p\ell$ avec $P^-(\ell) > p$, on peut écrire

$$F(m) = \max\big(p^2\ell, F(\ell)\big),$$

de sorte que la condition $F(m) \leqslant ym$ est équivalente à : $p \leqslant y$ et $F(\ell) \leqslant \ell py$. La condition $P^-(m) > z$ équivaut à $p > z$, et la condition $P^+(m) \leqslant w$ à $\max\big(p, P^+(\ell)\big) \leqslant w$. Cela implique bien (2.2).

Lemme 2.2. *Désignons par* $\vartheta'(x, y, z)$ *le nombre des entiers sans facteur carré n'excédant pas* x *et dont tous les facteurs premiers sont dans l'intervalle* $]z, y]$. *Soit* $\delta \in]0, 1[$. *Pour* $x \geqslant 1$, $y > x^\delta$, $3/2 < z \leqslant \min(x^{1/3}, y^{1/2})$, *on a*

$$\vartheta'(x, y, z) \gg_\delta \frac{x}{\log z}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On pourrait déduire ce résultat des théorèmes 1 & 2 de Friedlander [2]. Nous préférons donner une courte preuve directe et autonome. Supposons d'abord $z > x^{\delta/10}$. Notant $v := (\log x)/\log z$, il existe un entier naturel k tel que $\frac{5}{8}(v-2) \leqslant k \leqslant v - \frac{5}{4}$. En effet, la différence entre les bornes de cette inégalité vaut $\frac{3}{8}v > 1$. On a $1 \leqslant k \leqslant 10/\delta$. La fonction continue croissante $h(t) := z^{kt}$ satisfait à $h(1) \leqslant xz^{-5/4}$ et $h(8/5) \geqslant xz^{-2} \geqslant xy^{-1}$. Cela implique l'existence d'un $s \in [1, 8/5]$ tel que

$$xy^{-1} \leqslant h(s) = z^{ks} \leqslant xz^{-5/4}.$$

Posons $\eta = \delta/200$. On déduit de ce qui précède que tous les produits $p_1 \dots p_k$ avec $z^s < p_j \leqslant z^{(1+\eta)s} \leqslant y$ vérifient la double inégalité

$$xy^{-1} \leqslant p_1 \dots p_k < xz^{-5/4+ks\eta} \leqslant xz^{-11/10}.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \vartheta'(x,y,z) &\gg \sum_{z^s<p_1<\dots<p_k\leqslant z^{(1+\eta)s}} \sum_{\substack{z<p\leqslant x/(p_1\dots p_k)\\ p\neq p_1,\dots,p_k}} 1 \\ &\gg \sum_{z^s<p_1<\dots<p_k\leqslant z^{(1+\eta)s}} \frac{x}{p_1\dots p_k \log x} \\ &\gg_\delta \frac{x}{\log x} \gg_\delta \frac{x}{\log z}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lorsque $z \leqslant x^{\delta/10}$, nous utilisons le fait que tous les entiers de la forme ab avec

$$a \leqslant T,\ P^-(a) > z,\ \mu(a)^2 = \mu(b)^2 = 1,\ b \leqslant x/a,\ P^-(b) > T,\ P^+(b) \leqslant y,\ T := x^{\delta/4}$$

sont comptés dans $\vartheta'(x,y,z)$. Il suit

$$\begin{aligned} \vartheta'(x,y,z) &\geqslant \sum_{a\leqslant T,\, P^-(a)>z} \mu(a)^2 \vartheta'(x/a,y,T) \\ &\gg_\delta \sum_{a\leqslant T,\, P^-(a)>z} \frac{\mu(a)^2 x}{a\log x} \gg_\delta \frac{x}{\log z}, \end{aligned}$$

où la seconde minoration découle de (2.4) et la troisième, par sommation d'Abel, d'un résultat classique de crible.

Lemme 2.3. *Soient $\gamma > 5/3$, $0 < \delta \leqslant 1$. Il existe une constante $c_0 = c_0(\gamma,\delta) > 0$ telle que l'inégalité*

$$D'_{z,w}(x,y) \geqslant c_0 \frac{x\log y}{\log(xy)\log z} \tag{2.5}$$

ait lieu pour $x \geqslant 16$, $\exp\{(\log_2 x)^\gamma\} \leqslant z \leqslant \min(x^{1/3}, y^{1/2}, w^{1/2})$, $w \geqslant x^\delta$.

