Théorie des équations différentielles ordinaires

A. Munnier
Institut Élie Cartan

2006-2007

Bibliographie

Ce cours a en grande partie été élaboré à partir des livres suivants :

– Coddington E-.A et Levinson L. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955. xii+429 pp.
– Zuily Cl. et Queffélec H. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, Paris-Milan-Barcelone, 1995. 478 pp.

et dans une moindre mesure :

– Coddington E-. A. et Carlson R. *Linear Ordinary Differential Equations.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997. xii+341 pp. ISBN 0-89871-388-9.
– Reinhard H. *Equations différentielles, fondements et applications.* Dunod, Paris, 1982. xiv+446 pp.

Les portraits de phase ont été réalisés avec le logiciel MATLAB.

Table des matières

Chapitre 1

Existence et unicité de solutions

1.1 Définitions et notations

On note $E = \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $x = (x_1, \ldots, x_N)$ un élément de E. Sa norme $\|x\|_E$ sera l'une quelconque des normes usuelles sur $\mathbb{R}^N$ (on rappelle que toutes les normes sont équivalentes sur E). Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ une fonction **continue**. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera $f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_N(t, x))$ où chaque fonction f_i est continue de D dans $\mathbb{R}$. La notation (a, b) recouvre tous les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$. De même, on utilisera par exemple la notation $(a, b]$ pour ne pas préciser la nature de l'intervalle en a.

Dans ce cours, on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires (notées en abrégé edo) du premier ordre, sous forme normale (ou résolue) :

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{E}$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équation :

Définition 1.1 Une solution de (E) est un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$ et

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi(t)), \quad \forall\, t \in J, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

On remarque tout de suite que, f et φ étant deux fonctions continues, par composition $\varphi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_N')$ est également continue sur J et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. On notera $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$.

Exemple 1.1 Pour $N = 2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et

$$f(t, x) = M(t)x = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

où $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ sont des fonctions réelles continues, l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ est appelée équation linéaire du premier ordre.

Exemple 1.2 Pour $N = 1$, $f(t, x) = a(t)x + b(t)x^\alpha$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, l'edo (E) est une équation de Bernoulli.

Exemple 1.3 L'équation $x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$ pour laquelle $N = 1$, $f(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont trois fonctions continues, est une équation de Riccati.

Le problème (E) peut avoir de nombreuses solutions sur un intervalle donné. Par exemple, pour $N = 1$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(t,x) \equiv 1$ l'edo :

$$x'(t) = 1, \tag{1.1}$$

admet $\varphi(t) = t + c$ comme solution sur $\mathbb{R}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de problème de Cauchy :

Définition 1.2 Soit $(t_0, x_0) \in D$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{PC}$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et φ une fonction dérivable (en fait $\mathcal{C}^1$) de J dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ pour tout $t \in J$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

En intégrant l'edo du problème de Cauchy (PC) entre t_0 et t et en tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient que :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s, \tag{PCI}$$

où il faut comprendre :

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_N(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s \right).$$

Réciproquement, toute fonction φ vérifiant (PCI) est bien une solution $\mathcal{C}^1$ de (PC). Nous utiliserons souvent l'équivalence entre les deux formulations (PC) et (PCI) dans la suite du cours.

En reprenant l'exemple précédent, on voit que si l'on ajoute à l'équation (1.1) la condition $x(0) = 0$, on doit fixer la constante c et l'unique solution définie sur $\mathbb{R}$ est $\varphi(t) = t$. Nous verrons plus tard cependant que ce n'est pas toujours aussi simple et que sans hypothèses supplémentaires, notamment sur la fonction f, l'unicité de la solution n'est pas assurée en général pour le problème de Cauchy.

Les formulations (E) et (PC), bien que ne faisant intervenir que la dérivée première de $x(t)$, recouvrent en fait une large classe de problèmes. En effet, il est souvent possible de mettre sous la forme (E) des edo dans lesquelles apparaissent des dérivées à un ordre quelconque. Considérons pour simplifier que les fonctions $x(t)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (i.e. $N = 1$). Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 1$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En notant $x^{(k)}(t)$ la dérivée $k-$ème de $x(t)$, toute équation différentielle ordinaire du $p-$ème ordre associée à f qui s'écrit :

$$x^{(p)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(p-1)}(t)), \tag{E$_n$}$$

peut se mettre sous la forme (E). Notons en effet $x_1(t) = x(t)$ et $x_{i+1}(t) = x^{(i)}(t)$ pour $i = 1, \ldots, p-1$ et introduisons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad F(t,X) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \\ f(t, x_1(t), \ldots, x_p(t)) \end{pmatrix}.$$

L'edo (E_n) devient alors :

$$X'(t) = F(t, X(t)).$$

Le problème de Cauchy correspondant à l'équation ci-dessus s'obtient en ajoutant une condition du type $X(t_0) = X_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$. Ceci correspond à la donnée de $x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{p-1}(t_0)$.

Nous allons introduire maintenant la notion de solution approchée. Ces solutions ne seront en général pas aussi régulières que les solutions exactes dont nous venons de parler.

Définition 1.3 On dira qu'une fonction φ à valeurs dans E est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ si :

1. φ est continue sur J.
2. Il existe un ensemble fini $S = \{t_1, \ldots, t_p\}$ de points de $\overset{\circ}{J}$ tels que φ soit $\mathcal{C}^1$ sur $J \setminus S$ et $\lim_{t \to t_i^+} \varphi'(t)$ et $\lim_{t \to t_i^-} \varphi'(t)$ existent mais ne coïncident pas forcément.

Nous avons alors :

Définition 1.4 Soit $\varepsilon > 0$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dira que $\varphi \in \mathcal{C}(J)$ est une solution $\varepsilon-$approchée de (E) si :

1. $(t, \varphi(t)) \in D, \quad \forall\, t \in J,$
2. φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur J (on note S les points où φ' n'est pas définie).
3. $\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\|_E \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in J \setminus S.$

1.2 Existence locale de solutions

Historiquement, il a d'abord été démontré que le problème de Cauchy (PC) admettait localement une solution unique. Ce résultat, que nous démontrerons plus loin, nécessite une hypothèse plus forte que la simple continuité sur la fonction f. En introduisant une suite de solutions approchées, le mathématicien italien Peano en s'appuyant sur un résultat d'Ascoli a démontré :

Théorème 1.1 *Soit* $(t_0, x_0) \in D$ *et soit* $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que le cylindre* $\mathcal{C} = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$ *soit inclus dans* D*. On note*

$$M = \sup_{(t,x) \in \mathcal{C}} \|f(t, x)\|_E \ \textit{et}\ \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe une solution* $\varepsilon-$*approchée* φ *au problème de Cauchy* (PC) *sur l'intervalle* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On commence par construire la solution approchée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$. On procéderait exactement de la même façon sur $[t_0 - \alpha, t_0]$. Comme $f \in \mathcal{C}(D)$ et que $\mathcal{C} \subset D$ est un compact, la fonction f est uniformément continue sur $\mathcal{C}$. Cela signifie que, pour le ε que nous avons choisi, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|f(t, x) - f(\widetilde{t}, \widetilde{x})\|_E \leq \varepsilon,$$

si (t, x) et $(\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in \mathcal{C}$ et $|t - \widetilde{t}| \leq \delta_\varepsilon$, $\|x - \widetilde{x}\|_E \leq \delta_\varepsilon$. Divisons maintenant l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$ en n parties $[t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, \ldots, n$ telles que

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + \alpha,$$

avec

$$|t_i - t_{i-1}| \leq \min\left(\delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M}\right).$$

Sur le segment $[t_0, t_1]$, on définit la fonction φ par :

$$\varphi(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0),$$

puis, de proche en proche, sur $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 2, \ldots, n$ par :

$$\varphi(t) = \varphi(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) f(t_{i-1}, \varphi(t_{i-1})).$$

Il est clair que la fonction ainsi construite est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[t_0, t_0 + \alpha]$

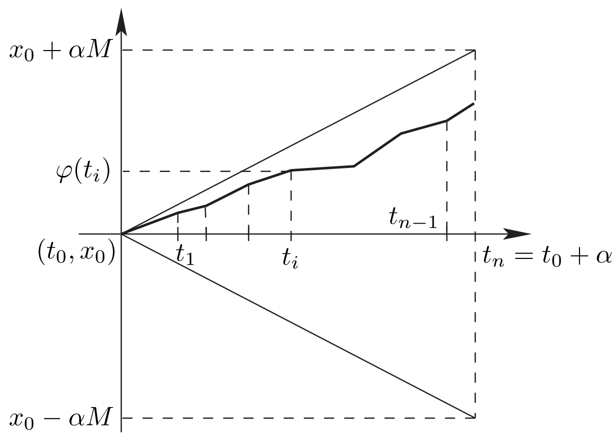


Fig. 1.1 – Graphe de la fonction φ

(elle est linéaire sur chaque segment $[t_{i-1}, t_i]$ donc $\mathcal{C}^1$ et ces applications linéaires se“recollent” aux points t_i). D'autre part, sur chaque segment $[t_{i-1}, t_i]$ on a la propriété :

$$\|\varphi(t) - \varphi(\widetilde{t})\|_E \leq M|t - \widetilde{t}|, \quad \forall\, t, \widetilde{t} \in, [t_{i-1}, t_i].$$

Cette propriété est donc encore vérifiée sur tout le segment $[t_0, t_0+\alpha]$. En particulier, avec $\widetilde{t} = t_0$, on obtient que :

$$\|\varphi(t) - x_0\|_E = \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|_E \leq M|t - t_0| \leq \alpha\, M = b,$$

d'où $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{C} \subset D$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Enfin, soit $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, $t \neq t_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. Il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $t_{i-1} < t < t_i$. Par construction $|t - t_{i-1}| \leq \delta_\varepsilon$ et

$$\|\varphi(t) - \varphi(t_{i-1})\|_E \leq M|t - t_{i-1}| \leq M\,\frac{\delta_\varepsilon}{M} = \delta_\varepsilon.$$

L'uniforme continuité de f entraîne que :

$$\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\|_E = \|f(t_{i-1}, \varphi(t_{i-1})) - f(t, \varphi(t))\|_E \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que φ est bien une solution $\varepsilon-$approchée de (PC). ■

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc construire des solutions $\varepsilon-$approchées, notées φ_ε. Une idée naturelle consiste alors à considérer une suite $(\varepsilon_k)_k$ de réels positifs tendant vers 0, de construire la suite des fonctions approchées $(\varphi_{\varepsilon_k})_k$ et de chercher la limite de cette suite de fonctions qui semble un bon candidat pour être la solution exacte du problème de Cauchy. Remarquez que dans le Théorème 1.1, l'intervalle d'existence des solutions approchées ne dépend pas de ε, ce qui va être un point crucial dans la suite. Cependant, la suite des solutions $\varepsilon-$approchées ne converge pas toujours. Par contre, nous allons montrer qu'il existe toujours une sous-suite convergente. Introduisons d'abord la

Définition 1.5 Un ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ définies sur un intervalle réel I et à valeurs dans E, est dit uniformément équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\|f(t) - f(\widetilde{t})\|_E \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } \forall\, t, \widetilde{t} \in I, |t - \widetilde{t}| \leq \delta_\varepsilon.$$

Nous aurons besoin également du :

Lemme 1.1 (Ascoli) *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans E, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_E$. Alors tout sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(I)$, borné et uniformément équicontinu est relativement compact.*

Démonstration : Si $\mathcal{F}$ est un ensemble fini, c'est évident. On peut donc supposer que $\mathcal{F}$ contient une suite de fonctions deux à deux distinctes $(f_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. L'uniforme équicontinuité de $\mathcal{F}$ nous assure de l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|f(t) - f(\widetilde{t})\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{si } |t - \widetilde{t}| \leq \delta_\varepsilon.$$

L'intervalle I étant borné, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_p$ de longueur inférieure à δ_ε. Dans chacun de ces intervalles, on choisit un réel $t_1, \ldots, t_p$. La suite $(f_n(t_1))_n$ est bornée dans E. Elle admet donc une sous suite convergente $(f_{n_1}(t_1))_{n_1}$. De la même façon, la suite $(f_{n_1}(t_2))_{n_1}$ admet également une sous suite convergente notée $(f_{n_2}(t_2))_{n_2}$. En poursuivant ce procédé d'extraction, on aboutit à la construction de p suites, toutes convergentes $(f_{n_p}(t_i))_{n_p}$, $i = 1, \ldots, p$. Notons $\widetilde{f}_n = f_{n_p}$. Pour le ε choisi plus haut, il existe donc un rang N_ε tel que

$$\|\widetilde{f}_m(t_i) - \widetilde{f}_n(t_i)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, p, \ \forall\, n, m \geq N_\varepsilon.$$

Montrons que $(\widetilde{f}_n)_n$ est uniformément convergente sur I. Pour tout $t \in I$, il existe t_i tel que $|t - t_i| \leq \delta_\varepsilon$. Pour $n, m \geq N_\varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}_m(t) - \widetilde{f}_n(t)\|_E \leq \|\widetilde{f}_m(t) - \widetilde{f}_m(t_i)\|_E + \|\widetilde{f}_m(t_i) - \widetilde{f}_n(t_i)\|_E \\ + \|\widetilde{f}_n(t_i) - \widetilde{f}_n(t)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\widetilde{f}_n)_n$ est de Cauchy uniforme. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème 1.2 (Ascoli-Peano) *Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $\mathcal{C} = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$ soit inclus dans D. On note*

$$M = \sup_{(t,x)\in\mathcal{C}} \|f(t, x)\|_E \ \textit{et}\ \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

alors il existe (au moins) une solution φ au problème de Cauchy (PC) *sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Démonstration : Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0. Pour chaque ε_n, d'après le Théorème 1.1, il existe une solution ε_n-approchée au problème (PC), notée φ_n et définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Toujours d'après la démonstration du Théorème 1.1, chacune de ces solutions vérifie :

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_n(\widetilde{t})\|_E \leq M|t - \widetilde{t}|, \quad \forall\, t, \widetilde{t} \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Cette inégalité entraîne d'une part que la suite $(\varphi_n)_n$ est un ensemble uniformément équicontinu de $\mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$. D'autre part, en choisissant $\widetilde{t} = t_0$, on montre que $\|\varphi_n(t)\|_E \leq \|x_0\|_E + b$ pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. C'est à dire que la suite $(\varphi_n)_n$ est uniformément bornée. Les hypothèses du Lemme d'Ascoli 1.1 sont donc vérifiées et il existe une suite extraite $(\varphi_{n_k})_n$ convergeant vers une fonction continue sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ et notée φ. Posons $\Delta_n(t) = \varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))$ aux points t où $\varphi_n'(t)$ existe et $\Delta_n(t) = 0$ sinon. Par définition des solutions $\varepsilon-$approchées, $\|\Delta_n(t)\|_E \leq \varepsilon_n$ pour tout n et pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. En réecrivant maintenant les solutions sous forme intégrale, on obtient que :

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)\, \mathrm{d}s.$$

Comme φ_{n_k} converge uniformément vers φ et que f est uniformément continue sur le compact $\mathcal{C}$, $f(t, \varphi_{n_k}(t))$ converge uniformément vers $f(t, \varphi(t))$. Si on ajoute la convergence uniforme de Δ_{n_k} vers 0, on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s,$$

ce qui prouve que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et est solution du problème de Cauchy (PC). ■

On utilisera en général le Théorème sous la forme simplifiée suivante :

Corollaire 1.1 *Soit $f \in \mathcal{C}(D)$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ sur lequel le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution.*

Avant de nous intéresser au problème de l'unicité des solutions, voici un exemple simple qui montre qu'un problème de Cauchy peut avoir une infinité de solutions même sur un voisinage arbitrairement petit autour de la condition de Cauchy.

Exemple 1.4 Le problème de Cauchy

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0,$$

où $f(x,t) = \sqrt{|x|}$ est définie et continue sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(0, x(0)) \in D$, admet sur $[0,1]$ et pour tout $0 \leq c \leq 1$ la solution φ_c définie par :

$$\varphi_c(t) = \frac{1}{4}(t-c)^2,\ c \leq t \leq 1, \quad \varphi_c(t) = 0,\ 0 \leq t < c.$$

1.3 Unicité locale des solutions

On commence par un Lemme technique mais qui sera très utile dans la suite :

Lemme 1.2 (Gronwall) *Soit ψ une fonction continue définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ et trois constantes $A \geq 0$, $B > 0$ et $C \geq 0$ telles que :*

$$\psi(t) \leq A + B\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\, \mathrm{d}s\right| + C|t - t_0|, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$ on a l'estimation :

$$\psi(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} + \frac{C}{B}\left(e^{B|t-t_0|} - 1\right).$$

Démonstration : Si $t = t_0$, la conclusion est évidente. Intéressons nous dans un premier temps aux valeurs de t telles que $t_0 < t \leq b$ et posons :

$$\Psi(r) = \int_{t_0}^{r} \psi(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, r \in [t_0, b].$$

La continuité de ψ entraîne que $\Psi \in \mathcal{C}^1([t_0, b])$ et

$$\left(\Psi(r)e^{-Br}\right)' = \left(\Psi'(r) - B\Psi(r)\right)e^{-Br} = \left(\psi(r) - B\int_{t_0}^{r} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) e^{-Br}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité vérifiée par ψ, que :

$$\left(\Psi(r)e^{-Br}\right)' \leq e^{-Br}(A + C(r - t_0)), \quad \forall\, r \in [t_0, b],$$

puis, en intégrant cette relation entre t_0 et t, on obtient :

$$\Psi(t)e^{-Bt} \leq \frac{A}{B}\left(e^{-Bt_0} - e^{-Bt}\right) + C\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)\,dr.$$

Une intégration par parties nous permet de calculer le dernier terme :

$$\int_{t_0}^{t} e^{-Br}(r - t_0)\,dr = \frac{1}{B}e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0),$$

ce qui nous permet d'estimer la fonction Ψ comme suit :

$$\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right| = \Psi(t) \leq \frac{A}{B}\left(e^{B(t-t_0)} - 1\right) + \frac{C}{B}\left(\frac{1}{B}e^{B(t-t_0)} - \frac{1}{B} - (t - t_0)\right).$$

En combinant cette relation avec l'inégalité donnée dans les hypothèses, on obtient la conclusion du Lemme dans le cas $t_0 < t \leq b$. Pour le cas $a \leq t < t_0$, on procède de la même façon mais en posant

$$\Psi(r) = \int_{r}^{t_0} \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

$\blacksquare$

La bonne propriété qui va assurer l'unicité pour le problème de Cauchy (PC) est le caractère lipschitzien de la fonction f. Précisons cette notion :

Définition 1.6 On dira que f est lipschitzienne en x (uniformément par rapport à t), et on notera $f \in \mathrm{Lip}\,(D)$, si il existe $k > 0$ tel que :

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq k\|x_1 - x_2\|_E, \quad \forall\, (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Remarquer que cette notion n'entraîne pas que f est continue sur D comme le prouve l'exemple suivant : $D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 1$ si $t > 0$ et $f(t, x) = 0$ si $t \leq 0$. En revanche, si f est lipschitzienne au sens classique, c'est à dire s'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_E \leq k(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_E), \quad \forall\, (t_1, x_1),\, (t_2, x_2) \in D,$$

alors f est en particulier lipschitzienne en x uniformément en t. L'exercice suivant fournit un exemple simple de fonction lipschitzienne.

Exercice 1.1 Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(D)$ ou si $D_x f$ est continue en (t, x), alors f est lipschitzienne en x uniformément par rapport à t sur tout compact convexe K inclus dans D.