Démonstration. Soient $\beta \in]5/3,\gamma[$, $\varrho := \gamma/\beta > 1$. Nous allons montrer par récurrence sur l'entier $k \geqslant 4$ qu'il existe une constante $c_1 = c_1(\beta,\gamma,\delta) > 0$ telle que, posant $B_k := c_1 \exp\big\{-\sum_{1\leqslant j\leqslant k} j^{-2}\big\}$, on ait

$$D'_{z,w}(x,y) \geqslant B_k \frac{x}{\log(xy)}\Big(\frac{\log y}{\log z} - 1\Big) \tag{2.6}$$

sous la condition

$$16 \leqslant x \leqslant 2^k, \quad \exp\{(\log_2 x)^\gamma\} \leqslant z \leqslant \min(x^{1/3}, y^{1/2}, w^{1/2}), \quad w \geqslant x^\delta. \tag{H_k}$$

Nous pouvons manifestement supposer $k \geqslant k_0$, où $k_0 = k_0(\beta,\gamma,\delta)$ est un entier suffisamment grand. Admettons donc que (H_k) implique (2.6) avec $k \geqslant k_0$ et supposons (H_{k+1}) réalisée. La conclusion découle de l'hypothèse si $x \leqslant 2^k$, et nous pouvons donc nous placer dans le cas où $2^k < x \leqslant 2^{k+1}$.

Nous remarquons d'abord que, quitte à modifier la valeur initiale de c_1, le lemme 2.2 implique

$$D'_{z,w}(x,y) \geqslant \vartheta'(x, \min(y,w), z) \geqslant c_1 \frac{x}{\log z} \tag{2.7}$$

si, en outre, $y > \min(x,w)^{1/4}$. Lorsque $y \leqslant \min(x,w)^{1/4}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour minorer les termes $D'_{p,w}(x/p, py)$ dans (2.2). En effet, on a pour k_0 assez grand

$$16 \leqslant x/p \leqslant x/2 \leqslant 2^k, \quad p \leqslant \min\big((x/p)^{1/3}, w^{1/2}\big) \quad (\text{car } p \leqslant y \leqslant \min(x,w)^{1/4})$$

et

$$\exp\big\{\big(\log_2(x/p)\big)^\gamma\big\} \leqslant \exp\{(\log_2 x)^\gamma\} \leqslant p \leqslant \sqrt{py} \quad (z < p \leqslant y).$$

Il suit

$$\begin{aligned} D'_{z,w}(x,y) &\geqslant B_k \frac{x}{\log(xy)} \sum_{z<p\leqslant y} \Big(\frac{\log(py)}{\log p} - 1\Big)\frac{1}{p} \\ &= B_k \frac{x}{\log(xy)} \sum_{z<p\leqslant y} \frac{\log y}{p \log p} \\ &\geqslant B_k \frac{x}{\log(xy)} \Big(\frac{\log y}{\log z} - 1 - c_2 \frac{\log y}{\log z} \exp\big\{-(\log z)^{1/\beta}\big\}\Big), \end{aligned}$$

d'après une forme forte du théorème des nombres premiers, où $c_2 = c_2(\beta)$. Comme $(\log y)/\log z \geqslant 2$, on obtient

$$\begin{aligned} D'_{z,w}(x,y) &\geqslant B_k \frac{x}{\log(xy)} \Big(\frac{\log y}{\log z} - 1\Big)\Big(1 - 2c_2 \exp\big\{-(\log(k\log 2))^\varrho\big\}\Big) \\ &\geqslant B_{k+1} \frac{x}{\log(xy)} \Big(\frac{\log y}{\log z} - 1\Big) \end{aligned}$$

si k_0 a été convenablement choisi relativement à c_2 et ϱ. Cela achève la démonstration.

Lemme 2.4. *Soit $0 < \delta \leqslant 1$. On a uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $w \geqslant x^\delta$,*

$$D'_{1,w}(x,y) \gg xu^{-1}L(u,y) \qquad \big(u = (\log x)/\log y\big). \tag{2.8}$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous observons que l'on a le résultat intermédiaire

$$D'_{1,z}(x,y) \gg x\,u^{-\xi} \quad (x \geqslant y \geqslant 2,\ z \geqslant x^\delta), \tag{2.9}$$

avec $\xi = 1 - \log_2 \varphi / \log \varphi = 2,52001\ldots$. Cette minoration a été établie au lemme 6.2 de [6] sans la restriction aux entiers sans facteur carré. Les modifications nécesssaires pour étendre le résultat n'engendrent aucune difficulté supplémentaire et nous nous contentons de quelques indications. La minoration (6.10) de [6] est encore valable pour $D'_{1,z}(x,y)$ si l'on restreint la sommation en m en imposant la condition supplémentaire $\mu(m)^2 = 1, x^{1-\eta} < m \leqslant x^{1-\eta/4}$. Pour obtenir la restriction de taille, il suffit de changer, dans la construction *ad hoc* des entiers m exposée pp.25-26 de [6], le paramètre h_2 en $(1-\eta/3)h_2$. En imposant ensuite $\mu(a)^2 = 1$ et $p_{k+i} \neq p_{k+j}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant h)$, ce qui ne perturbe pas les estimations subséquentes, on obtient bien le résultat souhaité.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir (2.8). Soit $\beta = \frac{1}{2}(5/3 + \gamma)$. Nous pouvons supposer x suffisamment grand pour que l'on ait $6\delta^{-1}(\log_2 x)^\beta \leqslant (\log_2 x)^\gamma$.

Si $\exp\{6\delta^{-1}(\log_2 x)^\beta\} < y \leqslant x$, nous utilisons le fait que tout entier de la forme $m = ab$ avec $a \leqslant y^{\delta/6} < P^-(b)$, $P^+(b) \leqslant w$, $\mu(a)^2 = \mu(b)^2 = 1$, $F(b) \leqslant by$, est compté dans $D'_{1,w}(x,y)$, avec unicité de la représentation. D'où

$$\begin{aligned} D'_{1,w}(x,y) &\geqslant \sum_{a \leqslant y^{\delta/6}} \mu(a)^2 D'_{y^{\delta/6},w}(x/a,y) \\ &\gg \sum_{a \leqslant y^{\delta/6}} \frac{\mu(a)^2 x}{a \log x} \gg \frac{x}{u}, \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.3.

Si $2 \leqslant y \leqslant \exp\{6\delta^{-1}(\log_2 x)^\beta\}$, on fait appel à la formule

$$D'_{1,w}(x,y) \geqslant D'_{z,w}(x/t,s)\big\{D'_{1,z}(t,y) - D'_{1,z}(s,y)\big\}, \tag{2.10}$$

valable pour $x \geqslant t \geqslant s \geqslant z \geqslant 2$, $w \geqslant z$, $y \geqslant 2$. Cette inégalité est établie au lemme 2.5 de [6] pour $w = x$ et dans le cas de fonctions non restreintes aux entiers sans facteur carré. Le même raisonnement fournit (2.10). Pour le choix

$$s = \exp\{6\delta^{-1}(\log_2 x)^\beta\},\ t = s^2,\ z = s^{1/3},$$

on obtient, compte tenu de (2.5) et (2.9),

$$\begin{aligned} D'_{1,w}(x,y) &\gg D'_{s^{1/3},w}(x/s^2,s) D'_{1,s^{1/3}}(s^2,y) \\ &\gg \frac{x}{s^2 \log x} s^2 \Big(\frac{\log y}{\log s}\Big)^\xi \\ &\gg x u^{-1} (\log_2 x)^{-\beta\xi} \gg x u^{-1} (\log 2u)^{-\beta\xi}. \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de (2.8).