Une application importante du Lemme de Gronwall concerne les solutions $\varepsilon-$approchées :

Application 1 (du Lemme de Gronwall) *Soit $f \in \mathrm{Lip}\,(D) \cap \mathcal{C}(D)$ avec pour constante de Lipschitz $k > 0$. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions respectivement ε_1 et ε_2-approchées de* (E) *sur un même intervalle (a, b) et telles que, pour un certain $a < t_0 < b$ on ait :*

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\|_E \leq \delta.$$

Alors, pour tout $t \in (a, b)$:

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right). \tag{G}$$

Démonstration : En reprenant la démonstration du Théorème 1.2, on a l'écriture des solutions $\varepsilon-$approchées sous forme intégrale :

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_i(s), s) + \Delta_i(s)\mathrm{d}s, \quad i = 1, 2,$$

avec $\|\Delta_i(s)\|_E \leq \varepsilon_i$, $i = 1, 2$. On pose $\psi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E$ et on a :

$$\psi(t) \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\|_E + \int_{t_0}^{t} \|f(\varphi_1(s), s) - f(\varphi_2(s), s)\|_E \mathrm{d}s \\ + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0|.$$

Or, f étant Lipschitzienne en x uniformément en t :

$$\|f(\varphi_1(s), s) - f(\varphi_2(s), s)\|_E \leq k\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_E = k\psi(s).$$

On applique alors l'inégalité du Lemme de Gronwall pour obtenir (G). ■

Exercice 1.2 Soient φ et ψ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ et $t_0 \in [a, b]$. On suppose qu'il existe des constantes positives A, B telles que

$$\varphi(t) \leq A + B\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right|, \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Montrer qu'alors :

$$\varphi(t) \leq A\,\exp\left(B\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s\right|\right).$$

Théorème 1.3 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap \mathrm{Lip}\,(D)$ et avec les mêmes notations que pour le Théorème 1.2, il existe une* **unique** *solution au problème de Cauchy* (PC) *sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Démonstration : Le Théorème 1.2 nous assure de l'existence d'au moins une solution φ_1 sur l'intervalle considéré. On note φ_2 une éventuelle autre solution et on introduit la fonction continue

$$\psi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_E,$$

définie sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant des solutions du problème de Cauchy, elles s'écrivent, sous la forme intégrale (PCI) :

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha], \quad i = 1, 2.$$

On obtient en particulier que :

$$\psi(t) = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\,\mathrm{d}s \right\|_E \leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) \|_E \,\mathrm{d}s,$$

puis, f étant lipschitzienne en x uniformément en t sur D, il existe $k > 0$ telle que $\| f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) \|_E \leq k \| \varphi_1(s) - \varphi_2(s) \|_E$ pour tout $s \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, ce qui nous donne :

$$\psi(t) \leq \int_{t_0}^{t} k|\psi(s)|\,\mathrm{d}s.$$

On conclut ensuite en appliquant le Lemme 1.2 de Gronwall avec $A = 0$, $B = k$ et $C = 0$. ■

Introduisons une nouvelle définition :

Définition 1.7 On dira que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe une boule $B = \{(t', x') \in D,\ \|x - x'\|_E < \varepsilon, |t - t'| < \varepsilon\} \subset D$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B. On note alors $f \in \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$.

⚠ Dans cette définition la constante de lipschitz n'est valable que localement.

Exercice 1.3 Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(D)$ alors $f \in \mathcal{C}(D) \cap \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$.

Du Théorème précédent, on déduit que l'unicité de la solution est en fait globale, ce qui peut se traduire par : lorsque la fonction $f \in \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$ alors les graphes de deux solutions distinctes de (E) ne peuvent se croiser.

Théorème 1.4 (Unicité globale) *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$ et soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de* (E) *telles que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Si il existe un point t_0 de $J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration : Les ensembles J_1 et J_2 sont des intervalles. Il en est donc de même de $J = J_1 \cap J_2$ qui est en particulier connexe et non vide puisqu'il contient t_0. On note $I = \{t \in J \text{ tels que } \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Montrons que I est ouvert et fermé dans J ce qui entraînera que $I = J$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues, on en déduit que I est fermé. Soit $t_1 \in I$, notons $x_1 = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$. Alors $(t_1, x_1) \in D$ et selon le Théorème 1.3, le problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_1) = x_1,$$

admet une unique solution sur $[t_1-\alpha, t_1+\alpha]$. On en déduit que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur cet intervalle et que $]t_1-\alpha, t_1+\alpha[\subset I$ et donc que I est ouvert. ■

On considèrera à partir de maintenant que l'on a toujours $f \in \mathrm{Lip}_{\,loc}(D) \cap \mathcal{C}(D)$ ou plus simplement $f \in \mathrm{Lip}\,(D) \cap \mathcal{C}(D)$, c'est à dire qu'il existe toujours une solution unique pour le problème de Cauchy (PC).

1.4 Prolongement des solutions locales, solutions maximales

Commençons par poser quelques définitions :

Définition 1.8 Soit (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (E). On dit que (φ_2, J_2) prolonge (φ_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur J_1.
Une solution (φ, J) de (E) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Théorème 1.5 (Existence d'une solution maximale) *Soit $f \in \mathcal{C}(D) \cap \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$. Alors par tout point $(t_0, x_0) \in D$ il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy* (PC)*.*

Démonstration : Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ de tous les couples (φ, J) de solutions au problème de Cauchy (PC). Si (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) sont deux tels couples alors $J_1 \cap J_2$ n'est pas vide car il contient t_0 et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$ d'après le Théorème 1.4. Soit I la réunion de tous les intervalles J. Sur I on peut donc définir la fonction ψ par $\psi \equiv \varphi$ sur J pour tout $(\varphi, J) \in \mathcal{S}$. Cette fonction est la solution maximale cherchée. ■

La question à laquelle nous allons répondre maintenant est : pourquoi une solution maximale, définie sur un intervalle borné, ne peut-elle être prolongée sur un intervalle plus grand ?

Théorème 1.6 *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et que $D =]a, b[\times \Omega$. Soient $f \in \mathcal{C}(D) \cap \mathrm{Lip}_{\,loc}(D)$ et $(t_0, x_0) \in D$. Si $(\varphi, (T_-, T_+))$ est une solution maximale du problème de Cauchy* (PC)*, alors on a l'alternative suivante :*

- *ou bien $T_+ = b$,*
  ou bien $T_+ < b$ et pour tout compact K de Ω il existe $t < T_+$ tel que $\varphi(t) \notin K$.
- *Énoncé analogue pour T_-.*

Démonstration : Supposons que $T_+ < b$ et qu'il existe un compact K tel que $\varphi(t) \in K$ pour tout $t \in (t_0, T_+)$. Alors, comme $f \in \mathcal{C}(D)$, il existe $M > 0$ tel que $\|f(t, x)\|_E \leq M$ pour tout $(t, x) \in [t_0, T_+] \times K$. Soit $(t_n)_n$ une suite croissante tendant vers T_+ et telle que $t_0 < t_n < T_+$ pour tout n. En écrivant la solution φ sous forme intégrale, on obtient que :

$$\|\varphi(t_m) - \varphi(t_n)\|_E \leq \int_{t_n}^{t_m} \|f(s, \varphi(s))\|_E \,\mathrm{d}s \leq M|t_m - t_n|, \quad \forall\, m > n.$$

La suite $(t_n)_n$ étant de Cauchy, il en est de même pour $(\varphi(t_n))_n$ qui est donc convergente. Notons $x_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$. Alors $x_1 \in K \subset \Omega$ et on a donc $(T_+, x_1) \in D$. La solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(T_+) = x_1,$$

admet selon le Théorème 1.2 une solution locale qui prolonge φ au delà de T_+. Ceci contredit la maximalité de φ. On procède de façon analogue pour T_-. ■

Si Ω est borné, ce Théorème se traduit par : Le point de $\mathbb{R} \times E$ de coordonées $(t, \varphi(t))$ tend vers un point de la frontière du cylindre $]a, b[\times \Omega$ quand $t \to T_+$ et $t \to T_-$.

1.5 Cas particulier des edo linéaires

Un cas particulier intéressant est celui où f est une application linéaire en x. Considérons I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $N \times N$ fonctions réelles continues :

$$m_{ij} : t \in I \mapsto m_{ij}(t) \in \mathbb{R}.$$

Notons alors $M(t)$ la matrice carrée $N \times N$ dont les cœfficients sont les fonctions $m_{ij}(t)$. On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des matrices carrées $N \times N$ dont la norme naturelle est :

$$\|M\|_{\mathcal{L}(E)} = \max_{\|x\|_E=1} \|Mx\|_E.$$

On dira qu'une ode (E) est linéaire homogène si elle s'écrit :

$$x'(t) = M(t)x(t). \tag{LH}$$

Théorème 1.7 *Si $m_{ij} \in \mathcal{C}(I)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, alors pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, le système* (LH) *admet une unique solution maximale définie sur I tout entier et telle que $x(t_0) = x_0$.*

Démonstration : Il est clair que $f(t, x) = M(t)x$ est une fonction continue sur $I \times E$. Soit $I(t_0)$ un voisinage compact de t_0 dans I (si $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, on peut choisir un intervalle de la forme $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, sinon, t_0 est une extremité de I et on peut choisir $[t_0, t_0 + \delta]$ par exemple). Les fonctions a_{ij} étant continues sur $I(t_0)$, la fonction $k(t) = \|M(t)\|_{\mathcal{L}(F)}$ est elle aussi continue sur $I(t_0)$ (le démontrer à titre d'exercice[1]). On peut alors considérer $k = \max_{t \in I(t_0)} k(t)$ et f est uniformément lipschitzienne en x, de constante de lipschitz k sur $I(t_0) \times E$. Selon le Théorème 1.3, il existe une unique solution locale φ au problème de Cauchy considéré. D'autre part, en appliquant l'inégalité de Gronwall (G) avec $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_2 \equiv 0$, on obtient l'estimation :

$$\|\varphi(t)\|_E \leq \|x_0\|_E e^{k|t-t_0|}.$$

La solution reste donc bornée sur tout intervalle borné et suivant le Théorème 1.6, elle peut donc être prolongée sur I tout entier. ∎

Nous reviendrons largement sur les edo linéaires dans le chapitre suivant qui leur sera dédié.

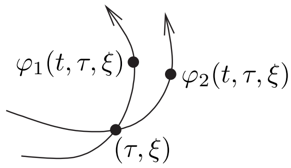
1.6 Dépendance des solutions en fonction des conditions initiales

Lorsqu'elle est unique, la solution d'un problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(\tau) &= \xi, \end{aligned}$$

peut être vue comme une fonction de la variable t dépendant du paramètre $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times E$. Pour mettre en exergue cette dépendance, on écrira cette solution $\varphi(t, \tau, \xi)$. Noter que l'unicité est fondamentale : si le problème de Cauchy ci-dessus admettait plusieurs solutions, la valeur de $\varphi(t, \tau, \xi)$ ne serait pas définie de façon univoque et on ne pourrait pas parler de fonction !

[1] Plus généralement si $\{f_i\}$ est un ensemble de fonctions continues, $\sup_i\{f_i\}$ et $\inf_i\{f_i\}$ sont des fonctions continues



En considérant alors la fonction φ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E$, on peut se poser la question de la régularité de la fonction par rapport à l'ensemble de ses variables.

1.6.1 Continuité en fonction des conditions initiales

Si ψ est une fonction continue définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, on notera :

$$\mathcal{T}(\psi,\delta)=\{(t,x)\in\overset{\circ}{I}\times E,\ \|x-\psi(t)\|_E<\delta,\ \forall\, t\in\overset{\circ}{I}\},$$

le tube ouvert centré en $(t,\psi(t))$. On peut alors énoncer le

Théorème 1.8 *Soit $f\in\mathrm{Lip}\,(D)\cap\mathcal{C}(D)$ et soit ψ une solution de* (E) *définie sur un intervalle $I=[a,b]$. Alors il existe $\delta>0$ tel que $\mathcal{T}(\psi,\delta)\subset D$ et pour tout $(\tau,\xi)\in\mathcal{T}(\psi,\delta)$ il existe une unique solution φ à* (E) *définie sur I et vérifiant $\varphi(\tau,\tau,\xi)=\xi$. En outre, φ est continue sur $V=]a,b[\times\mathcal{T}(\psi,\delta)$.*

Démonstration : Par définition d'une solution de (E), l'ensemble $\{(t,\psi(t)),\ t\in I\}\subset D$. Cet ensemble étant compact et le domaine D étant ouvert, il est possible de trouver $\delta_1>0$ tel que $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)\subset D$ (on pourra écrire les détails à titre d'exercice). Choisissons alors $\delta<e^{-k(b-a)}\delta_1$ où k désigne la constante de Lipschitz de f sur D. Pour tout $(\tau,\xi)\in\mathcal{T}(\psi,\delta)$, il existe d'après le Théorème 1.3 une unique solution locale à l'edo (E) vérifiant $\varphi(\tau)=\xi$. L'estimation de Gronwall (G) founit, sur l'intervalle d'existence de $\varphi(\cdot,\tau,\xi)$:

$$\|\varphi(t,\tau,\xi)-\psi(t)\|_E\le e^{k|t-\tau|}\|\xi-\psi(\tau)\|_E<\delta_1.$$

Ceci prouve que le point $(t,\varphi(t,\tau,\xi))$ reste à l'intérieur de $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)\subset D$ et donc, d'après le Théorème 1.6, $\varphi(\cdot,\tau,\xi)$ peut être prolongée sur tout l'intervalle $[a,b]$. On peut donc affirmer que toute solution qui passe par un point de $\mathcal{T}(\psi,\delta)$ est entièrement contenue dans $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)$ (cf. dessin).

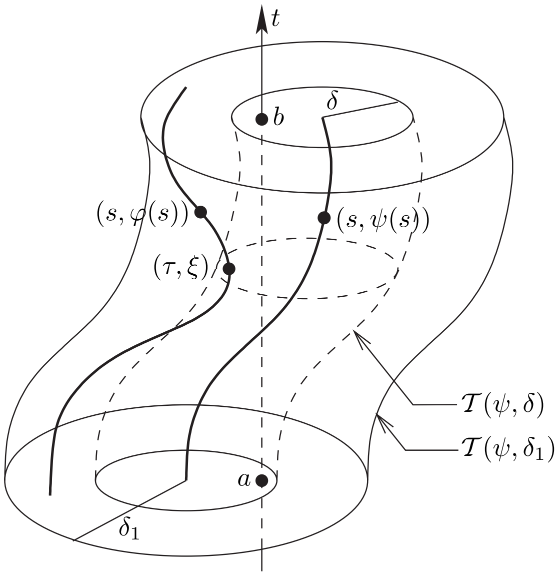


FIG. 1.2 – Les tubes $\mathcal{T}(\psi,\delta)$ et $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)$

Pour montrer la continuité de le fonction φ, nous allons montrer qu'elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur V. Introduisons pour cela la suite $(\varphi_n)_n$ définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_0(t,\tau,\xi) &= \psi(t) + \xi - \psi(\tau),\\ \varphi_{n+1}(t,\tau,\xi) &= \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi))\,\mathrm{d}s, \quad \forall\,(t,\tau,\xi)\in V,\ \forall\, n\geq 0,\end{aligned}$$

et montrons par récurrence qu'elle a les bonnes propriétés. Il est clair que φ_0 est continue sur V et que pour tout n, la continuité sur V de φ_n entraîne la continuité de φ_{n+1}. Toutes les fonctions φ_n sont donc bien continues sur V. Montrons maintenant que, pour tout $n\geq 1$:

$$\left.\begin{aligned}&(t,\varphi_m(t,\tau,\xi))\in\mathcal{T}(\psi,\delta_1),\\ &\|\varphi_m(t,\tau,\xi)-\varphi_{m-1}(t,\tau,\xi)\|_E \leq k^m\frac{|t-\tau|^m}{m!}\|\xi-\psi(\tau)\|_E,\end{aligned}\right.\quad \begin{aligned}&\forall\,1\leq m\leq n,\\ &\forall\,(t,\tau,\xi)\in V.\end{aligned} \tag{P$_n$}$$

D'une part :

$$\|\varphi_0(t,\tau,\xi)-\psi(t)\|_E = \|\xi-\psi(\tau)\|_E < \delta \leq \delta_1,$$

ce qui prouve que $(t,\varphi_0(t,\tau,\xi))\in\mathcal{T}(\psi,\delta_1)\subset D$ pour tout $(t,\tau,\xi)\in V$. D'autre part, comme :

$$\psi(t) = \psi(\tau) + \int_\tau^t f(s,\psi(s))\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t\in[a,b],$$

on obtient que

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(t,\tau,\xi)-\varphi_0(t,\tau,\xi)\|_E &\leq \left|\int_\tau^t \|f(s,\varphi_0(s,\tau,\xi)) - f(s,\psi(s))\|_E\,\mathrm{d}s\right|\\ &\leq \left|\int_\tau^t k\|\varphi_0(s,\tau,\xi)-\psi(s)\|_E\,\mathrm{d}s\right|\\ &= k|t-\tau|\|\xi-\psi(\tau)\|_E,\end{aligned}$$

ce qui est la relation (P_n) pour $n = 1$. On obtient également :

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(t,\tau,\xi) - \psi(t)\|_E &\leq \|\varphi_1(t,\tau,\xi) - \varphi_0(t,\tau,\xi)\|_E + \|\varphi_0(t,\tau,\xi) - \psi(t)\|_E \\ &\leq (1 + k|t-\tau|)\|\xi - \psi(\tau)\|_E \leq e^{k|t-\tau|}\|\xi - \psi(\tau)\|_E \leq \delta_1,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(t, \varphi_1(t,\tau,\xi)) \in \mathcal{T}(\psi, \delta_1)$ pour tout $(t,\tau,\xi) \in V$. Supposons maintenant que (P_n) soit vérifiée pour un certain rang n. Alors

$$\|\varphi_{n+1}(t,\tau,\xi) - \varphi_n(t,\tau,\xi)\|_E \leq \left|\int_\tau^t \|f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi)) - f(s,\varphi_{n-1}(s,\tau,\xi))\|_E \,\mathrm{d}s\right|.$$

D'après (P_n), $(t, \varphi_n(t,\tau,\xi))$ et $(t, \varphi_{n-1}(t,\tau,\xi))$ sont dans $\mathcal{T}(\psi, \delta_1) \subset D$, on peut donc écrire que :

$$\begin{aligned}&\left|\int_\tau^t \|f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi)) - f(s,\varphi_{n-1}(s,\tau,\xi))\|_E \,\mathrm{d}s\right| \\ &\qquad\qquad \leq \left|\int_\tau^t k\|\varphi_n(s,\tau,\xi) - \varphi_{n-1}(s,\tau,\xi)\|_E \,\mathrm{d}s\right|.\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de (P_n), pour obtenir :

$$\begin{aligned}\left|\int_\tau^t k\|\varphi_n(s,\tau,\xi) - \varphi_{n-1}(s,\tau,\xi)\|_E \,\mathrm{d}s\right| &\leq \left|\int_\tau^t k^{n+1}\frac{|s-\tau|^n}{n!}\|\xi - \psi(\tau)\|_E \,\mathrm{d}s\right| \\ &= k^{n+1}\frac{|t-\tau|^{n+1}}{(n+1)!}\|\xi - \psi(\tau)\|_E.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire fournie :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(t,\tau,\xi) - \psi(t)\|_E &\leq \sum_{p=1}^{n} \|\varphi_p(t,\tau,\xi) - \varphi_{p-1}(t,\tau,\xi)\|_E + \|\varphi_0(t,\tau,\xi) - \psi(t)\|_E \\ &= \sum_{p=0}^{n} k^p\frac{|t-\tau|^p}{p!}\|\xi - \psi(\tau)\|_E \leq e^{k|t-\tau|}\|\xi - \psi(\tau)\|_E \leq \delta_1,\end{aligned}$$

et la propriété (P_n) est démontrée pour tout $n \geq 1$. On en déduit que, pour tout $n \geq 0$ et tout $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}\|\varphi_{n+m}(t,\tau,\xi) - \varphi_n(t,\tau,\xi)\|_E &\leq \sum_{p=n+1}^{n+m} k^p\frac{|t-\tau|^p}{p!}\|\xi - \psi(\tau)\|_E \\ &\leq \delta \sum_{p=n+1}^{n+m} k^p\frac{|b-a|^p}{p!}.\end{aligned}$$

La suite $(\varphi_n)_n$ est donc de Cauchy uniforme sur V. Sa limite, notée $\widetilde{\varphi}$ est continue sur V. En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans la relation :

$$\varphi_{n+1}(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi_n(s,\tau,\xi))\,\mathrm{d}s,$$

on obtient que

$$\widetilde{\varphi}(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s,\widetilde{\varphi}(s,\tau,\xi))\,\mathrm{d}s,$$

ce qui prouve que $\widetilde{\varphi} \equiv \varphi$. ■

Remarquer que dans la démonstration de ce Théorème, on a prouvé une nouvelle fois l'existence (locale) d'une solution de (PC).