Il est maintenant facile de prouver (2.1). Soit $\beta \in]5/3, \gamma[$. Lorsque $y > Y := \exp\{3(\log_2 x)^\beta\}$, le résultat découle de (2.8) avec $w = x$. Dans le cas contraire, nous appliquons une nouvelle fois (2.10), avec $w = x$, $s = Y$, $t = s^2$, $z = s^{1/3}$, et en faisant appel à (2.8) au lieu de (2.9) pour minorer le terme $D'_{1,z}(t,y)$. On obtient bien le résultat souhaité.

Nous profitons de l'occasion pour corriger également quelques lapsus et fautes d'impression qui peuvent compliquer la lecture de [6].

Dans le lemme 2.4 de [6], il faut lire

$$\widetilde{E}_{t,z}(x,y) = E_{t,z}(x,y) - E_{t,z}(x/2, 2y).$$

Page 12, la majoration de $E(x,y)$ doit être

$$\begin{aligned} E(x,y) &\leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant (\log x)/\log 16} \widetilde{E}(x/2^k, 2^k y) + x^{3/4} \\ &\leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant (\log x)/\log 16} D(x/2^k, 2^{k+1} y) + x^{3/4} \\ &\ll \sum_{0 \leqslant k \leqslant (\log x)/\log 16} \frac{x \log(2(\log\sqrt{x})/\log y)}{2^k \log\sqrt{x}/(k + \log y)} \ll x \frac{\log(2u)}{u}. \end{aligned}$$

Page 15, il faut ajouter la condition $F(n) \leqslant yn$ dans la définition de $\Delta(x,y)$. Enfin, page 30, la condition de sommation des deux dernières sommes en a est : $a \in S_x \smallsetminus A'$.

3. Preuve du théorème 1 : majoration

Désignons par $\{p_j(m) : 1 \leqslant j \leqslant \Omega(m)\}$ la suite croissante au sens large des facteurs premiers de m, comptés avec multiplicité. Pour chaque m, nous posons

$$m(j) := \begin{cases} 1 & (j = 1) \\ \prod_{1 \leqslant i < j} p_i(m) & (j > 1). \end{cases}$$

On a clairement $F(m)/m = \max_{1 \leqslant j \leqslant \Omega(m)} p_j(m)/m(j)$, de sorte que

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant \Omega(m)} p_j(m)/m(j) \leqslant y \Longleftrightarrow m \quad \text{est compté dans} \quad D(n, y) \qquad (y \geqslant 2). \tag{3.1}$$

Considérons alors une suite $\{m_\nu : 1 \leqslant \nu \leqslant g(n)\}$ réalisant le plus long chemin simple de $\mathcal{M}_n$. Nous répartissons les m_ν en deux classes complémentaires, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. La classe $\mathcal{A}$ contient tous les m_ν satisfaisant à

$$m_\nu \leqslant n/(\log n)^2 \quad \text{ou} \quad m_\nu \quad \text{est compté dans} \quad D\big(n, (\log n)^5\big), \tag{$\mathcal{A}$}$$

et la classe $\mathcal{B}$ contient tous les autres m_ν. Le théorème A implique

$$|\mathcal{A}| \leqslant \tfrac{3}{2} D\big(n, (\log n)^5\big). \tag{3.2}$$

Pour chaque m_ν de $\mathcal{B}$, il existe au moins un indice $j \in [1, \Omega(m_\nu)]$ tel que

$$p_j(m_\nu) > (\log n)^5 m_\nu(j),$$

et nous notons $j(\nu)$ le plus petit de ces indices j. Nous posons alors

$$s(\nu) := \min\{s : m_{\nu+s} \leqslant n/p_{j(\nu)}(m_\nu)\},$$

avec la convention $s(\nu) := g(n) + 1 - \nu$, $m_{g(n)+1} = n + 1$ si $m_{\nu+s} > n/p_{j(\nu)}(m_\nu)$ pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant g(n) - \nu$. Comme, par définition, $p_{j(\nu)}(m_\nu) > (\log n)^5$, on peut écrire

$$\mathcal{B} \subset \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \{m_{\nu+j} : 0 \leqslant j < s(\nu)\}$$

où $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble d'indices de $[1, g(n)]$ tel que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \nu \in \mathcal{N} \Longrightarrow m_\nu \in \mathcal{B} \\ &\text{(ii)} \quad \nu, \nu' \in \mathcal{N},\, \nu < \nu' \Longrightarrow \nu' > \nu + s(\nu). \end{aligned}$$