1.6.2 Différentiabilité en fonction des conditions initiales

Nous allons maintenant étudier la différentiabilité de la solution φ en fonction des conditions initiales (τ, ξ). Nous noterons $D_x f$ la matrice (quand elle existe) :

$$D_x f(t,x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(t,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(t,x) \end{bmatrix}.$$

Pour une fonction $\varphi(t,\tau,\xi)$ où $(t,\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, on notera (quand elle existe) la dérivée partielle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(t,\tau,\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_i}(t,\tau,\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial \xi_i}(t,\tau,\xi) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Théorème 1.9 *En reprenant les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 1.8 précédent et en supposant de plus que $D_x f$ existe et que $D_x f \in \mathcal{C}(D)$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(V)$.*

Démonstration : Prouver que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ est équivalent à prouver que toutes ses dérivées partielles $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\varphi/\partial\tau$, $\partial\varphi/\partial\xi_1, \dots, \partial\varphi/\partial\xi_N$ existent et sont continues sur V. La relation

$$\varphi(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s,\tau,\xi))\,\mathrm{d}s,$$

et la continuité de φ assurée par le Théorème précédent, nous donnent immédiatement l'existence et la continuité de $\partial\varphi/\partial t$. Montrons que $\partial\varphi/\partial\xi_1$ existe et est continue sur V. Pour cela, fixons δ_1 et δ comme dans le Théorème précédent et considérons (τ,ξ) un point de $\mathcal{T}(\psi,\delta)$. Comme $\mathcal{T}(\psi,\delta)$ est un ouvert, si l'on pose $h = (h_1, 0, \dots, 0)^T \in E$, alors, pour tout h_1 proche de 0, $\xi_h = \xi + h = (\xi_1 + h_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathcal{T}(\psi,\delta)$. Enfin considérons :

$$\chi_h(t,\tau,\xi) = \frac{\varphi(t,\tau,\xi_h) - \varphi(t,\tau,\xi)}{h_1}.$$

On peut alors énoncer :

Lemme 1.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $|h_1| \le \delta_\varepsilon$ alors pour tout $(\tau,\xi) \in \mathcal{T}(\psi,\delta)$, la fonction $\chi_h(\cdot,\tau,\xi)$ est une solution $\varepsilon-$approchée du problème de Cauchy linéaire :*

$$\begin{aligned} y'(t) &= D_x f(t, \varphi(t,\tau,\xi)) y(t), \\ y(\tau) &= e_1, \end{aligned}$$

où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in E$.

Démonstration du Lemme: Posons :

$$\theta_h(t,\tau,\xi) = \varphi(t,\tau,\xi_h) - \varphi(t,\tau,\xi).$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (G) à $\varphi(\cdot,\tau,\xi_h)$ et $\varphi(\cdot,\tau,\xi)$, on obtient que :

$$\|\theta_h(t,\tau,\xi)\|_E \le \|\theta_h(\tau,\tau,\xi)\|_E\, e^{|t-\tau|} \le |h_1| e^{(b-a)}. \tag{I$_1$}$$

Ainsi, θ_h tend uniformément vers 0 sur V quand $h \to 0$. D'autre part, φ étant une solution de (E), on déduit que :

$$\theta_h'(t,\tau,\xi) = f(t, \varphi(t,\tau,\xi_h)) - f(t, \varphi(t,\tau,\xi)).$$

Le Théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\mathcal{C}^1$:

$$F_{t,\tau,\xi,h} : s \in [0,1] \mapsto f(t, (1-s)\varphi(t,\tau,\xi) + s\varphi(t,\tau,\xi_h)),$$

nous assure de l'existence de $s_1 = s_1(t,\tau,\xi,h) \in [0,1]$ tel que :

$$\begin{aligned}\theta_h'(t,\tau,\xi) &= F_{t,\tau,\xi,h}(1) - F_{t,\tau,\xi,h}(0) = F'_{t,\tau,\xi,h}(s_1)\\ &= D_x f(t, (1-s_1)\varphi(t,\tau,\xi) + s_1\varphi(t,\tau,\xi_h))\theta_h(t,\tau,\xi).\end{aligned}$$

Cette relation devient :

$$\theta_h'(t,\tau,\xi) = (D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi)) + \Gamma_h(t,\tau,\xi))\theta_h(t,\tau,\xi), \tag{I$_2$}$$

si l'on pose :

$$\Gamma_h(t,\tau,\xi) = D_x f(t,(1-s_1)\varphi(t,\tau,\xi) + s_1\varphi(t,\tau,\xi_h)) - D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi)).$$

Les vecteurs $\varphi(t,\tau,\xi)$ et $\varphi(t,\tau,\xi_h)$ étant dans la boule de centre $\psi(t)$ et de rayon δ_1, par convexité il en est de même de $(1-s_1)\varphi(t,\tau,\xi) + s_1\varphi(t,\tau,\xi_h)$ et donc $(t,(1-s_1)\varphi(t,\tau,\xi)+s_1\varphi(t,\tau,\xi_h)) \in \mathcal{T}(\psi,\delta_1)$. Or $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)$ est compact, inclus dans D et $D_x f$ est continue sur D. Donc $D_x f$ est uniformément continue sur $\mathcal{T}(\psi,\delta_1)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{\delta}_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|D_x f(t,x) - D_x f(t,\widetilde{x})\|_F \le \varepsilon e^{-(b-a)}, \quad \forall\, x,\widetilde{x} \in E,\ \|x-\widetilde{x}\|_E \le \widetilde{\delta}_\varepsilon.$$

Un calcul simple conduit à l'estimation :

$$\begin{aligned}\|(1-s_1)\varphi(t,\tau,\xi) + s_1\varphi(t,\tau,\xi_h) - \varphi(t,\tau,\xi)\|_E &= |s_1|\|\theta_h(t,\tau,\xi)\|_E\\ &\le |h_1|e^{(b-a)}.\end{aligned}$$

En posant $\delta_\varepsilon = \widetilde{\delta}_\varepsilon e^{-(b-a)}$, on obtient donc que :

$$\|\Gamma_h(t,\tau,\xi)\|_F \le \varepsilon e^{-(b-a)}, \quad \forall\,(t,\tau,\xi) \in V,\ \forall\,|h_1| \le \delta_\varepsilon. \tag{I$_3$}$$

Comme $\chi_h = \theta_h/h_1$, en rassemblant les estimations (I$_1$), (I$_2$) et (I$_3$), on obtient :

$$\|\chi_h'(t,\tau,\xi) - D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi))\chi_h(t,\tau,\xi)\|_E \le \varepsilon, \quad \forall\,(t,\tau,\xi) \in V,\ \forall\,|h_1| \le \delta_\varepsilon.$$

Il suffit de vérifier (ce qui est évident) que $\chi(\tau,\tau,\xi) = e_1$ pour avoir la conclusion du Lemme. ∎

Considérons maintenant la solution $\beta(t,\tau,\xi)$ du problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{aligned}y'(t) &= D_x f(t,\varphi(t,\tau,\xi))y(t),\\ y(\tau) &= e_1.\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.7, cette solution existe pour tout $t \in [a,b]$ et d'après le Lemme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\chi_h(t,\tau,\xi)$ soit une solution $\varepsilon-$approchée si $|h_1| \le \delta_\varepsilon$. En utilisant l'estimation de Gronwall (G), on en déduit que :

$$\|\chi_h(t,\tau,\xi) - \beta(t,\tau,\xi)\|_E \le \frac{\varepsilon}{k}(e^{k(b-a)} - 1),$$

pour tout $(t,\tau,\xi) \in V$. En d'autres termes, $\chi_h(t,\tau,\xi) \to \beta(t,\tau,\xi)$ uniformément sur V. On en conclut que $\partial\varphi/\partial\xi_1 = \beta$ existe et est une fonction continue sur V car c'est la limite uniforme des fonctions χ_h qui sont continues sur V.

On procède exactement de la même façon pour les autres dérivées partielles $\partial\varphi/\partial\xi_i$, $i = 2, \ldots, N$ qui sont les solutions des problèmes de Cauchy :

$$\begin{aligned} y'(t) &= D_x f(t, \varphi(t, \tau, \xi)) y(t), \\ y(\tau) &= e_i, \end{aligned}$$

où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, le 1 occupant la $i$ème position.

La fonction $\partial\varphi/\partial\tau$ vérifie la même edo linéaire, la seule difficultée consiste à déterminer la valeur de $y(\tau)$ dans la formulation ci-dessus. On l'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \tau + h, \xi) - \varphi(\tau, \tau, \xi) &= \varphi(\tau, \tau + h, \xi) - \xi \\ &= \varphi(\tau, \tau + h, \xi) - \varphi(\tau + h, \tau + h, \xi) \\ &= \int_{\tau+h}^{\tau} f(s, \varphi(s, \tau + h, \xi)) \,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

puis

$$\frac{\varphi(\tau, \tau + h, \xi) - \varphi(\tau, \tau, \xi)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, \varphi(s, \tau + h, \xi)) \,\mathrm{d}s.$$

La fonction $s \mapsto f(s, \varphi(s, \tau + h, \xi))$ étant continue au point $s = \tau$, on obtient en passant à la limite quand $h \to 0$ (le démontrer en exercice) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau, \tau, \xi) = -f(\tau, \xi),$$

ce qui conclut la démonstration du Théorème. ■

Application 2 *Un cas particulier important est le suivant : fixons τ_0 et t_0 dans I et considérons Ω un ouvert de E inclus dans la section $\mathcal{T}(\psi, \delta) \cap \{\tau = \tau_0\}$ du tube $\mathcal{T}(\psi, \delta)$. L'application suivante et alors bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$:*

$$\begin{aligned} T_{t_0} : \Omega &\to T_{t_0}(\Omega) = \widetilde{\Omega} \\ \xi &\mapsto \varphi(t_0, \tau_0, \xi). \end{aligned}$$

Elle est aussi inversible, son inverse étant donné par :

$$\begin{aligned} T_{t_0}^{-1} : \widetilde{\Omega} &\to \Omega \\ \xi &\mapsto \varphi(\tau_0, t_0, \widetilde{\xi}). \end{aligned}$$

Remarquer que si $t_0 = \tau_0$ alors $\widetilde{\Omega} = \Omega$ et T_{t_0} est l'identité.

1.7 Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1.4 On considère l'équation différentielle $x(t)x'(t) + t = 0$.

1. Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ cette équation admet une unique solution maximale sur un intervalle (T_-, T_+) telle que $x(t_0) = x_0$.
2. Déterminer explicitement cette solution et la représenter graphiquement.
3. Quel est le comportement de la solution lorsque $t \to T_+$?

Exercice 1.5 Même questions que dans l'exercice précédent avec l'edo : $t^2 x'(t) - x(t) = 0$. Discuter l'existence de solutions globales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6 Soit l'edo $t^2x'(t) = t^2 + x^2(t) - tx(t)$.

1. Étudier l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Cauchy associé.
2. En remarquant que cette équation est homogène en $x(t)/t$, c'est à dire qu'elle peut se mettre sous la forme $x'(t) = g(x(t)/t)$, résoudre explicitement et localement le problème de Cauchy associé en cherchant la solution sous la forme $x(t) = ty(t)$.
3. Déterminer les bornes T_- et T_+ des intervalles sur lesquels sont définies les solutions maximales. Étudier le comportement des solutions au voisinage de T_- et de T_+.
4. Représenter graphiquement les solutions.

Exercice 1.7 On considère le problème de Cauchy suivant :

$$x'(t) = F(x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

où F est une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)} < +\infty.$$

1. Expliquer pourquoi ce problème admet une unique solution puis montrer qu'il est équivalent à une équation fonctionnelle de la forme $G(x(t)) = t - t_0$ où G est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $G(x_0) = 0$.
2. Montrer que G réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que vous préciserez.
3. Résoudre le problème de Cauchy et expliciter l'intervalle d'existence des solutions maximales (T_-, T_+).
4. Appliquer ces résultats au cas où $F(x) = 1 + x^2$.

Exercice 1.8 Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(t, x) < g(t, x), \quad \forall\, (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}. \tag{H$_1$}$$

Soient φ et ψ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ solutions respectivement des équations :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad y'(t) = g(t, y(t)), \quad t \in [a, b]. \tag{E}$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, b[$ tel que $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(t) < \psi(t), \quad \forall\, t \in]t_0, t_0 + \delta]$.
2. En déduire que $\varphi(t) \leq \psi(t), \quad \forall\, t \in [t_0, b]$ (on pourra considérer l'ensemble $J = \{c \in [t_0, b] \text{ tq } \varphi(t) \leq \psi(t) \text{ sur } [t_0, c]\}$ et son max noté c^*).

Exercice 1.9 Soit F une fonction de classe C^2 de $E = \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\nabla F(x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

où ∇F est le vecteur $(\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_N)^T$. On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\|_E \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy ci-dessus admet une solution maximale unique définie sur $]T_-, T_+[$ et que la fonction $F(x(t))$ est décroissante. En déduire que $T_+ = +\infty$.
2. En considérant le cas $N = 1$ et $F(x) = x^4/4$, montrer que l'on peut avoir $T_- > -\infty$.

Exercice 1.10 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $V(x) = (v_1(x), \ldots, v_N(x))^T$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}^N$ (une telle application est appelée un champ de vecteurs). On souhaite déterminer toutes les fonctions $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\nabla F(x) \cdot V(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Soit $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N)^T$ un point de Ω tel que $V(\widetilde{x}) \neq 0$ (par exemple $v_1(\widetilde{x}) \neq 0$).

1. Expliquer pourquoi la solution $\phi(t, \xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ du problème de Cauchy :
$$\begin{aligned} x'(t, \xi) &= V(x(t, \xi))) \\ x(0, \xi) &= (\widetilde{x}_1, \xi), \end{aligned}$$
est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage $]-T, T[\times\omega$ de $(0, (\widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$.
2. Montrer que le Jacobien de ϕ est non nul en $(0, (\widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N))$.
3. En utilisant le Théorème d'inversion locale, montrer que ϕ est un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, (\widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N))$ sur un voisinage de $\widetilde{x}$.
4. Poser $\widetilde{F}(t, \xi) = F(\phi(t, \xi))$ et répondre à la question initialement posée.

Exercice 1.11 Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de constante de lipschitz $k > 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale.
2. Montrer que cette solution vérifie
$$|x(t) - x_0| \leq |t||f(x_0)|e^{k|t|},$$
pour tout t dans l'intervalle maximal.
3. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 1.12 Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue. On se propose de montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle :

$$y' = f(y)$$

est définie sur $\mathbb{R}^+$ si f vérifie :

$$\exists \text{ une constante } a \in \mathbb{R} \text{ telle que } f(y) \cdot y \leq a\|y\|^2, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N. \tag{H}$$

1. Montrer que sous l'hypothèse (H), une solution de l'edo partant de y_0 à $t = 0$ vérifie :
$$(\|y(t)\|^2)' \leq 2a\|y(t)\|^2.$$

2. En déduire que
$$\|y(t)\|^2 \leq \|y_0\|^2 e^{2|at|}, \quad \forall\, t \in]T_-(y_0), T_+(y_0)[,$$
où $]T_-(y_0), T_+(y_0)[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution.
3. On suppose que $T_+(y_0) < +\infty$. Montrer que $y(t)$ et $y'(t)$ sont bornées sur $[0, T_+(y_0)[$. Montrer que ces fonctions se prolongent par continuité en $T_+(y_0)$. Montrer que ceci conduit à une contradiction puis conclure.

Exercice 1.13 Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x'' = x, \\ x(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Calculer la solution.

Exercice 1.14 Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x' = 1/x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale. Cette solution est-elle nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
2. Calculer la solution maximale (en précisant l'intervalle maximal). Que se passe-t-il lorsque t tend vers le bord fini de l'intervalle maximal ?

Exercice 1.15 **(tiré de l'examen 2007)** Le but de cet exercice est de montrer le théorème d'unicité d'Osgood.

Soit $\alpha > 0$ et h une fonction définie sur $]0, \alpha[$ qui est :
– lipschitzienne sur tout compact inclus dans $]0, \alpha[$,
– strictement positive sur $]0, \alpha[$,
– et qui vérifie :
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\alpha \frac{\mathrm{d}u}{h(u)} = +\infty.$$
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times E$ et à valeurs dans E qui vérifie
$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_E \leq h(\|y_1 - y_2\|_E), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, y_1, y_2 \in E,\ \|y_1 - y_2\|_E < \alpha.$$
Alors, le théorème d'Osgood affirme que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times E$, il existe **au plus** une solution au problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{E1}$$

1. On note
$$G(s) = \int_s^\alpha \frac{\mathrm{d}u}{h(u)}.$$
Montrer que G réalise une bijection de $]0, \alpha[$ sur $]0, +\infty[$.
2. Soit $t_1 > 0$ et $u_1 \in]0, \alpha[$. Que pouvez-vous dire (existence et unicité d'une solution) concernant le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} u'(t) &= 2h(u(t)), \\ u(t_1) &= u_1. \end{cases} \tag{E2}$$
Donner explicitement la solution de ce problème en faisant intervenir la fonction G (préciser l'intervalle maximal d'existence de la solution).

3. On note ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions de (E1) définies sur un même intervalle $[t_0, t_0+\delta[$ avec $\delta > 0$ ainsi que $\psi = \|\phi_1 - \phi_2\|_E$. On suppose qu'il existe $t \in]t_0, t_0+\delta[$ tel que $\psi(t) \neq 0$. Prouver qu'alors il existe $\widetilde{t_1} \in]t_0, t_0+\delta[$ tel que $\psi(\widetilde{t_1}) \in]0, \alpha[$.
4. Soit u la solution du problème de Cauchy (E2) pour laquelle on choisit $t_1 = \widetilde{t_1}$ et $u_1 = \psi(\widetilde{t_1})$. Montrer que :

$$\psi(t) - u(t) \leq \int_{\widetilde{t_1}}^{t} h(\psi(s)) - 2h(u(s))\mathrm{d}s,$$

pour tout t dans un voisinage de $\widetilde{t_1}$. En déduire que $u(t) \leq \psi(t)$ sur un intervalle $]\widetilde{t_1} - \varepsilon, \widetilde{t_1}]$.
5. On note

$$T^* = \inf\{T \in [t_0, \widetilde{t_1}] \text{ tel que } u(t) \leq \psi(t) \text{ sur } [T, \widetilde{t_1}]\}.$$

Montrer que $T^* = t_0$. Conclure.
6. Pourquoi peut-on dire que ce théorème généralise le résultat d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz ?
7. Application : on pose, pour $N = 1$:

$$f(y) = \begin{cases} y \ln|y| & \text{si } y \in]-1,1[\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que

$$\begin{aligned} &|f(y_2) - f(y_1)| \\ &\qquad \leq |y_2 - y_1| \left(\ln|y_2 - y_1| + (u+1/2)\ln|u+1/2| \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. -(u-1/2)\ln|u-1/2|\right), \end{aligned}$$

où $u = (y_1 + y_2)/2(y_2 - y_1)$.

(b) On pose $g(u) = (u+1/2)\ln|u+1/2| - (u-1/2)\ln|u-1/2|$ définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2|y_2-y_1|}, \frac{1}{2|y_2-y_1|}\right[$. Montrer que

$$\frac{|g(u)|}{|\ln|y_2 - y_1|| + 1} \leq C,$$

pour tout $u \in \left]-\frac{1}{2|y_2-y_1|}, \frac{1}{2|y_2-y_1|}\right[$ et pour tout $y_2, y_1 \in]-1,1[$.

(c) Déduire des questions précédentes que $|f(y_2 - f(y_1)| \leq C|y_2 - y_1|(|\ln|y_2 - y_1|| + 1)$ pour tout $y_2, y_1 \in]-1,1[$.

(d) Montrer que pour tout $y_0 \in]-1,1[$, il existe une et une seule solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)), \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

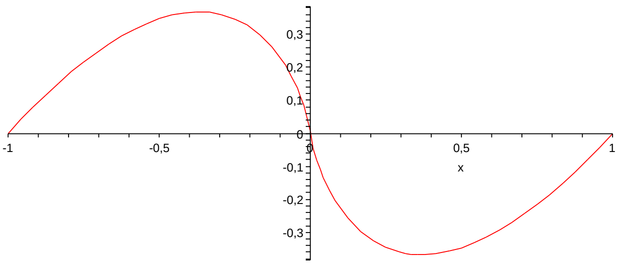


FIG. 1.3 – Graphe de la fonction f.

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires

Nous avons déjà posé quelques définitions et donné quelques résultats concernant les edo linéaires dans le chapitre précédent, au paragraphe 1.5. Avant d'entrer plus avant dans les détails, faisons quelques rappels d'algèbre linéaire.

2.1 Rappels d'algèbre linéaire, exponentielle de matrices

Toutes les matrices considérées dans ce chapitre ont des cœfficients complexes. On notera $F = \mathbb{C}^N$ ($N \geq 1$), $\mathcal{L}(F)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre N et $\mathbb{I}_N$ la matrice identité de $\mathcal{L}(F)$. Pour $A \in \mathcal{L}(F)$ on note

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_N - A),$$

le polynôme caractéristique de A. Ses racines, $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ($1 \leq q \leq N$) sont les valeurs propres de A. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clôt, le polynôme caractéristique se factorise sous la forme :

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{q} (\lambda - \lambda_i)^{d_i},$$

d_i étant l'ordre de multiplicité algébrique de λ_i. On a $d_1 + \ldots + d_q = N$. L'ordre de multiplicité géométrique de λ_i sera noté α_i et le polynôme :

$$\mu_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{q} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

est le plus petit polynôme annulateur de A. Il est appelé polynôme minimal de A. Les sous-espaces propres généralisés

$$F_i = \ker(\lambda_i \mathbb{I}_N - A)^{\alpha_i},$$

sont en somme directe dans F, i.e. $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_q$ et $\dim F_i = d_i$. En réécrivant A dans une base bien adaptée à cette décomposition, on montre qu'elle est semblable à la matrice diagonale par blocs J suivante, appelée réduite de Jordan de A :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_q \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc J_i est une matrice carrée $d_i \times d_i$, elle aussi diagonale par blocs, chaque sous bloc de J_i étant de dimensions au plus $\alpha_i \times \alpha_i$ (l'un au moins étant de dimension exactement $\alpha_i \times \alpha_i$) et ayant la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Ainsi $Z_i = J_i - \lambda_i \mathbb{I}_{d_i}$ est une matrice nilpotente d'indice α_i. Puisqu'il existe une matrice inversible P telle que $J = P^{-1}AP$, on déduit que :

$$\det A = \det J = \prod_{i=1}^{q} \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} J = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i.$$

L'exponentielle de la matrice A est défini comme étant la somme de la série uniformément convergente sur $\mathcal{L}(F)$:

$$e^A = \mathbb{I}_N + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A^p}{p!}.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on déduit de cette définition que :

$$\|e^A\|_{\mathcal{L}(F)} \leq e^{\|A\|_{\mathcal{L}(F)}}.$$

Attention ! Pour A et B dans $\mathcal{L}(F)$, la relation $e^{AB} = e^A e^B$ n'est vérifiée que si A et B commutent. Par contre e^A est toujours inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. De même, si P est inversible, on a pour tout $A \in \mathcal{L}(F)$, $P^{-1}e^A P = e^{P^{-1}AP}$.

Quelques propriétés de différentiabilité

L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}$ est analytique sur $\mathbb{R}$ et $(e^{tA})' = Ae^{tA}$. Le déterminant est analytique sur $\mathcal{L}(F)$, on note $D\det(A)$ sa différentielle en A et on a :

$$\begin{aligned} \langle D\det(A), H\rangle =& (\det(A))\operatorname{tr}(A^{-1}H), \text{ si } \det(A) \neq 0, \\ \langle D\det(A), H\rangle =& 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{ si } \det(A) = 0. \end{aligned}$$

L'application inv: $A \mapsto A^{-1}$ est analytique au voisinage de toute matrice inversible de $\mathcal{L}(F)$ et

$$\langle D\mathrm{inv}(A), H\rangle = -A^{-1}HA^{-1}.$$

On en déduit que pour toute application $t \in I \mapsto \Phi(t) \in \mathcal{L}(F)$ dérivable (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) et on a les formules :

$$(\Phi^{-1}(t))' = -\Phi(t)^{-1}\Phi'(t)\Phi(t)^{-1}, \quad (\det \Phi(t))' = (\det \Phi(t))\operatorname{tr}(\Phi(t)^{-1}\Phi'(t)).$$

Si Φ est solution de l'edo matricielle suivante, $t \in I \mapsto M(t)$ étant une application continue donnée :

$$\Phi'(t) = M(t)\Phi(t), \quad \forall\, t \in I,$$

alors $(\det \Phi(t))' = (\det \Phi(t))\operatorname{tr}(\Phi(t)^{-1}M(t)\Phi(t)) = (\det \Phi(t))\operatorname{tr} M(t)$, que l'on peut intégrer pour obtenir :

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp \int_{\tau}^{t} \operatorname{tr} M(s)\, \mathrm{d}s. \tag{F}$$

Application 3 *Revenons sur l'application 2 de la fin du chapitre précédent. Le difféomorphisme* T_{t_0} *est défini par* $T_{t_0}(\xi) = \varphi(t, \tau_0, \xi)$ *où* $\varphi(t, \tau_0, \xi)$ *est solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} \varphi'(t, \tau_0, \xi) &= f(t, \varphi(t, \tau_0, \xi)), \\ \varphi(\tau_0, \tau_0, \xi) &= \xi. \end{aligned}$$

Si f *est* $\mathcal{C}^1$*, on a vu que* φ *était aussi de classe* $\mathcal{C}^1$ *par rapport à toutes ses variables et que* $D_\xi \varphi(t, \tau_0, \xi)$ *était solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_\xi \varphi(t, \tau_0, \xi) &= D_x f(t, \varphi(t, \tau_0, \xi)) D_\xi \varphi(t, \tau_0, \xi), \\ D_\xi \varphi(\tau_0, \tau_0, \xi) &= \mathbb{I}_N. \end{aligned}$$

Comme $DT_{t_0}(\xi) = D_\xi \varphi(t_0, \tau_0, \xi)$*, on applique la formule* (F) *pour obtenir que :*

$$\begin{aligned} \det DT_{t_0}(\xi) &= \det D_\xi \varphi(\tau_0, \tau_0, \xi) \exp\left(\int_{\tau_0}^{t_0} tr\, D_x f(s, \varphi(s, \tau_0, \xi))\, \mathrm{d}s \right) \\ &= \exp\left(\int_{\tau_0}^{t_0} tr\, D_x f(s, \varphi(s, \tau_0, \xi))\, \mathrm{d}s \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Cela nous donne le déterminant de la Jacobienne associée au changement de variables $x = T_{t_0}(\xi)$*.*

2.2 Edo linéaire homogène

Rappelons brièvement le contexte du chapitre 1, paragraphe 1.5. On désigne par $M : t \in I \mapsto M(t) \in \mathcal{L}(F)$ une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(F)$, ce qui est équivalent à dire que tous les cœfficients $m_{ij}(t)$ de $M(t)$ sont des fonctions complexes continues sur I. L'edo linéaire homogène associée à $M(t)$ s'écrit :

$$x'(t) = M(t)x(t), \quad t \in I. \tag{LH}$$

On a vu que pour toute donnée initiale $(\tau, \xi) \in I \times F$, il existe une unique solution φ à (LH) vérifiant la condition $\varphi(\tau) = \xi$ et définie sur I tout entier. On peut énoncer un premier résultat concernant la structure de l'ensemble des solutions de (LH) :

Théorème 2.1 *L'ensemble de toutes les solutions de* (LH) *sur* I *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{C}^1(I)$ *de dimension* N*.*

Démonstration : Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (LH) et si $c \in \mathbb{C}$, il est clair que $\varphi_1 + c\varphi_2$ est encore une solution ce qui prouve que l'ensemble des solutions est bien un sous ev de $\mathcal{C}^1(I)$. Pour montrer qu'il est de dimension N, nous allons exhiber une base. Choisissons $\tau \in I$ et notons φ_i la solution de (LH) vérifiant la condition de Cauchy $\varphi_i(\tau) = \xi_i$ où $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ est la base canonique de F. Soit maintenant φ une solution de (LH). Alors il existe N nombres complexes $c_1, \ldots, c_N$ tels que $\varphi(\tau) = c_1\xi_1 + \ldots + c_N\xi_N$ car $\mathcal{B}$ est une base de F. Les deux solutions φ et $c_1\varphi_1 + \ldots + c_N\varphi_N$ coïncident au point $t = \tau$ et par unicité globale de la solution du problème de Cauchy, elles coïncident partout : Finalement $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_N\varphi_N$ sur I et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ est un système générateur de l'ensemble des solutions. Montrons qu'il est libre. Considérons pour cela $c_1, \ldots, c_N$, N nombres complexes tels que $c_1\varphi_1 + \ldots + c_N\varphi_N \equiv 0$ sur I. Alors en particulier $c_1\varphi_1(\tau) + \ldots + c_N\varphi_N(\tau) = c_1\xi_1 + \ldots + c_N\xi_N = 0$. On utilise encore une fois le fait que $\mathcal{B}$ soit une base pour conclure que $c_1 = \ldots = c_N = 0$. ■

La connaissance de N solutions de (LH) linéairement indépendantes permet donc de résoudre n'importe quel problème de Cauchy associé à (LH).

Définition 2.1 Une matrice $\Phi(t)$ de $\mathcal{L}(F)$ dont les vecteurs colonnes $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ sont N solutions linéairement indépendantes de (LH) sur I est appelée matrice fondamentale de l'edo (LH). Elle vérifie

$$\Phi'(t) = M(t)\Phi(t), \quad \forall\, t \in I. \tag{LHF}$$

D'après le Théorème 2.1, ses vecteurs forment une base de l'ensemble des solutions de (LH).

Dans la démonstration du Théorème 2.1 on a prouvé en particulier que pour toute base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ de F et pour tout $\tau \in I$, on pouvait construire une matrice fondamentale $\Phi(t)$ telle que ses vecteurs colonnes $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t)$ vérifient $\varphi_i(\tau) = \xi_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$. Si on choisit pour $\mathcal{B}$ la base canonique de F, on en déduit :

Proposition 2.1 *Si $M(t)$ est continue sur I alors pour tout $\tau \in I$ il existe une unique matrice fondamentale $\Phi(t)$ à l'edo* (LH) *définie sur I et qui vérifie $\Phi(\tau) = \mathbb{I}_N$.*

Le déterminant de la matrice fondamentale jouera un rôle particulier dans la suite, c'est pourquoi on définit plus généralement :

Définition 2.2 Soit $\Phi(t)$ une solution de l'edo matricielle (LHF) sur I. Son déterminant

$$W_\Phi(t) = \det(\Phi(t)), \quad t \in I,$$

est appelé le Wronskien de $\Phi(t)$. Il vérifie d'après (F) :

$$W_\Phi(t) = W_\Phi(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{tr} M(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{W}$$

Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale dont les vecteurs colonnes sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ alors, pour tout $\tau \in I$ et pour tout $\xi \in F$, il existe un unique N uplet $C = (c_1, \ldots, c_N)^T \in F$ tel que $\xi = c_1\varphi_1(\tau) + \ldots + c_N\varphi_N(\tau)$. Dans ce cas $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_N\varphi_N$ est alors la solution de (LH) vérifiant $\varphi(\tau) = \xi$. On peut écrire sous forme matricielle que :

$$\varphi = \Phi(t)C.$$

Il est donc important de préciser les propriétés des matrices fondamentales. C'est ce qui est fait dans le Théorème suivant :

Théorème 2.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $\Phi(t)$ solution de* (LHF) *soit une matrice fondamentale est qu'il existe $\tau \in I$ tel que $W_\Phi(\tau) \neq 0$. Dans ce cas $W_\Phi(t) \neq 0$, pour tout $t \in I$.*

Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (LH) *et si $P \in \mathcal{L}(F)$ est inversible, alors $\Phi(t)P$ est encore une matrice fondamentale de* (LH). *Réciproquement, si $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$ sont deux matrices fondamentales de* (LH), *alors $\Phi_1(t)^{-1}\Phi_2(t)$ est une matrice constante sur I.*

Démonstration : Si $\Phi(t)$ est une solution de (LHF) alors chacun de ses vecteurs colonnes notés φ_i est une solution de (LH). D'autre part, $\det \Phi(\tau) \neq 0$ entraîne que $\{\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_N(\tau)\}$ est une base de F. Pour toute solution φ de (LH), il existe donc $C = (c_1, \ldots, c_N)^T \in F$ tel que $\varphi(\tau) = \Phi(\tau)C$. Par unicité du problème de Cauchy, on en déduit que $\varphi(t) = \Phi(t)C$ pour tout $t \in I$ et $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale. Si $\det \Phi(\tau) \neq 0$, alors, d'après la relation (W), $\det \Phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Si P est une matrice inversible, alors $\Phi(t)P$ est encore une solution de (LHF) et $\det(\Phi(t)P) = \det(\Phi(t))\det(P) \neq 0$. La matrice $\Phi(t)P$ est donc encore une matrice fondamentale. Enfin, en dérivant $\Phi_1(t)^{-1}\Phi_2(t)$, on obtient $-\Phi_1(t)^{-1}\Phi_1'(t)\Phi_1(t)^{-1}\Phi_2(t) + \Phi_1(t)^{-1}\Phi_2'(t)$ et comme $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$ sont toutes deux solutions de (LHF), il vient $(\Phi_1(t)^{-1}\Phi_2(t))' = -\Phi_1(t)^{-1}M(t)\Phi_2(t) + \Phi_1(t)^{-1}M(t)\Phi_2(t) = 0$. ■

Remarquer que si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale et si P est une matrice constante inversible alors $P\Phi(t)$ n'est pas forcément une matrice fondamentale. Remarquer également que (LHF) entraîne $M(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$ pour tout $t \in I$: Deux edo (LH) différentes ne peuvent pas avoir la même matrice fondamentale.

2.3 Edo linéaire avec second membre

Soit $M(t)$ une matrice continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $b(t)$ une fonction continue sur I à valeurs dans F. Si $b(t)$ est non identiquement nulle sur I, alors l'edo suivante est appellée edo linéaire avec second membre :

$$x'(t) = M(t)x(t) + b(t), \quad t \in I. \tag{LSM}$$

A ce stade, on pourrait appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à (LSM). Nous allons procéder différement et nous ramener à des résultats déjà démontrés pour (LH).

Théorème 2.3 *Soit $(\tau, \xi) \in I \times F$ et $\Phi(t)$ la matrice fondamentale de* (LH) *vérifiant $\Phi(\tau) = \mathbb{I}_N$. Alors ,la fonction φ définie sur I par :*

$$\varphi(t) = \Phi(t)\xi + \Phi(t)\int_\tau^t \Phi(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

est l'unique solution de l'edo (LSM) *vérifiant $\varphi(\tau) = \xi$.*

Démonstration : Il suffit de dériver l'expression de φ ci-dessus pour vérifier que c'est bien une solution de (LSM). Pour l'unicité, considérons φ_1 et φ_2 deux solutions telles que $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) = \xi$. Alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est une solution de (LH) vérifiant $\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau) = 0$ et par unicité de la solution pour (LH), $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$ sur I. ■

L'expression de φ donnée dans ce Théorème a été obtenue en cherchant une solution sous la forme $\Phi(t)C(t)$ où $C(t)$ est une fonction inconnue. En dérivant on obtient $(\Phi(t)C(t))' = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t)$ et comme $\Phi(t)$ vérifie (LHF), il vient $(\Phi(t)C(t))' = M(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)C'(t)$. Pour que $\Phi(t)C(t)$ soit une solution de (LSM), il faut et il suffit donc que $\Phi(t)C'(t) = b(t)$, c'est à dire que $C'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$ pour tout $t \in I$. En intégrant cette relation, on obtient que

$$C(t) = \int_\tau^t \Phi(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Cette méthode s'appelle la **méthode de la variation de la constante** .

Si l'on dispose de deux solutions φ_1 et φ_2 à l'edo (LSM), on constate que $\varphi_1 - \varphi_2$ est solution de l'edo homogène (LH). En notant $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de (LH), on en déduit qu'il existe $C \in F$ tel que $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \Phi(t)C$ pour tout $t \in I$. Il est alors facile de démontrer :

Proposition 2.2 *Soit $\tau \in I$ et $\Phi(t)$ la matrice fondamentale de* (LH) *vérifiant $\Phi(\tau) = \mathbb{I}_N$. Si l'on dispose d'une solution particulière $\widetilde{\varphi}$ à l'edo* (LSM)*, alors pour tout $\xi \in F$*

$$\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t) + \Phi(t)(\xi - \widetilde{\varphi}(\tau)),$$

est la solution de (LSM) *qui vérifie $\varphi(\tau) = \xi$.*

2.4 Edo linéaire à cœfficients constants

2.4.1 Premières propriétés

Dans ce paragraphe, on se restreindra au cas où la matrice M dans (LH) ou (LSM), ne dépend pas de t (on dit que l'edo est autonome) :

$$x'(t) = Mx(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{LCC}$$

La Proposition suivante rassemble les premiers résultats sur (LCC) qui se déduisent directement de l'étude des l'edo plus générales (LH) et (LSM) :

Proposition 2.3 *Pour toute matrice $M \in \mathcal{L}(F)$ et pour tout couple $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times F$:*
- *Il existe une solution maximale unique φ à l'edo* (LCC) *définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et qui vérifie $\varphi(\tau) = \xi$.*
- *La matrice fondamentale $\Phi(t)$ associée à l'edo* (LCC) *et vérifiant $\Phi(\tau) = \mathbb{I}_N$ est $\Phi(t) = e^{(t-\tau)M}$.*
- *Pour toute fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto b(t) \in F$ continue, il existe une unique solution maximale φ à l'edo*
$$x'(t) = Mx(t) + b(t),$$
vérifiant $\varphi(\tau) = \xi$. Cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par
$$\varphi(t) = e^{(t-\tau)M}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)M} b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Traitons un exemple simple ($N = 2$) pour illustrer tout cela :

Exemple 2.1 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'edo linéaire :

$$x'(t) = Mx(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afin de déterminer la matrice fondamentale $\Phi(t) = e^{tM}$, commençons par déterminer la réduite de Jordan de M. On calcule que $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. La matrice M admet donc deux valeurs propres disctinctes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ et comme $N = 2$, on en déduit que M est diagonalisable. On détermine les sous espaces propres en résolvant :

$$(M - \lambda_1 \mathbb{I}_2)x = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont les combinaisons linéaires de $u_1 = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})^T$. De même les solutions de

$$(M - \lambda_2 \mathbb{I}_2)x = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sont les combinaisons linéaires de $u_2 = (1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2})^T$. Remarquer que l'on a choisi de normer les vecteurs propres u_1 et u_2 (pour la norme euclidienne classique). En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

on a la relation $P^{-1}MP = J$. La matrice J étant diagonale

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix},$$

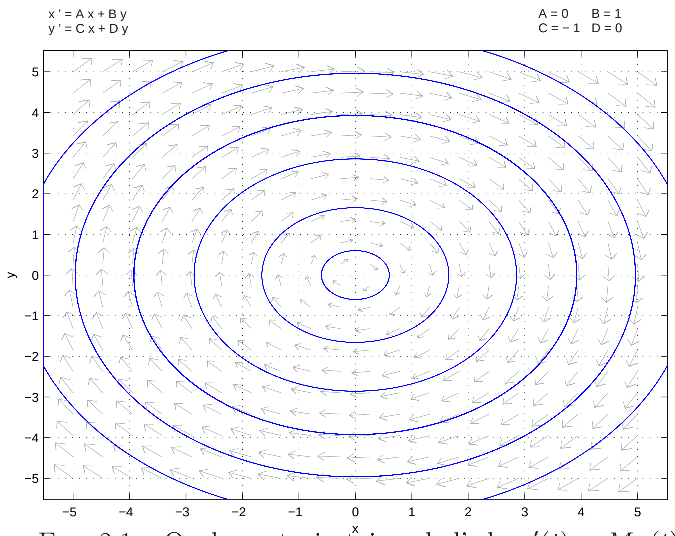


FIG. 2.1 – Quelques trajectoires de l'edo $x'(t) = Mx(t)$

et en appliquant ensuite la formule $Pe^{tJ}P^{-1} = e^{tPJP^{-1}} = e^{tM}$, on obtient :

$$\Phi(t) = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Pour tout couple $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, la solution $\varphi(t, \tau, \xi)$ de l'edo vérifiant $\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi$ est donc :

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'elle est périodique de période 2π. Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On souhaite maintenant résoudre l'équation avec second membre :

$$x'(t) = Mx(t) + b, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Une première méthode consiste à chercher une solution particulière "à la main". Par exemple, en cherchant une solution constante, on est amené à résoudre

$$Mx = -b,$$

et l'on trouve sans difficulté que $\varphi_p = (2, -1)^T$ est une solution. L'unique solution $\varphi(t, \tau, \xi)$ vérifiant $\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi$ est donc obtenue en appliquant la Proposition 2.2, c'est à dire :

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - 2 \\ \xi_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une autre approche consiste à appliquer la méthode de la variation de la constante :

$$\varphi(t, \tau, \xi) = e^{(t-\tau)M}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)M} b \, \mathrm{d}s.$$

Comme b est une vecteur constant, on peut le sortir de l'intégrale. On doit donc calculer :

$$\begin{aligned}\int_\tau^t e^{(t-s)M}\,\mathrm{d}s &= \int_\tau^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t-\tau) & -\cos(t-\tau)+1 \\ \cos(t-\tau)-1 & \sin(t-\tau) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Finalement, la solution s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi(t,\tau,\xi) = &\begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sin(t-\tau) & -\cos(t-\tau)+1 \\ \cos(t-\tau)-1 & \sin(t-\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et on vérifie quelle coïncide bien avec celle trouvée précédement.