Posons alors, pour chaque entier r tel que $3 \log_2 n < r \leqslant \log n$,

$$\mathcal{N}(r) := \{\nu \in \mathcal{N} : e^r < p_{j(\nu)}(m_\nu) \leqslant e^{r+1}\}.$$

On a

$$|\mathcal{B}| \leqslant \sum_{3 \log_2 n < r \leqslant \log n} \ \sum_{\nu \in \mathcal{N}(r)} s(\nu). \tag{3.3}$$

De plus, la propriété (ii) ci-dessus garantit que l'application $\nu \mapsto m_{\nu+s(\nu)}$ est une injection de $\mathcal{N}(r)$ dans $\{m : 1 \leqslant m \leqslant n/e^r\} \cup \{n+1\}$. Donc

$$|\mathcal{N}(r)| \leqslant n e^{-r} + 1 \quad (3 \log_2 n < r \leqslant \log n). \tag{3.4}$$

Le résultat suivant nous permet alors de conclure.

Lemme 3.1. *On a pour tout entier r, $3 \log_2 n < r \leqslant \log n$,*

$$\max_{\nu \in \mathcal{N}(r)} s(\nu) \leqslant \frac{e^{r+1}}{(\log n)^3}. \tag{3.5}$$

En effet, il découle immédiatement de (3.3), (3.4) et (3.5) que l'on a pour n assez grand

$$|\mathcal{B}| \leqslant 2e \sum_{3 \log_2 n < r \leqslant \log n} \frac{n}{(\log n)^3} \leqslant \frac{2en}{(\log n)^2} \leqslant \tfrac{1}{2} D\big(n, (\log n)^5\big).$$

Cela implique la majoration de (1.6), puisque $g(n) \leqslant |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.

Il reste à prouver le lemme 3.1. Soit $r \in]3\log_2 n, \log n]$ et $\nu \in \mathcal{N}(r)$. On pose $p = p_{j(\nu)}(m_\nu)$ et, pour $\nu \leqslant \varrho < \nu + s(\nu)$, on décompose canoniquement m_ϱ sous la forme $a_\varrho b_\varrho$ avec

$$a_\varrho = \prod_{\substack{q^\alpha \| m_\varrho \\ q<p}} q^\alpha.$$

D'après la définition de $j(\nu)$, on a

$$a_\nu = m_\nu\big(j(\nu)\big) < p/(\log n)^5.$$

L'hypothèse $m_\nu > n/(\log n)^2$ implique donc

$$b_\nu > n(\log n)^3/p.$$

Nous allons montrer par récurrence sur ϱ que l'on a

$$b_\varrho = b_\nu \qquad \big(\nu \leqslant \varrho < \nu + s(\nu)\big). \tag{3.6}$$

Supposons en effet (3.6) réalisée jusqu'au rang $\varrho - 1$ avec $\nu < \varrho < \nu + s(\nu)$. On a

$$[m_{\varrho-1}, m_\varrho] = [a_{\varrho-1}, a_\varrho][b_{\varrho-1}, b_\varrho] \geqslant b_\nu b_\varrho/(b_\nu, b_\varrho).$$

Si $b_\varrho \nmid b_\nu$, cette quantité est au moins égale à

$$b_\nu p > n(\log n)^3 > n,$$

ce qui contredit le fait que $\{m_{\varrho-1}, m_\varrho\}$ est une arête de $\mathcal{M}_n$. Donc $b_\varrho | b_\nu$. Si alors $b_\varrho \neq b_\nu$, on a

$$m_\varrho \leqslant a_\varrho b_\nu/p \leqslant [a_{\varrho-1}, a_\varrho][b_{\varrho-1}, b_\varrho]/p \leqslant n/p,$$

ce qui contredit la condition $\varrho < \nu + s(\nu)$. Cela complète la preuve de (3.6).

On en déduit facilement (3.5) : pour $\nu \leqslant \varrho < \nu + s(\nu)$, les entiers m_ϱ sont de la forme $a_\varrho b_\nu$ avec $a_\varrho \leqslant n/b_\nu < p/(\log n)^3$.