2.4.2 Calculer une exponentielle de matrice dans le cas général

Comme nous venons de le voir, une matrice fondamentale de l'edo (LCC) est donnée par $\Phi(t) = e^{tM}$. Il convient donc de savoir calculer e^{tM} pour toute matrice $M \in \mathcal{L}(F)$. Pour cela nous allons exploiter le fait que toute matrice de $\mathcal{L}(F)$ est semblable à une matrice de Jordan. Commençons par remarquer que si M est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_k \end{pmatrix},$$

où chaque M_i est une matrice carrée, alors

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} e^{tM_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tM_k} \end{pmatrix}.$$

Soit J la réduite de Jordan de M et P la matrice de passage telle que $P^{-1}MP = J$. Alors, comme cela a été rappelé dans le paragraphe 2.1, M admet q valeurs propres complexes distinctes ($q \geq 1$) notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ et la matrice de Jordan est diagonale par blocs.

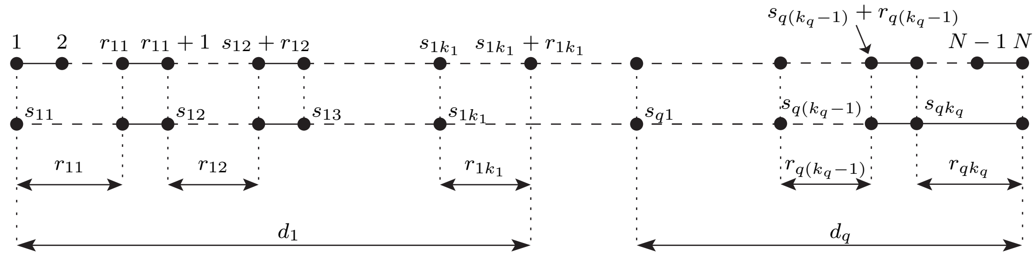


FIG. 2.2 – Récapitulatif des indices des lignes et des colonnes de la réduite de Jordan

Chaque bloc correspondant à une valeur propre λ_i est de taille $d_i \times d_i$. Il se compose de k_i sous blocs R_{ij}, $j = 1, \ldots, k_i$. Chaque sous bloc R_{ij} est de dimensions

$r_{ij} \times r_{ij}$ et est de la forme :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Le bloc R_{ij} commence à la colonne s_{ij} et se termine à la colonne $s_{ij} + r_{ij}$ (cf. figure 2.2), l'un au moins des blocs R_{ij} est de taille $\alpha_i \times \alpha_i$ (on rappelle que α_i est l'ordre de multiplicité géométrique de λ_i). Il est facile, en utilisant la définition de l'exponentielle d'une matrice sous forme de série de prouver que :

$$e^{tR_{ij}} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ensuite l'expression de e^{tM} grâce à la formule $e^{tM} = Pe^{tJ}P^{-1}$.

2.5 Comportement asymptotique des solutions de (LCC)

Rappelons que l'edo (LCC) est une équation linéaire à cœfficients constants qui s'écrit :

$$x'(t) = Mx(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

avec $M \in \mathcal{L}(F)$. On peut énoncer le

Théorème 2.4 *On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M. L'ordre de multiplicité algébrique de λ_i est d_i et son ordre de multiplicité géométrique est α_i. Alors, toute solution de* (LCC) *est bornée ssi*

1. $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) \leq 0, \quad \forall\, i = 1, \dots, q,$

2. $(\mathrm{Re}\,(\lambda_i) = 0) \Rightarrow \alpha_i = 1.$

Toute solution de (LCC) *tend vers* 0 *quand* $t \to \infty$ *ssi* $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$*, pour tout* $i = 1, \dots, q$.

Démonstration : Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, une matrice fondamentale de l'edo (LCC) est e^{tM}. Notons P la matrice inversible de $\mathcal{L}(F)$ vérifiant $P^{-1}MP = J$, où J est la réduite de Jordan de M. Alors, d'après une propriété des matrices fondamentales, $\Phi(t) = e^{tM}P$ est encore une matrice fondamentale. La relation $P^{-1}e^{tM}P = e^{tJ}$ entraîne que $\Phi(t) = Pe^{tJ}$. D'après les résultats établis concernant l'exponentielle d'une matrice, e^{tJ} est une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme :

$$e^{tR_{ij}} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et de taille $r_{ij} \times r_{ij}$ avec $r_{ij} \leq \alpha_i$, l'un au moins de ces blocs étant exactement de taille $\alpha_i \times \alpha_i$. Pour tout $l \in \{1, \ldots, N\}$, il existe donc un unique indice $i \in \{1, \ldots, q\}$, un unique indice $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ et un unique $\beta \in \{1, \ldots, r_{ij}\}$ tels que $l = s_{ij} + \beta$ (cf. figure 2.2). On en déduit que la colonne $\varphi_l(t)$ de la matrice $\Phi(t)$ a pour expression :

$$\varphi_l(t) = e^{t\lambda_i} \left(P_{s_{ij}} + P_{s_{ij}+1} t + \ldots + P_{s_{ij}+\beta} \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \right),$$

où $P_1, \ldots P_N$ désignent les vecteurs colonne de la matrice P. En faisant tendre $t \to \infty$, on a l'équivalence :

$$\|\varphi_l(t)\|_F \underset{+\infty}{\sim} \exp(\mathrm{Re}\,(\lambda_i(t)) \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \|P_{s_{ij}+\beta}\|_F,$$

pour tout $l = 1, \ldots, N$. La matrice P étant inversible, aucune de ses colonnes n'est le vecteur nul. Toute solution φ de l'edo (LCC) s'obtenant comme combinaison linéaire des φ_l, on en déduit la deuxième partie du Théorème : $\varphi(t)$ tend vers 0 ssi $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ pour tout $i = 1, \ldots q$.

Comme d'autre part $\beta \leq \alpha_i$ et qu'il existe au moins un indice l pour lequel $\beta = \alpha_i$, on est déduit également la première équivalence du Théorème. ■

A partir des calculs faits dans cette démonstration, on peut déduire

Corollaire 2.1 *Soit $M \in \mathcal{L}(F)$ telle que $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ pour toute valeur propre λ_i de M. Alors, pour tout $0 < \sigma < \min_i \{-\mathrm{Re}\,\lambda_i\}$, il existe une constante $C_\sigma > 0$ telle que*

$$\|e^{tM}\|_{\mathcal{L}(F)} \leq C_\sigma\, e^{-t\sigma}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Démonstration : Comme dans la démonstration du Théorème, notons J la réduite de Jordan de M et P la matrice inversible telle que $P^{-1}MP = J$. Pour tout $x \in F$, $\|e^{tM}x\|_F = \|e^{tPJP^{-1}}x\|_F = \|Pe^{tJ}P^{-1}x\|_F$. Notons $y = P^{-1}x$ et $\varphi_l(t)$ les vecteurs colonnes de la matrice Pe^{tJ}. On obtient alors que :

$$\|e^{tM}x\|_F = \|\sum_{l=1}^{N} y_l \varphi_l(t)\|_F \leq \sum_{l=1}^{N} |y_l| \|\varphi_l(t)\|_F \leq C_1 \sum_{l=1}^{N} \|\varphi_l(t)\|_F,$$

avec $C_1 = \max\{|y_l|, l = 1, \ldots, N\} = \|y\|_\infty = \|P^{-1}x\|_\infty$. Comme toutes les normes sont équivalentes, $\|P^{-1}x\|_\infty \leq C_2 \|P^{-1}\|_{\mathcal{L}(F)} \|x\|_F \leq C_3 \|x\|_F$. Finalement, en choisissant σ comme dans l'énoncé, on obtient :

$$\|e^{tM}x\|_F e^{\sigma t} \leq C_3 \|x\|_F \left(\sum_{l=1}^{N} \|\varphi_l(t)\|_F \right) e^{t\sigma}.$$

Du comportement asymptotique de $\varphi_l(t)$ établi dans la démonstration du Théorème, on déduit qu'il existe $C_\sigma > 0$ tel que

$$C_3 \left(\sum_{l=1}^{N} \|\varphi_l(t)\|_F \right) e^{t\sigma} \leq C_\sigma, \quad \forall\, t \geq 0,$$

ce qui conclu la démonstration du Corollaire. ■

2.6 Edo linéaire d'ordre n à cœfficients constants

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, n complexes. Considérons l'edo linéaire d'ordre n :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \qquad (\mathrm{LA}_n)$$

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la chapitre 1, cette équation peut se mettre sous forme résolue :

$$X'(t) = AX(t),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En cherchant la réduite de Jordan de A, on établit :

Lemme 2.1 *Le polynôme caractéristique de la matrice A est :*

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

La matrice A est alors la matrice compagnon de son polynôme caractéristique.

Démonstration : D'après la définition :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Notons $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice apparaissant à droite dans l'expression ci-dessus. En supposant que $\lambda \neq 0$, on peut remplacer la dernière ligne par

$$L_n - \left[\frac{a_0}{\lambda}L_1 + \frac{1}{\lambda}\left(a_1 + \frac{a_0}{\lambda}\right)L_2 + \ldots + \frac{1}{\lambda}\left(a_{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{\lambda^{n-2}}\right)L_{n-1}\right],$$

sans changer la valeur du déterminant. Le déterminant à calculer est alors :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & P(\lambda) \end{vmatrix},$$

où $P(\lambda) = \lambda + a_{n-1} + \lambda^{-1}a_{n-2} + \ldots + \lambda^{-(n-1)}a_0$. La matrice étant maintenant diagonale, on obtient facilement le résultat annoncé. Si $\lambda = 0$, on calcul le déterminant en développant par rapport à la première colonne et on trouve bien que $\chi_A(0) = a_0$.
■

Le Théorème suivant donne explicitement les solutions de (LA_n).

Théorème 2.5 *Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_q$ les valeurs propres distinctes de la matrice A (c'est à dire les racines de χ_A), chaque λ_i ayant pour ordre de multiplicité algébrique d_i. Alors les fonctions $t^{k_i} e^{\lambda_i t}$ avec $i = 1, \ldots, q$ et $k_i = 0, \ldots, d_i - 1$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'edo* (LA$_n$).

Démonstration : Notons L l'opérateur différentiel associé à l'edo (LA$_n$), c'est à dire que pour toute fonction φ, n fois dérivable :

$$L\varphi(t) = \varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\varphi'(t) + a_0\varphi(t),$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, calculons :

$$L(t^k e^{t\lambda}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} e^{t\lambda}\right) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\chi_A(\lambda)e^{\lambda t}\right).$$

En appliquant alors la formule de Newton pour dériver un produit de fonctions, nous obtenons :

$$L(t^k e^{t\lambda}) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\chi_A(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \left[\sum_{p=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} \chi_A^{(p)}(\lambda) t^{k-p}\right] e^{\lambda t}.$$

Si λ_i est une racine d'ordre d_i de $\chi_A(\lambda)$, cela signifie que $\chi_A(\lambda_i) = \chi_A'(\lambda_i) = \ldots = \chi_A^{(d_i-1)}(\lambda_i) = 0$, ce qui prouve avec la formule ci-dessus que les fonctions $t^{k_i} e^{\lambda_i t}$ sont bien des solutions de (LA$_n$). Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes : Supposons qu'il existe un ensemble de n constantes $c_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, d_i - 1$, non toutes nulles, telles que

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{d_i-1} c_{ij} t^j e^{\lambda_i t} \equiv 0.$$

On peut réécrire cette relation

$$\sum_{i=1}^{\sigma} P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0 \quad \text{avec} \quad P_i(t) = \sum_{j=1}^{d_i-1} c_{ij} t^j,$$

et où σ est le plus grand indice $\leq q$ tel que $P_\sigma \not\equiv 0$. En multipliant cette relation par $e^{-\lambda_1 t}$, on obtient :

$$P_1(t) + \sum_{i=2}^{\sigma} P_i(t) e^{(\lambda_i - \lambda_1)t} \equiv 0.$$

Comme $\deg(P_1) \leq d_1 - 1$, en dérivant d_1 fois on obtient :

$$\sum_{i=2}^{\sigma} Q_i(t) e^{(\lambda_i - \lambda_1)t} \equiv \sum_{i=2}^{\sigma} Q_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0,$$

où chaque $Q_i(t)$ est un polynôme vérifiant $\deg(Q_i(t))$=$\deg(P_i(t))$ pour tout $i = 2, \ldots, \sigma$ (utiliser la formule de Newton pour dériver un produit). Réitérant cette opération, on finit par obtenir un polynôme $F(t)$ du même degré que $P_\sigma(t)$ et vérifiant $F(t) \equiv 0$, ce qui est impossible. ■

Terminons ce chapitre par un exemple qui utilise une partie des résultats que nous venons d'établir.

2.7 L'équation de Sturm-Liouville

Soient $a_0(t)$ et $a_1(t)$ deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On souhaite étudier la position des zéros des solutions de l'edo :

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, \tag{S}$$

appelée équation de Sturm-Liouville. En introduisant $X = (x(t), x'(t))^T$, cette équation se met sous forme résolue :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} X(t).$$

On sait (résultat concernant les edo linéaires homogènes) que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On note

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

une matrice fondamentale. On a alors :

Théorème 2.6 *Soient φ_1 et φ_2 deux solutions indépendantes de* (E). *Alors, entre deux zéros consécutifs de φ_1 il existe exactement un zéro de φ_2.*

Démonstration : Soient u et v deux zéros consécutifs de φ_1 (c'est à dire que $\varphi_1(u) = \varphi_1(v) = 0$ et $\varphi_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in]u, v[$). Le Wronskien de $\Phi(t)$ est

$$W_\Phi(t) = \det \Phi(t) = \varphi_1'(t)\varphi_2(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1(t).$$

On sait que le Wronskien est toujours non nul donc $W_\Phi(u) \neq 0$ et $W_\Phi(v) \neq 0$, ce qui entraîne que $\varphi_2(u) \neq 0$ et $\varphi_2(v) \neq 0$. Supposons que φ_2 ne s'annule pas sur $]u, v[$, alors la fonction $f = \varphi_1/\varphi_2$ est bien définie sur cet intervalle et $f(u) = f(v) = 0$. D'après le Théorème des accroissements finis, il existerait un point $c \in]u, v[$ tel que $f'(c) = 0 = -W_\Phi(c)/\varphi_2^2(c)$, ce qui contredit $W_\Phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Il existe donc au moins un zéro de φ_2 entre u et v. S'il en existait deux, notons les t_1 et t_2, alors par symétrie des rôles joués par φ_1 et φ_2, il existerait un autre zéro de φ_1 entre t_1 et t_2, ce qui est absurde puisque $\varphi_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in]u, v[$. ■

On suppose maintenant de plus que a_1 est continuement dérivable sur I. Soient $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et φ la solution de (E) vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$ et $\varphi'(t_0) = x_1$. Alors

$$\phi(t) = \varphi(t) \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

est l'unique solution de l'edo de Sturm-Liouville réduite

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0, \tag{SR}$$

où $q(t) = -a_1'(t)/2 - a_1^2(t)/4 + a_0(t)$, telle que $\phi(t_0) = x_0$ et $\phi'(t_0) = x_1 + a_1(t_0)x_0/2$. De plus les fonctions φ et ϕ ont les mêmes zéros. On peut donc se restreindre aux cas où l'edo de Sturm-Liouville est sous la forme (SR).

Théorème 2.7 *Soit $[t_1, t_2] \subset I$ un intervalle sur lequel $q(t) \leq 0$. Alors toute solution non identiquement nulle de* (SR) *a au plus un zéro dans $[t_1, t_2]$.*

Démonstration : Soit ϕ une solution de (SR) non identiquement nulle et $\theta \in [t_1, t_2]$ un zéro de ϕ. Comme ϕ n'est pas identiquement nulle, $\phi'(\theta) \neq 0$ (en effet, la seule solution de (SR) vérifiant les conditions de Cauchy $\phi(\theta) = \phi'(\theta) = 0$ est la solution identiquement nulle par unicité de la solution). Supposons par exemple que

$\phi'(\theta) > 0$. Par continuité de ϕ', il existe $\delta > 0$ tel que sur $]\theta, \theta+\delta[$ on ait $\phi'(t) > 0$. Posons $J = \{c \in]\theta, b]$ tels que $\phi'(t) > 0$ sur $]\theta, c[\}$. Nous venons de montrer que $\theta + \delta \in J$. Notons $c^* = \sup J$. Si $c^* < b$ alors par continuité de ϕ' sur I, $\phi'(c^*) = 0$. Or $\phi(\theta) = 0$ et $\phi'(t) > 0$ sur $]\theta, c^*[$, donc $\phi(t) > \phi(\theta) > 0$ sur $]\theta, c^*[$. D'après l'edo (SR), $\phi''(t) = -q(t)\phi(t) \geq 0$ sur $]\theta, c^*[$. On en déduit que ϕ' est croissante sur $]\theta, c^*[$ et donc $\phi'(c^*) \geq \phi'(\theta) > 0$ ce qui contredit la maximalité de c^*. Finallement, ϕ est strictement croissante et donc ne s'annule pas sur $]\theta, b]$ (si on avait supposé $\phi'(\theta) < 0$, on aurait obtenu que ϕ était strictement décroissante). Supposons qu'il existe un autre zéro de ϕ, noté λ, sur $[a, \theta[$. Un raisonnement analogue entraînerait que ϕ doit être soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur $]\lambda, \theta[$ ce qui contredit l'assertion $\phi(\theta) = 0$. ■

Le Théorème suivant permet de comparer la position des zéros pour deux solutions d'edo de Sturm-Liouville sous forme réduite.

Théorème 2.8 *Soient φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement de*

$$x''(t) + q_1(t)x(t) = 0, \qquad \text{(SR1)}$$

$$x''(t) + q_2(t)x(t) = 0. \qquad \text{(SR2)}$$

On suppose que $q_1(t) \geq q_2(t)$ sur I. Alors, entre deux zéros consécutifs de φ_2 il existe au moins un zéro de φ_1.

Démonstration : Soient u et v deux zéros consécutifs de φ_2 et supposons par exemple que $\varphi_2(t) > 0$ sur $]u, v[$. Cela entraîne que $\varphi_2'(u) \geq 0$ et $\varphi_2'(v) \leq 0$. Supposons également que φ_1 ne s'annule pas sur $]u, v[$, par exemple $\varphi_1(t) > 0$. Par analogie avec ce que nous avons fait dans la démonstration du Théorème 2.6, notons :

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t).$$

Alors $W(\varphi_1, \varphi_2)(u) = \varphi_1(u)\varphi_2'(u) \geq 0$ et $W(\varphi_1, \varphi_2)(v) = \varphi_1(v)\varphi_2'(v) \leq 0$. Or un simple calcul nous donne :

$$W'(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)(q_1(t) - q_2(t)) \geq 0,$$

sur $]u, v[$ de sorte que $W(\varphi_1, \varphi_2)$ devrait être croissante, d'où la contradiction. Les autres cas se traîtent de la même façon. ■

Soient $\nu \in \mathbb{R}_+$. Considérons l'edo suivante, définie sur $]0, \infty[$:

$$x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x(t) = 0,$$

appelée équation de Bessel. Sous forme réduite, elle s'écrit :

$$y''(t) + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4t^2}\right)y(t) = 0. \qquad \text{(B)}$$

Nous allons comparer les zéros ce cette edo avec ceux de

$$x''(t) + x(t) = 0,$$

dont les solutions sont $\varphi(t) = A\,\sin(t - \theta)$, $A \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas :

- Soit $0 \leq \nu \leq 1/2$, alors $1 + (1 - 4\nu^2/4t^2) > 1$ et toute solution de (B) admet au moins un zéro dans tout intervalle de longueur π.
- Soit $\nu > 1/2$, alors $1 + (1 - 4\nu^2/4t^2) \leq 1$ et les zéros (éventuels) des solutions de (B) sont distants d'une longueur plus grande que π.

– Si $\nu = 1/2$, les solutions de (B) sont $A\ \sin(t+\theta)$ et les zéros sont écartés d'une distance exactement égale à π.

On démontre qu'en fait, les solutions des edo de Bessel, quelque soit ν, ont toujours une infinité de zéros sur $]0, \infty[$.

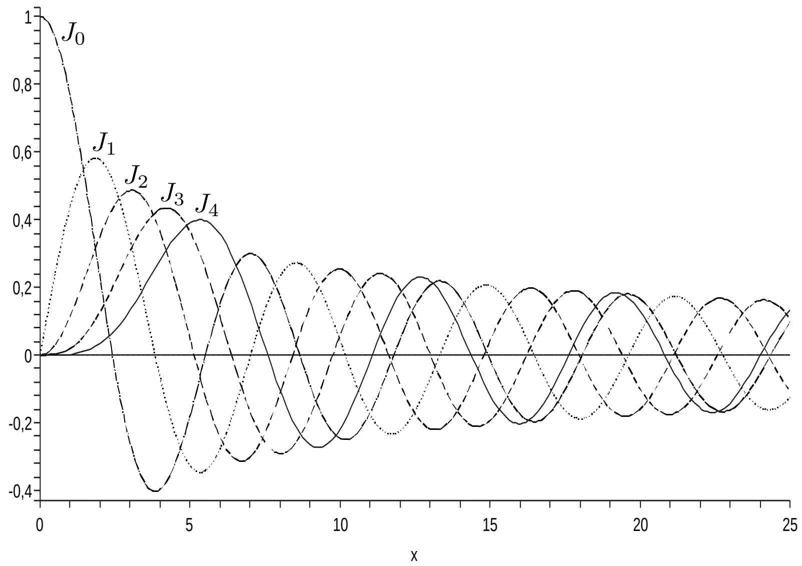


FIG. 2.3 – Les fonctions de Bessel de première espèce J_ν, solutions de (B) pour $\nu = 0, 1, \ldots, 4$.

2.8 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.1 On définit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ -1/3 & -2/3 & 1 \\ -1/3 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On note ensuite $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2 On se donne cette fois les matrices :

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 6 & 10 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

et
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ puis résoudre le problème de Cauchy :

$$X'(t) = BX(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3 On pose $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$.

1. Intégrer le système différentiel linéaire homogène :
$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X(t).$$
2. En appliquant la méthode de la variation de la constante, résoudre ensuite le système avec second membre :
$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.4

1. Soient φ, ψ et χ trois fonctions réelles, continues par morceaux sur un intervalle $I = [a, b]$. On suppose de plus que $\chi(t) > 0$ sur I et que pour tout $t \in I$:
$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$
Montrer qu'on a alors l'estimation de Gronwall suivante sur I :
$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \chi(u)\,du\right)\mathrm{d}s.$$
Indication : On posera $R(t) = \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ et on montrera que $R' - \chi R \leq \chi\psi$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(E)$ une application continue. Supposons qu'il existe une matrice fondamentale Φ de l'edo $x'(t) = A(t)x(t)$ qui soit uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+$ et telle que
$$\liminf_{t\to\infty} \mathrm{Re}\left(\int_0^t \mathrm{tr}\,A(s)\mathrm{d}s\right) > -\infty.$$
Démontrer que Φ^{-1} est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que la seule solution vérifiant $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$ est la solution identiquement nulle.
3. Soit B une autre matrice continue sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant
$$\int_0^\infty \|A(t) - B(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\,dt < \infty.$$
Montrer que toute solution ψ de l'edo $x'(t) = B(t)x(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : Remarquer que $\psi(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}(B(s) - A(s))\psi(s)\,\mathrm{d}s$ et utiliser la question 1.

4. Montrer que pour toute solution φ de l'edo de la question 2., il existe une unique solution ψ à l'edo de la question 3. vérifiant $\varphi(t) - \psi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
   Indication : Remarquer que $\psi(t) = \varphi(t) - \int_t^\infty \Phi(t)\Phi(s)^{-1}(B(s) - A(s))\psi(s)\,\mathrm{d}s$.
5. On suppose maintenant que
$$\int_0^\infty \|B(t)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty.$$
   Montrer que toute solution de l'edo $x'(t) = B(t)x(t)$, non identiquement nulle, tend vers une limite non nulle quand $t \to \infty$. Montrer de plus que pour tout vecteur $c \in E$, il existe une unique solution ψ vérifiant $\psi(t) \to c$ quand $t \to \infty$.

Exercice 2.5 (tiré de l'examen 2007) Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ ($E = \mathbb{R}^N$) une matrice diagonalisable dont les valeurs propres λ_i vérifient $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ et soit $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(E)$ une application continue telle que
$$\int_{\mathbb{R}_+} \|B(s)\|_{\mathcal{L}(E)}\mathrm{d}s < +\infty.$$
On note
$$\sigma = -\max_{i=1,\ldots,N}\{\mathrm{Re}(\lambda_i)\},$$
et on souhaite étudier le comportement asymptotique des solutions $\varphi(t)$ du problème de Cauchy :
$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & = (A + B(t))x(t) \\ x(0) & = x_0. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

1. Montrer que si $B(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\varphi(t)\|_E \leq C\|x_0\|_E e^{-\sigma t}$ pour tout $t \geq 0$.
2. En notant $\phi(t) = \varphi(t)e^{\sigma t}$, montrer que
$$\|\phi(t)\|_E \leq C\|x_0\|_E + C\int_0^t \|B(s)\|_{\mathcal{L}(E)}\|\phi(s)\|_E\mathrm{d}s \quad \forall\, t \geq 0.$$
3. Appliquer une inégalité de Gronwall (vue dans l'exercice précédent) pour obtenir le même résultat que dans la question 1.

Exercice 2.6 Le but de cet exercice est d'étudier le caractère borné des solutions de l'edo :
$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, \tag{E}$$
où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\pi-$périodique, paire. Cette équation s'appelle l'équation de Hill-Mathieu.
Préliminaires :

1. Traiter le problème de l'existence et de l'unicité de solutions pour l'edo (E). On note S l'ensemble des solutions et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ la base canonique de S associée au point $t_0 = 0$ (i.e. $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = 0$ et $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 1$).
2. On considère l'application $A : S \to S$ qui à toute solution φ de (E) associe la solution $A\varphi : t \in \mathbb{R} \to \varphi(t + \pi)$. Quelle est la nature de cette application ? Donner l'expression de la matrice de A dans la base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Vérifier que
$$\mathrm{tr}\, A = \varphi_1(\pi) + \varphi_2'(\pi).$$

Première partie :

1. On pose $\psi_1(t) = \varphi_1(-t)$. Montrer que ψ_1 est solution de (E). En déduire que $\psi_1 \equiv \varphi_1$ et donc que φ_1 est paire.
2. En procédant de la même façon avec la fonction $\psi_2(t) = -\varphi_2(-t)$, montrer que φ_2 est impaire.
3. On note $W(\varphi_1, \varphi_2)$ le Wronskien associé à φ_1 et φ_2. Montrer que $W(\varphi_1, \varphi_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il est constant sur $\mathbb{R}$ (il vaut toujours 1).
4. Déduire de la question précédente la valeur de $\det A$ puis expliciter A^{-1}. En remarquant que l'on a aussi $A^{-1}\varphi(t) = \varphi(t-\pi)$ pour toute solution φ de (E), en déduire que $\varphi_1(\pi) = \varphi_2'(\pi)$.

Deuxième partie : Nous allons démontré les points suivants :
- $|\operatorname{tr} A| < 2 \Rightarrow$ toute solution de (E) est bornée.
- $|\operatorname{tr} A| = 2 \Rightarrow$ l'edo (E) possède une solution non nulle bornée.
- $|\operatorname{tr} A| = 2 \Leftrightarrow \varphi_1'(\pi)\varphi_2(\pi) = 0$.
- $|\operatorname{tr} A| > 2 \Rightarrow$ toute solution non nulle de (E) est non bornée.

1. Expliciter le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$ de A. En déduire que si $|\operatorname{tr} A| < 2$, χ_A admet deux racines complexes conjuguées distinctes de module 1, notées λ et $\bar{\lambda}$.
2. On note u_1 et u_2 deux vecteurs propres associés respectivement à λ et $\bar{\lambda}$. On rappelle qu'alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de S. Vérifier que les fonctions $|u_1|$ et $|u_2|$ sont $\pi-$périodiques, continues. En déduire qu'elles sont bornées puis que toute solution de (E) est bornée.
3. On suppose que $|\operatorname{tr} A| = 2$. En procédant comme dans la question précédente, montrer qu'il existe une solution u non nulle à l'edo (E) vérifiant $u(t+\pi) = \pm u(t)$. En déduire que u est bornée.
4. Montrer l'équivalence $|\operatorname{tr} A| = 2 \Leftrightarrow \varphi_1'(\pi)\varphi_2(\pi) = 0$.
5. Montrer que si $|\operatorname{tr} A| > 2$, les racines de χ_A sont λ et $1/\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $|\lambda| > 1$. On note u_1 et u_2 les vecteurs propres de A associés à λ et $1/\lambda$.
6. soit φ une solution de (E). En écrivant φ dans la base $\{u_1, u_2\}$, déterminer $\varphi(t + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $\varphi(t + n\pi) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ ou lorsque $n \to -\infty$.

Chapitre 3

Annales des partiels

3.1 Partiel 2005-2006

On considère l'edo linéaire d'ordre 2 avec second membre :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = g(t), \tag{E}$$

définie sur $I = [a, b]$ où p, q et g sont trois fonctions données continues sur I. Soient α et β deux réels. On dit qu'une solution φ de (E) vérifie les **conditions aux limites** (L_E) lorsque :

$$\varphi(a) = \alpha \quad \text{et} \quad \varphi(b) = \beta. \tag{L_E}$$

On introduit également l'équation homogène associée à (E) :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{H}$$

On dira qu'une solution φ de (H) vérifie les **conditions aux limites homogènes** (L_H) lorsque :

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = 0. \tag{L_H}$$

Le but de ce devoir est de démontrer le

Théorème 3.1 (Alternative de Fredholm) *L'équation* (E) *admet pour tout α et β une solution unique vérifiant* (L_E) *si et seulement si le problème homogène* (H)+(L_H) *admet $\varphi \equiv 0$ comme unique solution.*

1. Mettre les edo (E) et (H) sous forme résolue :

   $$X'(t) = M(t)X(t) + G(t), \tag{E_R}$$

   et

   $$X'(t) = M(t)X(t), \tag{H_R}$$

   où $X : t \in I \mapsto \mathbb{R}^2$ et où l'on précisera l'expression de la matrice $M(t)$ et de la fonction $G : t \in I \mapsto \mathbb{R}^2$.
2. Rappeler succintement les résultats du cours concernant l'existence et l'unicité de solutions pour (E_R) et (H_R).
3. On considère φ_1 et φ_2 deux solutions de (H) vérifiant respectivement $\varphi_1(a) = 0$, $\varphi_1'(a) = -1$ et $\varphi_2(b) = 0$, $\varphi_2'(b) = 1$. A partir de ces solutions, expliciter une matrice solution de (H_R) ainsi que son Wronskien que l'on note $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$.
4. On suppose dans la suite que $W(\varphi_1, \varphi_2)(a) \neq 0$. Que vaut $W(\varphi_1, \varphi_2)(b)$? Soit φ une solution de (H). Expliquer pourquoi il existe deux réels A_1 et A_2 tels que $\varphi = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$.

5. Montrer que si la solution φ de la question précédente vérifie de plus (L_H) alors $\varphi \equiv 0$.
6. Soit ψ la solution particulière de (E) qui vérifient $\psi(a) = \psi'(a) = 0$. Donner la forme, en fonction de φ_1, φ_2 et ψ, de toute solution f de (E). En déduire qu'il existe une et une seule solution de (E) qui vérifie (L_E) (α et β étant donnés).
7. On suppose maintenant que $W(\varphi_1, \varphi_2)(a) = 0$. Quelle type de relation existe-t-il entre φ_1 et φ_2 ? En déduire que le problème (H)+(L_H) admet une infinité de solutions non nulles.
8. On note φ_3 une solution de (H) linéairement indépendante de φ_1 (et donc aussi de φ_2). Donner les expressions de $W(\varphi_1, \varphi_3)(a)$ et $W(\varphi_2, \varphi_3)(b)$.
9. En procédant comme dans la question 6, montrer que le problème (E)+(L_E) admet soit une infinité de solutions si :
$$W(\varphi_1, \varphi_3)(a)(\psi(b) - \beta) - \alpha W(\varphi_2, \varphi_3)(b) = 0,$$
soit aucune solution si cette relation n'est pas satisfaite.
10. Démontrer le Théorème ci-dessus.
11. **Application :** On pose $I = [0, \pi]$. Donner deux solutions linéairement indépendantes de $x''(t)+x(t) = 0$. On ajoute les conditions aux limites $x(0) = x(\pi) = 0$. Selon l'alternative de Fredholm, combien y-a-t-il de solutions à l'edo $x''(t) + x(t) = g(t)$ avec les conditions aux limites $x(0) = \alpha$ et $x(\pi) = \beta$ (g, α et β sont donnés et on ne demande pas de résoudre) ?

3.2 Partiel 2006-2007

Exercice 1 : Le but de cet exercice est d'étudier les solutions du problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y'(t) & = \sin\left(\dfrac{1}{y(t)}\right), \\ y(0) & = y_0 \in \mathbb{R}^*. \end{cases} \tag{C}$$

1. **Préliminaires :**
   (a) Que pouvez vous dire quant à l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour (E) ? (citer précisément le théorème du cours).
   (b) La valeur de y_0 étant fixée, on note T_- et T_+ les bornes de l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale φ de (E). D'après de cours, décrivez les divers comportements possibles de cette solution lorsque $t \to T_+$.
   (c) Soit φ est la solution maximale correspondant à une donnée initiale y_0. Quelle est la solution correspondant à la donnée $-y_0$? On choisit dorénavant $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
2. **On suppose que** $y_0 \in]0, 1/\pi]$ **:**
   (a) Déterminer les solutions constantes de l'edo. En déduire que si $y_0 \in]0, 1/\pi]$, la solution maximale de (E) est bornée. Que valent T_- et T_+ ?
   (b) Montrer que dans ce cas la solution est monotone sur (T_-, T_+). En déduire qu'elle admet des limites l_- et l_+ lorsque $t \to T_-$ et $t \to T_+$.
   (c) Montrer que $\{l_+, l_-\} \subset \left\{\dfrac{1}{(k+1)\pi}, \dfrac{1}{k\pi}\right\}$ où k est en entier dont vous préciserez la valeur en fonction de y_0 (utiliser l'écriture de la solution sous forme intégrale).

3. **On suppose que $y_0 > 1/\pi$:**

   (a) Que valent T_- et T_+ ?

   (b) Montrer que φ est strictement croissante sur (T_-, T_+) puis que $\lim_{t \to T_-} \varphi(t) = 1/\pi$.

   (c) En admettant que la fonction $y \mapsto \dfrac{\sin(y)}{y}$ est décroissante sur $]0, \pi]$, montrer que :

$$\varphi^2(t) \geq y_0^2 + 2y_0 \sin\left(\frac{1}{y_0}\right) t,$$

   pour tout $t \in [0, T_+)$. En déduire $\lim_{t \to T_+} \varphi(t)$.

   (d) On rappelle que $\dfrac{\sin(y)}{y} = 1 + \varepsilon(y)$ où $\varepsilon(y)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque y tend vers 0. Montrer que pour tout $t \in [0, T_+)$:

$$\varphi(t)^2 = y_0^2 + 2(1 + \widetilde{\varepsilon}(t))t,$$

   où $\widetilde{\varepsilon}(t)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$. En déduire un équivalent de φ en T_+.

4. **Représentation graphique :**
   (a) Soient φ et $\widetilde{\varphi}$ deux solutions telles que les conditions initiales correspondantes y_0 et $\widetilde{y}_0$ soient toutes les deux dans un même intervalle du type $\left]\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right[$, $k \in \mathbb{N}^*$ ou $]1/\pi, +\infty[$. Montrer qu'alors, $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t + \widetilde{t})$ avec $\widetilde{t} = \varphi^{-1}(\widetilde{y}_0)$ (expliquer pourquoi φ^{-1} est bien définie et préciser son domaine de départ et d'arrivée).
   (b) Dessiner quelques solutions de (E) en choisissant les données initiales dans un intervalle $\left]\frac{1}{(2k+2)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right[$, $k \in \mathbb{N}^*$. Faire un autre dessin en choisissant cette fois $y_0 > 1/\pi$.

Exercie 2 : Dans cet exercice, on souhaite prouver le résultat suivant : si φ_1 et φ_2 sont deux solutions indépendantes de l'edo

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x = 0, \tag{E}$$

où a_1 et a_0 sont deux fonctions réelles continues sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, alors entre deux zéros consécutifs de φ_1 il existe exactement un zéro de φ_2.

1. Mettre l'edo (E) sous forme résolue :
$$X'(t) = M(t)X(t), \tag{ER}$$
où $X : t \in I \mapsto \mathbb{R}^2$ et où l'on précisera l'expression de la matrice $M(t)$.
2. Traiter la question de l'existence et de l'unicité de solutions à l'ode (E). Préciser la notion de solutions indépendantes.
3. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E). En déduire l'expression d'une matrice fondamentale de l'edo (ER) et du Wronskien (que l'on note $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$).
4. Soient u et v deux zéros consécutifs de φ_1 dans I (i.e. $\varphi_1(u) = \varphi_1(v) = 0$ et $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in]u, v[$). En utilisant les propriétés du Wronskien, prouver que $\varphi_2(u) \neq 0$ et $\varphi_2(v) \neq 0$.
5. On suppose que $\varphi_2(t) \neq 0, \forall t \in]u, v[$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f = \varphi_1/\varphi_2$ et en utilisant encore une fois les propriétés du Wronskien, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
6. En remarquant que les fonctions φ_1 et φ_2 jouent un rôle symétrique et en faisant une démonstration par l'absurde, prouver qu'il ne peut y avoir qu'un seul zéro de φ_2 dans $]u, v[$.

Chapitre 4

Stabilité des équations différentielles autonomes

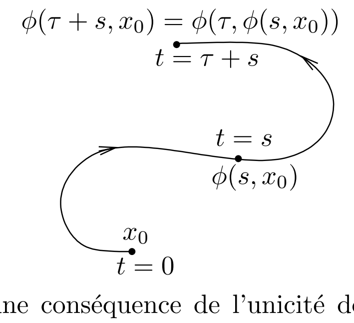
4.1 Définitions

Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^N$ et f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Une équation différentielle autonome est une edo du type :

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{EA}$$

D'après les résultats établis dans le chapitre 1, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une unique solution maximale $\varphi(t, t_0, x_0)$ à l'edo (EA) qui vérifie $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Si l'on note $\phi(t, x_0)$ la solution définie sur $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ qui vaut x_0 lorsque $t = 0$ (i.e. $\phi(t, x_0) = \varphi(t, 0, x_0)$) alors

$$\phi(\tau + s, x_0) = \phi(\tau, \phi(s, x_0)), \quad \forall\, s \in (a, b),\ \forall\, \tau \in (a - s, b - s).$$

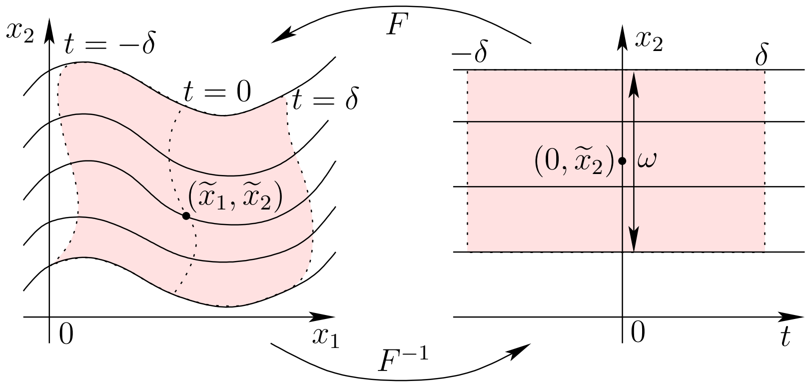


La démonstration est une conséquence de l'unicité des solutions maximales. Les courbes paramétrées $t \mapsto \phi(t, x_0)$ sont les **orbites** (ou **trajectoires**) de l'edo (EA). En TD, nous avons démontré le Théorème suivant :

Théorème 4.1 *Si $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N)^T$ est un point de Ω pour lequel $f(\widetilde{x}) = (f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_N(\widetilde{x}))^T \neq 0$ (par exemple, pour fixer les idées, $f_1(\widetilde{x}) \neq 0$) alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\widetilde{x}$ dans Ω, $\delta > 0$ et ω un voisinage de $(\widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_N)^T$ dans $\mathbb{R}^{N-1}$ tels que l'application*

$$\begin{aligned} F :&]-\delta, \delta[\times \omega \to \mathcal{V} \\ & (t, y) \mapsto F(t, y) = \phi(t, (\widetilde{x}_1, y)), \end{aligned}$$

soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.



En d'autres termes, il existe sur un voisinage de $\widetilde{x}$ un difféomorphisme qui envoie les trajectoires de (EA) sur des droites parallèles. Intéressons nous maintenant au comportement des orbites au voisinage des points où f s'annule.

Définition 4.1 Un point d'équilibre (ou point critique) de l'edo (EA) est un point $x_0 \in \Omega$ pour lequel $f(x_0) = 0$.

On remarque que pour un tel point, $\phi(t, x_0) \equiv x_0$ pour tout t d'où la dénomination “point d'équilibre”.

Définition 4.2 Un point d'équilibre x_0 est dit
- Stable si : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \Omega$ vérifiant $\|x - x_0\|_E \leq \delta_\varepsilon$, $\phi(t, x)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et $\|\phi(t, x) - x_0\|_E < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.
- Instable s'il n'est pas stable.
- Asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - x_0\|_E < \delta$ entraîne que $\phi(t, x)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$

Autrement dit, x_0 est stable si l'on peut rendre la solution $\phi(t, x)$ aussi proche que l'on veut de x_0 pour tout $t \geq 0$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0. Commençons pas étudier le cas le plus simple : les edo linéaires à cœfficients constants.