4. Preuve du théorème 1 : minoration

Nous assimilons un chemin, simple ou non, du graphe divisoriel à une suite $\Gamma = \{m_\nu : 1 \leqslant \nu \leqslant k\}$, que nous représentons sous la forme d'un diagramme

$$m_1 \to m_2 \to \ldots \to m_k. \tag{Γ}$$

Nous utilisons deux opérations sur l'ensemble des chemins. La première est la *concaténation*, définie, lorsque le dernier élément, $m_k^{(1)}$, de Γ_1 est un multiple ou un diviseur du premier élément, $m_1^{(2)}$, de Γ_2, par le diagramme

$$m_1^{(1)} \to \ldots \to m_k^{(1)} \to m_1^{(2)} \to \ldots \to m_\ell^{(2)}. \tag{$\Gamma_1 \to \Gamma_2$}$$

La seconde est la multiplication par un entier a, soit

$$am_1 \to \ldots \to am_k. \tag{$a\Gamma$}$$

Enfin, si la longueur k du chemin Γ est au moins égale à 2, nous désignons respectivement par ${}^*\Gamma$ et Γ^* les chemins obtenus en supprimant le premier ou le dernier élément de Γ.

Pour $x \geqslant 8$, notons p_x le plus grand nombre premier n'excédant pas $\sqrt{x/2}$. Etant donné un entier n assez grand, nous allons construire inductivement une famille de chemins $\Gamma(x,p)$ de $\mathcal{D}_n$, avec $2 \leqslant x \leqslant n$, $p \geqslant 2$, telle que $\Gamma(n) := \Gamma(n, p_n)$ contienne tous les entiers sans facteur carré m tels que $F(m) \leqslant n/2$. Cela implique pleinement la minoration du théorème 1.

Dans un premier temps, nous posons

$$\Gamma(x,2) = 1 \to 2 \qquad\qquad (2 \leqslant x \leqslant n)$$
$$\Gamma(x,3) = \begin{cases} 1 \to 2 & (2 \leqslant x < 18) \\ 1 \to 3 \to 6 \to 2 & (18 \leqslant x \leqslant n). \end{cases}$$

Ensuite, si $x \geqslant 2$ et $p \geqslant 5$, nous définissons

(4.1)
$$\Gamma(x,p) = \begin{cases} 1 \to p\Gamma(x/p, p'') \to 2pp' \to pp'\,\Gamma(x/pp', p'')^* \to {}^*\Gamma(x,p') & (5 \leqslant p \leqslant p_x) \\ \Gamma(x, p_x) & (p > p_x), \end{cases}$$

où p' et p'', $p'' < p'$, sont les deux éléments précédant immédiatement p dans la suite des nombres premiers.

Nous allons établir que pour tout x de $[2,n]$ et tout $p \geqslant 2$, le chemin $\Gamma(x,p)$ satisfait aux conditions suivantes

(i) $\Gamma(x,p)$ a 1 pour premier élément et 2 pour dernier élément ; si, de plus, $p \leqslant p_x$, alors le deuxième élément de $\Gamma(x,p)$ est p.
(ii) $\Gamma(x,p)$ est constitué d'entiers m sans facteur carré et tels que $m \leqslant x$, $P^+(m) \leqslant p$.
(iii) $\Gamma(x,p)$ contient tous les entiers m sans facteur carré et tels que $P^+(m) \leqslant p$, $F(m) \leqslant x/2$.
(iv) $\Gamma(x,p)$ est simple.

Nous procédons par récurrence sur p. La propriété est clairement valide pour $p = 2$ et $p = 3$. Soit $p \geqslant 5$ et supposons que les conditions (i) à (iv) ci dessus sont réalisées pour tout x de $[2,n]$ et tout nombre premier strictement inférieur à p. Pour les x de $[2,n]$ tels que $p > p_x$, la conclusion découle de l'hypothèse de récurrence, puisque $\Gamma(x,p) = \Gamma(x,p_x)$. Pour les x de $[2,n]$ tels que $p \leqslant p_x$, on vérifie d'abord que la concaténation définissant $\Gamma(x,p)$ dans (4.1) est effectivement possible. Cela découle des faits suivants :

le dernier élément de $p\Gamma(x/p, p'')$ est $2p$;
le premier élément de $pp'\Gamma(x/pp', p'')^*$ est pp' ;
le dernier élément de $pp'\Gamma(x/pp', p'')^*$ est un multiple de pp', donc de p' ;
le premier élément de ${}^*\Gamma(x,p')$ est p'.