4.2 Stabilité des edo linéaires à cœfficients constants

On supposera dans tout ce paragraphe que $E = \mathbb{R}^2$ et que $\det M \neq 0$ où M est la matrice intervenant dans l'edo linéaire :

$$x'(t) = M\, x(t), \tag{LCC}$$

de sorte que $x = 0$ est le seul point d'équilibre de l'équation (LCC). L'allure des trajectoires dépend essentiellement de la nature des valeurs propres de M.

4.2.1 La matrice M a deux valeurs propres réelles distinctes

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice M et u_1, u_2 les vecteurs propres associés. Pour tout $x \neq 0$, la solution $\phi(t, x)$ à l'edo (LCC) s'écrit dans la base $\{u_1, u_2\}$:

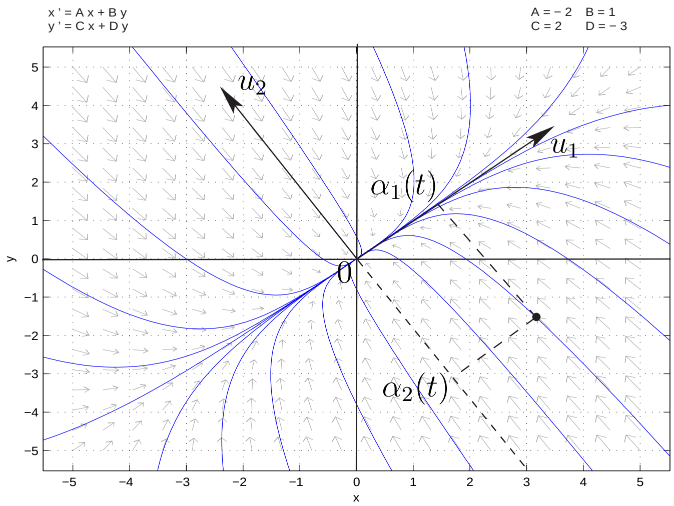
$$\phi(t, x) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2.$$

On calcule ensuite que $\phi'(t, x) = \alpha_1'(t)u_1 + \alpha_2'(t)u_2 = M\phi(t, x) = \alpha_1(t)Mu_1 + \alpha_2(t)Mu_2 = \alpha_1(t)\lambda_1 u_1 + \alpha_2(t)\lambda_2 u_2$. Comme $\{u_1, u_2\}$ est un système libre, cette égalité implique que $\alpha_1'(t) - \lambda_1\alpha_1(t) = 0$ et $\alpha_2'(t) - \lambda_2\alpha_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sachant que $\phi(0,x) = x = \widetilde{x}_1 u_1 + \widetilde{x}_2 u_2$, on obtient que

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \widetilde{x}_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \alpha_2(t) &= \widetilde{x}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

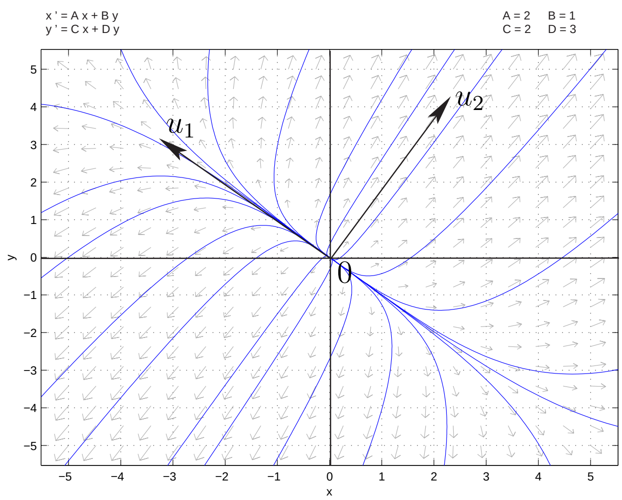
Il est alors facile de montrer que $\alpha_2 = C\,|\alpha_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, avec $C = (\widetilde{x}_2/\lambda_1)|\widetilde{x}_1|^{-\lambda_2/\lambda_1}$. Dans la base $\{u_1, u_2\}$, les trajectoires décrivent les courbes d'équations $\alpha_2 = C\,|\alpha_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$ dans le sens des α_1 croissants si $\lambda_1 > 0$ (décroissants si $\lambda_1 < 0$) et α_2 croissants si $\lambda_2 > 0$ (décroissants si $\lambda_2 < 0$).

De cette étude on déduit que le point d'équilibre 0 est stable si λ_1 et λ_2 sont < 0 et instable si $\lambda_1 > 0$ ou $\lambda_2 > 0$.



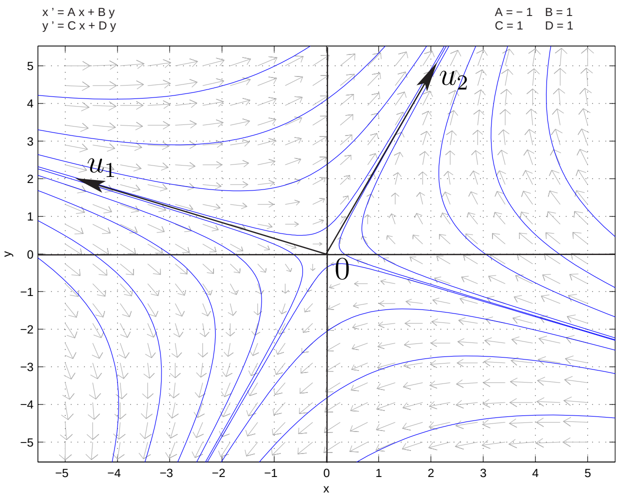
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4$$

FIG. 4.1 – Nœud stable



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$$

FIG. 4.2 – Nœud instable



$$\lambda_1 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}$$

FIG. 4.3 – Selle (ou cole)

4.2.2 La matrice M a une seule valeur propre réelle

On note λ cette valeur propre double et $\delta = \dim \operatorname{Ker}\,(M - \lambda \mathbb{I}_2)$. On doit alors distinguer encore deux cas :

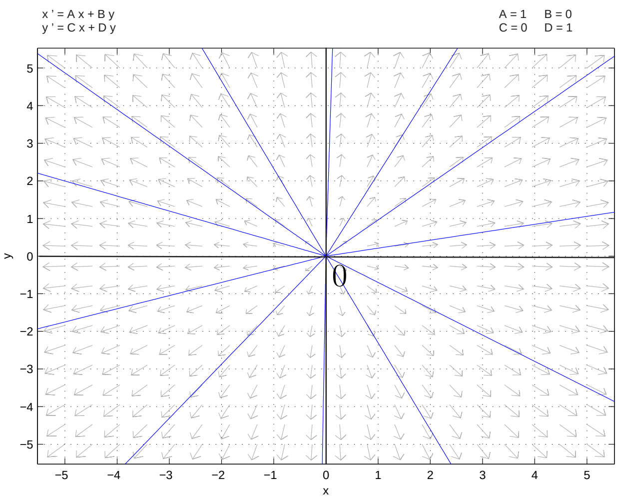
Le cas $\delta = 2$

Dans ce cas, la matrice M est diagonale et s'écrit $M = \lambda \mathbb{I}_2$. Il est facile de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$,

$$\phi(t, x) = e^{\lambda\, t} x, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

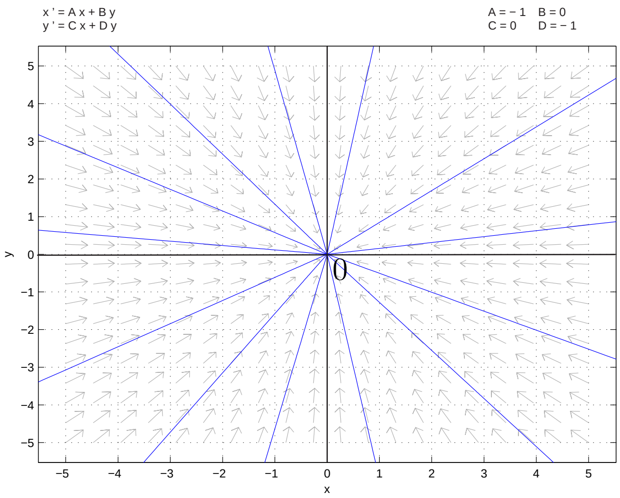
Les trajectoires sont des droites passant par 0.

Le point critique 0 est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.



$$\lambda = 1$$

FIG. 4.4 – $\delta = 2$, source (instable)



$$\lambda = -1$$

FIG. 4.5 – $\delta = 2$, puit (stable)

Le cas $\delta = 1$

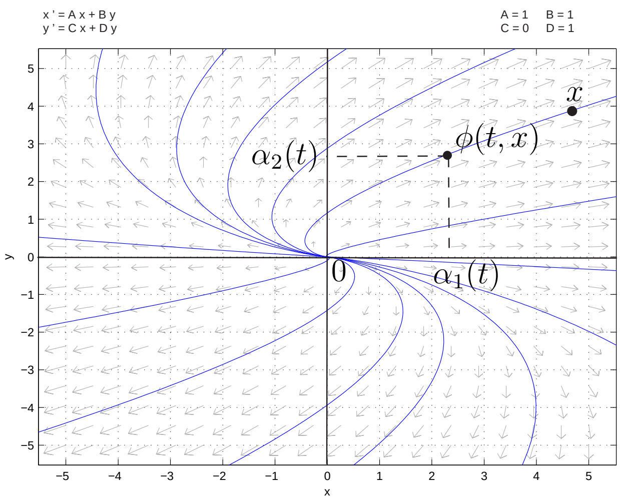
Il existe une base $\{u_1, u_2\}$ dans laquelle la réduite de Jordan de M est

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, les solutions $\phi(t,x)$ s'écrivent $\phi(t,x) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2$ et on montre que

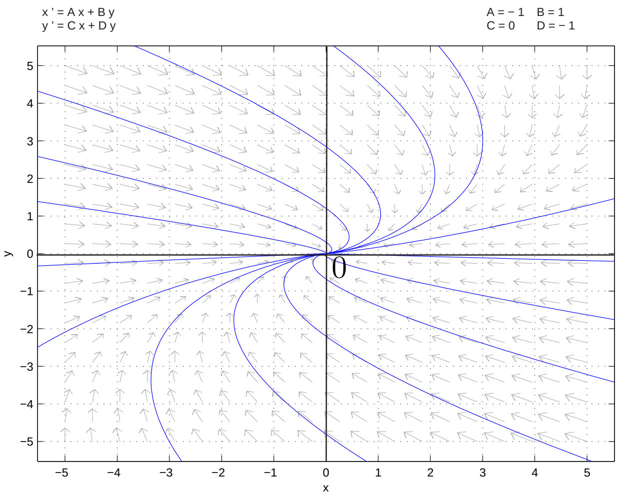
$$\alpha_1(t) = (\widetilde{x}_2\, t + \widetilde{x}_1)e^{\lambda\, t},$$
$$\alpha_2(t) = \widetilde{x}_2\, e^{\lambda\, t},$$

où comme précédemment $x = \widetilde{x}_1 u_1 + \widetilde{x}_2 u_2$. Si x est sur la droite portée par u_1 (i.e $\widetilde{x}_2 = 0$), alors la trajectoire est une droite. Sinon elle est portée par la courbe $\alpha_1 = C_1\alpha_2 \ln(|\alpha_2|) + C_2\alpha_2$, où $C_1 = 1/\lambda_1$ et $C_2 = (\widetilde{x}_1 - (\widetilde{x}_2/\lambda_1)\ln(|\widetilde{x}_2|))/\widetilde{x}_2$.



$$\lambda = 1, \quad \delta = 1$$

FIG. 4.6 – Nœud dégénéré instable



$$\lambda = -1, \quad \delta = 1$$

FIG. 4.7 – Nœud dégénéré stable

Le point d'équilibre 0 est stable si $\lambda > 0$ et instable si $\lambda > 0$.

4.2.3 La matrice M a deux valeurs propres, non réelles, conjuguées

Notons $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib$ les valeurs propres complexes de M et considérons $z = u + iv$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. Alors $Mz = Mu + iMv = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$, c'est à dire que $Mu = au - bv$ et $Mv = av + bu$. Autrement dit, dans la base $\{u, v\}$, la matrice M a pour expression :

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\{u, v\}$, la solution $\phi(t, x)$ s'écrit

$$\phi(t, x) = \alpha_1(t)u + \alpha_2(t)v, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et les fonctions $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ sont solutions du système d'edo :

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= a\,\alpha_1(t) - b\,\alpha_2(t), \\ \alpha_2'(t) &= b\,\alpha_1(t) + a\,\alpha_2(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

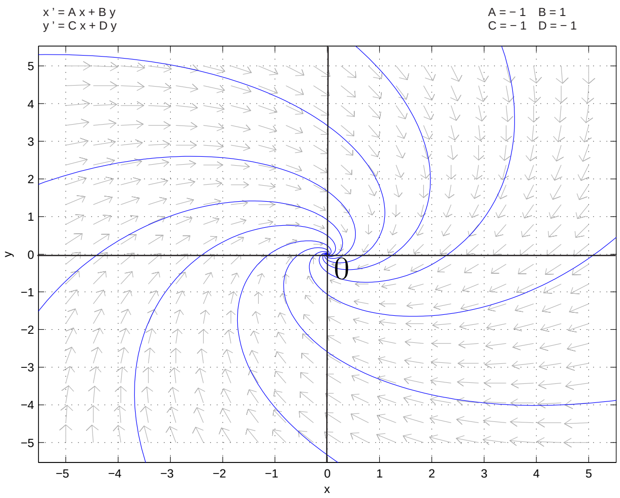
En posant $\beta_i(t) = \alpha_i(t)e^{-a\,t}$, $i = 1, 2$, ces fonctions vérifient :

$$\begin{aligned} \beta_1'(t) &= -b\,\beta_2(t), \\ \beta_2'(t) &= b\,\beta_1(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si $x = \widetilde{x}_1 u + \widetilde{x}_2 v$ dans la base $\{u, v\}$, alors il existe $R \in]0, \infty[$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$ tels que $\widetilde{x}_1 = R\,\cos(\theta)$ et $\widetilde{x}_2 = R\,\sin(\theta)$. En intégrant le système d'edo ci-dessus, on trouve que $\beta_1(t) = R\,\cos(b\,t + \theta)$, $\beta_2(t) = R\,\sin(bt + \theta)$ puis que

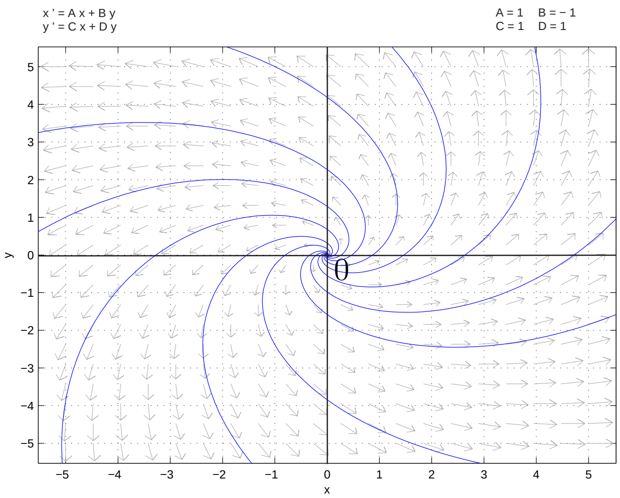
$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= R\,e^{a\,t}\cos(bt + \theta), \\ \alpha_2(t) &= R\,e^{a\,t}\cos(bt + \theta), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans la base $\{u, v\}$, les trajectoires sont soit des cercles de centre 0 et de rayons R si $a = 0$, soit des spirales qui émanent de l'origine (si $a > 0$) ou qui convergent vers l'origine (si $a < 0$).



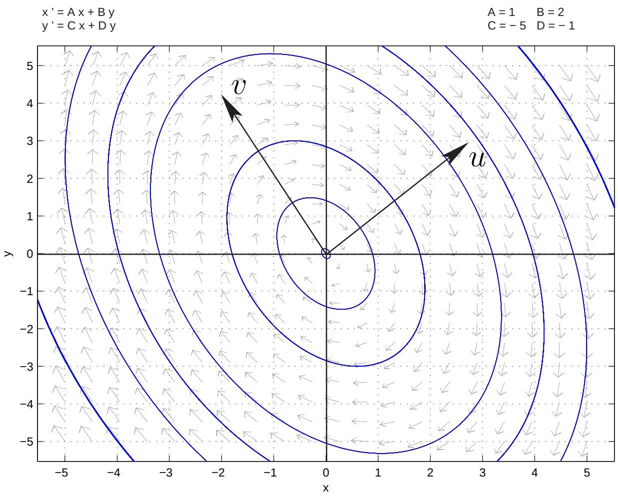
$$\lambda_1 = -1 - i, \quad \lambda_2 = -1 + i$$

Fig. 4.8 – Foyer stable



$$\lambda_1 = 1 - i, \quad \lambda_2 = 1 + i$$

Fig. 4.9 – Foyer instable



$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

FIG. 4.10 – Centre

Le point d'équilibre 0 est stable si $\mathrm{Re}\,(\lambda_1) = \mathrm{Re}\,(\lambda_2) \leq 0$ et instable si $\mathrm{Re}\,(\lambda_1) = \mathrm{Re}\,(\lambda_2) > 0$.

4.3 Stabilité des edo autonomes non linéaires

Une première idée pour étudier le comportement des solutions de l'edo (EA) au voisinage d'un point d'équilibre x_0 est de linéariser l'équation. En effet, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire que $f(x) = Df(x_0)(x - x_0) + g(x - x_0)$ où la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\|g(x - x_0)\|_F / \|x - x_0\|_F \to 0$ quand $x \to x_0$. L'edo (EA) devient :

$$x'(t) = Df(x_0)(x(t) - x_0) + g(x(t) - x_0).$$

Si on effectue le changement de variables $y(t) = x(t) - x_0$, alors

$$y'(t) = Df(x_0)y(t) + g(y(t)).$$

On peut donc sans perte de généralité se ramener au cas où $x_0 = 0$. Enonçons un premier résultat :

Théorème 4.2 (de Perron) *Soit M une matrice dont toutes les valeurs propres λ_i sont telles que $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ et soit g une fonction $\mathcal{C}^1$ sur E et vérifiant*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|g(x)\|_E}{\|x\|_E} = 0.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $0 < \sigma < \min_i\{-\mathrm{Re}\,(\lambda_i)\}$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| < \delta$:

- *La solution $\phi(t, x)$ de l'edo*

$$x'(t) = Mx(t) + g(x(t)), \qquad (\widetilde{E})$$

  vérifiant $\phi(0, x) = x$ existe pour tout $t \geq 0$.
- *$|\phi(t, x)| \leq \varepsilon e^{-\sigma t}$, pour tout $t \geq 0$.*

En particulier, la solution identiquement nulle est asymptotiquement stable.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ et σ comme dans l'énoncé. Introduisons également $\widetilde{\sigma}$ tel que $0 < \sigma < \widetilde{\sigma} < \min_i\{-\mathrm{Re}\,(\lambda_i)\}$, ce qui est toujours possible. Le Corollaire 2.1 nous assure de l'existence d'une constante $C_{\widetilde{\sigma}} > 0$ telle que

$$\|e^{tM}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C_{\widetilde{\sigma}} e^{-\widetilde{\sigma} t}, \quad \forall t \geq 0.$$

D'après l'hypothèse vérifiée par g, il existe $\widetilde{\delta} > 0$ tel que si $\|x\|_E \leq \widetilde{\delta}$ alors $\|g(x)\|_E \leq (\widetilde{\sigma} - \sigma)\|x\|_E / C_{\widetilde{\sigma}}$. Posons $\delta = \min\{\widetilde{\delta}/2, \widetilde{\delta}/C_{\widetilde{\sigma}}, \varepsilon/C_{\widetilde{\sigma}}\}$ et choisissons $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq \delta$. Pour un tel x, notons $\phi(t,x)$ la solution maximale de l'edo $(\widetilde{E})$ telle que $\phi(0,x) = x$ (remarquer qu'une telle solution existe toujours car g est $\mathcal{C}^1$). Son intervalle de définition maximal est $[0,T)$ avec $0 < T \leq \infty$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, on a l'expression sous forme intégrale :

$$\phi(t,x) = e^{tM}x + \int_0^t e^{(t-s)M} g(\phi(s,x))\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