La validité des conditions (i) et (ii) découle alors immédiatement de l'hypothèse de récurrence et de la relation (4.1). Montrons (iii). Soit m un entier tel que

$$\mu(m)^2 = 1, \quad P^+(m) \leqslant p, \quad F(m) \leqslant x/2.$$

Si $m = 1$, on a bien $m \in \Gamma(x,p)$ d'après (4.1). Si $m > 1$, $P^+(m) \leqslant p'$, alors $m \in \Gamma(x,p')$ d'après l'hypothèse de récurrence. Si $P^+(m) = p$, alors m est de la forme pr avec $\mu(r)^2 = 1$, $P^+(r) \leqslant p'$ et

$$F(m) = \max(p^2, pF(r)) \leqslant x/2, \tag{4.2}$$

ce qui équivaut à $F(r) \leqslant x/(2p)$ puisque $p \leqslant p_x$. Si $P^+(r) \leqslant p''$, alors $r \in \Gamma(x/p, p'')$ et on a bien $m = pr \in p\Gamma(x/p, p'')$. Si $P^+(r) = p'$, alors $r = p's$ où s est sans facteur carré, $P^+(s) \leqslant p''$, et par (4.2)

$$F(r) = \max(p'^2, p'F(s)) \leqslant x/(2p) \tag{4.3}$$

et donc $F(s) \leqslant x/(2pp')$. Cela implique $s = 2$ ou $s \in \Gamma(x/pp', p'')^*$ et donc, comme précédemment, $m \in \Gamma(x, p)$.

Il reste à montrer la validité de (iv). On peut encore supposer $5 \leqslant p \leqslant p_x$. Alors, en examinant les diverses possibilités pour les deux plus grands facteurs premiers des entiers apparaissant dans la concaténation de (4.1), on constate qu'il suffit de vérifier que $2pp' \notin pp'\Gamma(x/pp', p'')^*$. Cela équivaut à $2 \notin \Gamma(x/pp', p'')^*$, ce qui découle des points (i) et (iv) de l'hypothèse de récurrence. Cela achève la démonstration.

Pour illustrer l'efffectivité de la construction précédente, nous explicitons maintenant le chemin $\Gamma(4000)$, qui est de longueur 166.

$1 \to 43 \to 215 \to 430 \to 1290 \to 645 \to 129 \to 258 \to 86 \to 3526 \to 1763 \to 41 \to 205 \to 410 \to 1230 \to 615 \to 123 \to 246 \to 82 \to 3034 \to 1517 \to 37 \to 259 \to 518 \to 2590 \to 1295 \to 185 \to 370 \to 1110 \to 555 \to 111 \to 222 \to 74 \to 2294 \to 1147 \to 31 \to 217 \to 651 \to 1302 \to 434 \to 2170 \to 1085 \to 155 \to 310 \to 930 \to 465 \to 93 \to 186 \to 62 \to 1798 \to 899 \to 29 \to 203 \to 609 \to 1218 \to 406 \to 2030 \to 1015 \to 145 \to 290 \to 870 \to 435 \to 87 \to 174 \to 58 \to 1334 \to 667 \to 23 \to 161 \to 483 \to 966 \to 322 \to 1610 \to 805 \to 115 \to 230 \to 690 \to 345 \to 69 \to 138 \to 46 \to 874 \to 437 \to 19 \to 133 \to 399 \to 798 \to 266 \to 1330 \to 665 \to 95 \to 190 \to 570 \to 285 \to 57 \to 114 \to 38 \to 646 \to 323 \to 17 \to 119 \to 357 \to 714 \to 238 \to 1190 \to 595 \to 85 \to 170 \to 510 \to 255 \to 51 \to 102 \to 34 \to 442 \to 221 \to 1326 \to 663 \to 13 \to 91 \to 273 \to 546 \to 182 \to 910 \to 455 \to 65 \to 130 \to 390 \to 195 \to 39 \to 78 \to 26 \to 286 \to 143 \to 429 \to 858 \to 11 \to 55 \to 110 \to 330 \to 165 \to 33 \to 66 \to 22 \to 154 \to 77 \to 385 \to 770 \to 2310 \to 1155 \to 231 \to 462 \to 7 \to 21 \to 42 \to 14 \to 70 \to 35 \to 105 \to 210 \to 5 \to 10 \to 30 \to 15 \to 3 \to 6 \to 2$

Remarque. Conservons, pour chaque nombre premier p, la notation p' pour désigner, si $p > 2$, son antécédent dans la suite des nombres premiers, et notons $p^{\#}$ son successeur. Le chemin $\Gamma(n)$ peut aussi être obtenu par l'algorithme suivant.

Pour tout $x \in [2, n]$ et tout $p \geqslant 2$, notons $G(x, p)$ le chemin simple de $\mathcal{D}_n$

$$1 \to q_1 \to q_1q_2 \to q_2 \to \ldots \to q_{k-1}q_k \to q_k = 2$$

où $q_1 > \ldots > q_k$ est la suite des nombres premiers n'éxcédant pas $\min(\sqrt{x/2}, p)$. Posons alors $\Gamma_1 := G(n, p_n)$ et définissons inductivement Γ_{t+1} à partir de Γ_t par le processus suivant. Nous repérons dans Γ_t $(t \geqslant 1)$ les séquences du type

$$mP^-(m)^{\#} \quad \text{ou} \quad m/P^-(m) \to m \to mP^-(m)' \tag{I}$$

et

$$2m \quad \text{ou} \quad m/P^-(m) \to m \to m/P^-(m)^{\#}. \tag{II}$$

Si $(m, 6) = 1$, $\omega(m) = t$, $mP^-(m)' \leqslant n/2$, et si m apparaît dans une séquence de type I de Γ_t, nous substituons au maillon $m \to mP^-(m)'$ la séquence

$$mG(n/m, P^-(m)'') \to 2mP^-(m)' \to mP^-(m)'.$$

Si $(m, 6) = 1$, $\omega(m) = t$, $mP^-(m)' \leqslant n$, et si m apparaît dans une séquence de type II de Γ_t, nous substituons au maillon $m \to m/P^-(m)^{\#}$ la séquence

$$mG(n/m, P^-(m)')^* \to m/P^-(m)^{\#}.$$

Par ailleurs, nous laissons invariants tous les autres maillons de Γ_t.

On peut alors montrer par récurrence sur t que Γ_t contient tous les entiers m tels que $\mu(m)^2 = 1$, $\omega(m) = t$, $F(m) \leqslant n/2$, et en fait $\Gamma_t = \Gamma(n)$ pour $t = t(n)$ assez grand. Les détails de la récurrence sont faciles, mais sensiblement plus longs que ceux de la démonstration présentée plus haut. Cependant, cet algorithme est probablement plus performant en temps de calcul.

Bibliographie

[1] P. Erdős, R. Freud, et N. Hegyvári, Arithmetical properties of permutations of integers, *Acta Math. Hungar.* **41** (1983), 169–176.
[2] J.B. Friedlander, Integers free from large and small primes, *Proc. London Math. Soc.* (3) **33** (1976), 565–576.
[3] A.D. Pollington, There is a long path in the divisor graph, *Ars Combinatoria* **16**-B (1983), 303–304.
[4] C. Pomerance, On the longest simple path in the divisor graph, *Congressus Numerantium* **40** (1983), 291–304.
[5] E. Saias, Longueur maximale d'un chemin élémentaire du graphe divisoriel, *C.R. Acad. Sci.* **315**, Série I, (1992), 507–509.
[6] G. Tenenbaum, Sur un problème de crible et ses applications, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* (4) **19** (1986), 1–30.

(Manuscript reçu le 28 février 1992 ;
révisé le 23 septembre 1993.)

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France