On en déduit que

$$\|\phi(t,x)\|_E \leq \|e^{tM}\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|_E + \int_0^t \|e^{(t-s)M}\|_{\mathcal{L}(E)}\|g(\phi(s,x))\|_E\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

Comme $\|x\|_E \leq \delta \leq \widetilde{\delta}/2$, la continuité de $\phi(t,x)$ entraîne qu'il existe un intervalle de longueur maximale $[0,\widetilde{T}]$ avec $\widetilde{T} > 0$ sur lequel $\|\phi(t,x)\|_E \leq \widetilde{\delta}$, d'où :

$$\|\phi(t,x)\|_E \leq C_{\widetilde{\sigma}} e^{-\widetilde{\sigma} t}\delta + (\widetilde{\sigma} - \sigma)e^{-t\widetilde{\sigma}} \int_0^t e^{s\widetilde{\sigma}}\|\phi(s,x)\|_E\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, 0 \leq t \leq \widetilde{T}.$$

Cette inégalité s'écrit encore

$$\|\psi(t,x)\|_E \leq C_{\widetilde{\sigma}}\delta + (\widetilde{\sigma} - \sigma)\int_0^t \|\psi(s,x)\|_E\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, 0 \leq t \leq \widetilde{T},$$

avec $\psi(t,x) = \phi(t,x)e^{t\widetilde{\sigma}}$. En appliquant alors l'inégalité de Gronwall du Lemme 1.2, on obtient :

$$\|\psi(t,x)\|_E \leq C_{\widetilde{\sigma}}\delta e^{(\widetilde{\sigma}-\sigma)t}, \quad \forall\, 0 \leq t \leq \widetilde{T},$$

puis

$$\|\phi(t,x)\|_E \leq C_{\widetilde{\sigma}}\delta e^{-\sigma t}, \quad \forall\, 0 \leq t \leq \widetilde{T}.$$

On en déduit d'une part, selon la définition de δ, que $\|\phi(\widetilde{T},x)\|_E \leq \widetilde{\delta}e^{-\widetilde{T}\widetilde{\sigma}}$ et par un argument de continuité que $\|\phi(t,x)\|_E$ resterait inférieur à $\widetilde{\delta}$ au delà de $\widetilde{T}$ si $\widetilde{T} < T$, ce qui contredirait la maximalité de $\widetilde{T}$. Donc $\widetilde{T} = T$. D'autre part, toujours d'après la définition de δ, $\|\phi(t,x)\|_E \leq \varepsilon e^{-\sigma t}$, ce qui est l'estimation du Théorème et qui entraîne que $T = \infty$. ■

Pour terminer ce chapitre, on peut énoncer le Théorème suivant qui prouve que l'étude détaillée de la stabilité que nous avons faite dans le cas des edo linéaires a une portée assez générale :

Théorème 4.3 (Hartman-Grobman) *Soit Ω un ouvert de E contenant 0 et f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur Ω à valeurs dans E. Pour tout $x \in \Omega$, on note $\phi(t,x)$ la solution de l'edo autonome*

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{LA}$$

qui vérifie $\phi(0,x) = x$. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour toute valeur propre λ de la matrice $M = Df(0)$, $\mathrm{Re}\,(\lambda) \neq 0$. Alors il existe deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de E contenant 0 et un homéomorphisme H de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$,

$$H(\phi(t,x)) = e^{tM}H(x), \quad \forall\, t \in I_x,$$

où I_x est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0*. En particulier H envoie les trajectoires de l'edo* (LA) *sur les trajectoires de l'edo linéaire à cœfficients constants*

$$x'(t) = Mx(t),$$

en préservant la paramétrisation.

La démonstration est longue et difficile. On peut en trouver les grandes lignes dans le livre de Perko L. *Differential equations and dynamical systems*, Springer Verlag.

4.4 Exercices sur le chapitre 4

Exercice 4.1 On souhaite faire le portrait de phase d'un système 2×2 d'edo autonomes de la forme :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{aligned}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions données de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On notera (φ_1, φ_2) une solution de ce système. Avant de traiter un exemple concret, on commence par établir quelques résultats préliminaires.

Partie 1 : Montrer qu'au voisinage des points (x_1, x_2) tels que $f_1(x_1, x_2) \neq 0$, les trajectoires du système coïncident avec le graphe des solutions de l'edo

$$y'(x) = \frac{f_2(x, y(x))}{f_1(x, y(x))}.$$

En particulier, les trajectoires sont des courbes $y = \psi(x)$.
Indication : On appliquera le Théorème d'inversion locale à la fonction φ_1 au voisinage de t_0 tel que $\varphi_1(t_0) = x_1$.

Partie 2 : On dit qu'une trajectoires $\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),\ t \in (T_-, T_+)\}$ est monotone si $\varphi_1'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]T_-, T_+[$ et si c'est le graphe $y = \psi(x)$ d'une fonction ψ monotone. Montrer que si une trajectoire est monotone et si elle reste dans un domaine K compact du plan pour $t \geq t_0$ alors

- elle est définie pour tout $t \in [t_0, \infty[$,
- elle converge lorsque $t \to \infty$ vers un point d'équilibre du système.

Indication : On commencera par démontrer que si φ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0, \infty[$ vérifiant $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = x_1$ et $\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = l$ avec $x_1, l \in \mathbb{R}$ alors $l = 0$.
On en déduit : si une trajectoire est monotone, elle sort de tout compact qui ne contient pas de point d'équilibre.

Partie 3 : Démontrer les règles de l'Hospital suivantes :

1. Soient u et v deux fonctions réelles $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle (a, T), $-\infty \leq a < T \leq +\infty$ et vérifiant $\lim_{t\to T} u(t) = \lim_{t\to T} v(t) = 0$. Si $\lim_{t\to T} v'(t)/u'(t)$ existe, alors on a :
$$\lim_{t\to T} \frac{v(t)}{u(t)} = \lim_{t\to T} \frac{v'(t)}{u'(t)}.$$

2. Soit u une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $(a, +\infty)$. On suppose que $\lim_{t\to\infty} u'(t) = l$ (où ∞). Alors $u(t)/t$ tend aussi vers l (où ∞) quand $t \to \infty$.
Indication : Ecrire que $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\,\mathrm{d}s$.

Partie 4 : On considère maintenant le système différentiel suivant :

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_1(t)x_2(t) - x_1(t)^2,$$
$$x_2'(t) = -4x_2(t) + 2x_1(t)x_2(t).$$

On pose $f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1x_2 - x_1^2$ et $f_2(x_1, x_2) = -4x_2 + 2x_1x_2$.

1. Déterminer les points d'équilibre, les zones du plan dans lesquelles f_1 et f_2 ont un signe constant ainsi que les courbes $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$.
2. Etudier la nature des points d'équilibre et donner l'allure des trajectoires des systèmes linéarisés.
3. On note $P_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$.
   (a) Soit $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ une solution de l'edo pour laquelle la condition initiale se trouve dans $K_1 = \{(x_1, x_2) \in P_1 \,:\, 0 < x_1 \leq 1,\, 1 - x_1 - x_2 \geq 0\}$.
      i. Montrer que $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in K_1$ pour tous les temps ultérieurs de son ensemble de définition.
      ii. En déduire que φ_1 et φ_2 sont définis sur $[0, \infty[$ et que $\lim_{t\to\infty}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (1, 0)$.
      iii. Montrer que la fonction $t \mapsto u(t) = \varphi_2(t)/(\varphi_1(t) - 1)$ tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ (on montrera que u admet une limite u_0 puis que $\lim_{t\to\infty} \varphi_2'(t)/\varphi_1'(t) = 2u_0/(1 + u_0)$ et donc que $u_0 = 0$).
   (b) Montrer que toute trajectoire ayant sa condition initiale dans $K_3 = \{(x_1, x_2) \in P_1 \,:\, x_1 \geq 2\}$ est le graphe d'une fonction décroissante sur $[2, \infty[$. Etudier la branche infinie de cette trajectoire.
   (c) Que se passe-t-il pour une trajectoire de condition initiale dans $K_2 = \{(x_1, x_2) \in P_1 \,:\, x_1 \leq 2,\, 1 - x_1 - x_2 \leq 0\}$.
   (d) Dessiner l'allure des trajectoires dans P_1.
4. On note $P_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 < 0,\, x_2 > 0\}$, $A = \{(x_1, x_2) \in P_2 \,:\, x_2 > -x_1 + 1\}$ et $B = \{(x_1, x_2) \in P_2 \,:\, x_2 < -x_1 + 1\}$.
   (a) Montrer que toute trajectoire issue d'un point A entre dans B.
   (b) Montrer que sur une trajectoire issue d'un point de B on a $\lim_{t\to T^*} \varphi_1(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to T^*} \varphi_2(t) = 0$ (où T^* est le temps maximal d'existence pour la solution (φ_1, φ_2)).
   (c) Tracer les trajectoires dans P_2.
5. On note $P_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0,\, y < 0\}$.
   (a) On note (T_*, T^*) l'intervalle d'existence d'une solution dont la donnée initiale (x_1, x_2) est dans P_3. Montrer que pour une telle solution on a $\lim_{t\to T^*} \varphi_1(t) = -\infty$, $\lim_{t\to T^*} \varphi_2(t) = 0$, $\lim_{t\to T_*} \varphi_1(t) = 0$, $\lim_{t\to T_*} \varphi_2(t) = -\infty$.
   (b) Tracer les trajectoires dans P_3.
6. On note $P_4 = \{(x_1, x_2) \,:\, x_1 > 0,\, x_2 < 0\}$. Soient α le point $(1, 0)$, β le point $(2, -1)$, γ le point $(2, 0)$ et $\mathcal{T}$ le triangle $\{(x_1, x_2) \,:\, 1 < x_1 < 2,\, x_2 < 0,\, x_1 + x_2 > 1\}$.
   (a) Montrer que T est une zone piège (c'est à dire que toute trajectoire qui entre dans $\mathcal{T}$ ne ressort pas).
   (b) En déduire que toute trajectoire entrant dans $\mathcal{T}$ est définie pour tous les temps ultérieurs et converge vers le point α lorsque $t \to \infty$.
   (c) Montrer qu'il y a deux trajectoires issues de β dont l'une est définie pour tout temps et converge vers α lorsque $t \to \infty$.

(d) Représentrer les trajectoires dans P_4.

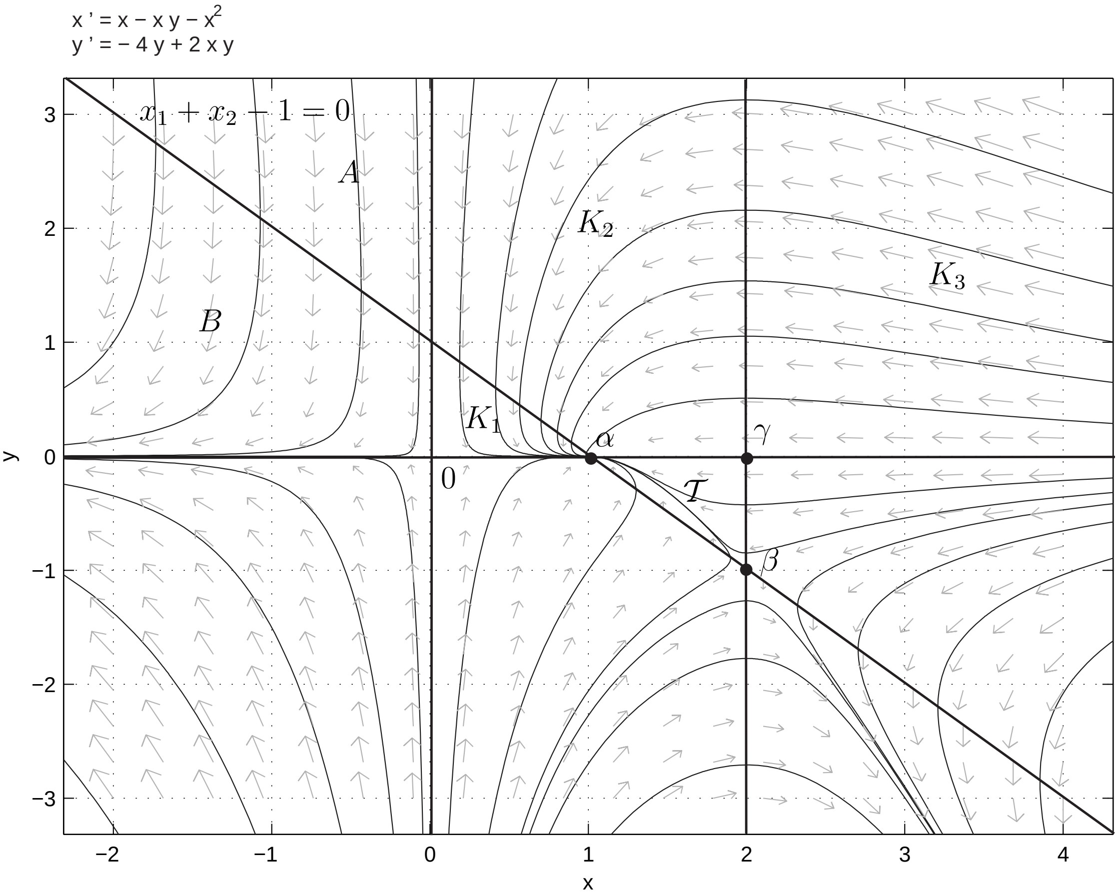


FIG. 4.11 – Portrait de phase du système d'edo

Chapitre 5

Annales des examens

5.1 Examen 2005-2006 (premère session)

On pose $E = \mathbb{R}^N$. Le but du problème est de généraliser la notion de stabilité aux edo linéaires non autonomes de la forme :

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{I}$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{II}$$

où $A : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(E)$ et $b : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto E$ sont deux applications continues. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $x_0 \in E$, on note $\varphi(t, t_0, x_0)$ les solutions de (I) ou de (II) vérifiant $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

- On dit qu'une solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ est uniformément stable (on écrira u.s) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x_1 \in E$ vérifiant $\|x_1 - x_0\|_E \leq \eta(\varepsilon)$ on a

$$\sup_{t \geq t_0} \|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)\|_E \leq \varepsilon, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

  (les solutions restent à une distance inférieure à ε pourvu que l'on choisisse des données initiales à une distance inférieure à $\eta(\varepsilon)$)
- On dit qu'une solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ est uniformément asymptotiquement stable (on écrira u.a.s) si elle est u.s et si $\exists \eta > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T(\varepsilon) > 0$ tel que si $x_1 \in E$ vérifie $\|x_1 - x_0\|_E \leq \eta$ alors

$$\sup_{t \geq t_0 + T(\varepsilon)} \|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)\|_E \leq \varepsilon, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

  (pour des données initiales à une distance inférieure à η, les solutions restent à une distance inférieure à ε pourvu que l'on attende un temps $T(\varepsilon)$).

1. On note $\Phi(t, t_0)$ la matrice fondamentale de l'edo (I) telle que $\Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}_E$ (l'identité de $\mathcal{L}(E)$). Expliquer clairement cette notion et démontrer la relation $\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0)$ pour tout $t \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$.
2. Ecrire $\varphi(t, t_0, x_0)$ en fonction de $\Phi(t, t_0)$ et en déduire l'équivalence entre les trois points suivants :
   (a) La solution $\varphi_0(t) \equiv 0$ de (I) est u.s.
   (b) Toute solution de (I) est u.s.
   (c) Il existe $M \geq 0$ telle que $\sup_{0 \leq t_0 \leq t} \|\Phi(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$, $\forall t_0 \geq 0$.

   Indication : Revenir à la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E)$.
   Si l'une des assertions ci-desssus est réalisée, on dit que l'edo (I) est u.s.

3. On souhaite montrer l'équivalence entre les trois points suivants :
   (a) La solution $\varphi_0(t) \equiv 0$ de (I) est u.a.s.
   (b) Toute solution de (I) est u.a.s.
   (c) Il existe $K > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\sup_{0 \le t_0 \le t} \|\Phi(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(E)} \le K\, e^{-\alpha(t-t_0)}$, $\forall\, t_0 \ge 0$.

   Montrer que (3a)$\Leftrightarrow$(3b) et (3c)$\Rightarrow$(3b). Si (3a) ou (3b) est réalisée, on dit que l'edo (I) est u.a.s.
4. Montrer que si (I) est u.a.s, alors pour tout $0 < \delta < 1$, il existe $T(\delta) > 0$ tel que
$$\sup_{t \ge t_0 + T(\delta)} \|\Phi(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(E)} \le \delta, \quad \forall\, t_0 \ge 0.$$
5. On fixe maintenant $\delta < 1$. Montrer que $\sup_{t \ge t_0 + nT(\delta)} \|\Phi(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(E)} \le \delta^n$, $\forall t_0 \ge 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
   Indication : utiliser la relation démontrée dans la question 1.
6. En remarquant que pour tout $t \ge t_0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_0 + nT(\delta) \le t < t_0 + (n+1)T(\delta)$ et en utilisant (2c), montrer que (3b)$\Rightarrow$(3c) avec $\alpha = \ln(1/\delta)/T(\delta)$ et $K = M/\delta$.
7. En utilisant les questions précédentes, montrer que si une solution de (II) est u.s, toute les solutions de (II) sont u.s et de même que si une solution de (II) est u.a.s, toutes les solutions de (II) sont u.a.s. On dit alors que l'edo (II) est u.s (ou u.a.s).
8. Montrer que les deux edo (I) et (II) sont de même nature en ce qui concerne la stabilité (u.s ou u.a.s).

5.2 Examen 2005-2006 (deuxième session)

Exercice 1 : On considère l'edo suivante :
$$x'(t) = -x(t) + \alpha(t)x^2(t), \quad t \ge 0, \tag{E}$$
où $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $|\alpha(t)| \le 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On note $\varphi(t, x_0)$ la solution maximale de (E) vérifiant $\varphi(0, x_0) = x_0$. Le but de l'exercice est de montrer que si $|x_0| < 1$, alors $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. On note $[0, T^*)$ l'intervalle d'existence maximal de $t \mapsto \varphi(t, x_0)$.

1. En mettant l'edo (E) sous forme résolue, montrer l'existence et l'unicité de la solution maximale $t \mapsto \varphi(t, x_0)$.
2. On considérant dans (E) le terme $\alpha(t)x^2(t)$ comme le second membre d'une edo linéaire, montrer que :
$$\varphi(t, x_0) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}\alpha(s)\varphi(s, x_0)^2\, \mathrm{d}s. \tag{R}$$
3. On suppose que $T^* < \infty$. Posons $|x_0| = 1 - \delta$, $\delta \in]0, 1[$ et pour $\delta_0 \in]0, \delta[$ on introduit l'ensemble
$$I = \{T \in [0, T^*[\text{ tel que } |\varphi(t, x_0)| \le 1 - \delta_0,\ \forall\, t \in [0, T]\}.$$
   Montrer que I est un intervalle. On le note $[0, a)$.
4. En utilisant (R) et l'inégalité de Gronwall, montrer que pour tout $T \in I$ on a $|\varphi(t, x_0)| \le |x_0|e^{-\delta_0 t}$, pour tout $t \in [0, T]$.

5. Montrer que $|\varphi(t,x_0)| \leq 1-\delta$ pour tout $t \in [0,a]$ et en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a+\varepsilon \in I$. Conclure que $T^* = \infty$.

Exercice 2 : On admet que si g est une fonction continue positive sur $[0,T]$, la fonction h définie par $h(0) = g(0)$ et $h(t) = \sup\limits_{s\in[0,t]} g(s)$, $t > 0$ est continue sur $[0,T]$. On considère l'edo suivante :

$$x'(t) = \lambda + \alpha(t)x^2(t), \quad t > 0, \tag{E}$$

où α est une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle qu'il existe $\alpha_0 > 0$ vérifiant

$$\forall T > 0, \quad \sup_{s\in]0,T]} \frac{1}{s}\int_0^s \sigma^2\alpha(\sigma)\,d\sigma < \alpha_0, \tag{I}$$

et λ est un réel strictement positif.

1. Montrer que l'edo (E) admet une unique solution maximale φ vérifiant $\varphi(0) = 0$. On note $[0,T^*)$ son intervalle de définition. Montrer que $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in]0,T^*)$.
2. On va montrer que toute solution maximale de (E) est définie sur $[0,\infty[$ si $\lambda \in]0, 1/(4\alpha_0)]$.
   (a) On suppose que $T^* < \infty$ et pour $T < T^*$ on pose $h(0) = \lambda$ et $h(t) = \sup\limits_{s\in]0,t]} \varphi(s)/s$ si $t \in]0,T]$. Montrer que h est continue sur $[0,T]$. Etudier la monotonie de h. En déduire la forme de $h([0,T])$.
   (b) En écrivant (E) sous forme d'une équation intégrale, montrer qu'il existe une constante $\mu \in]0,\alpha_0[$ telle que
   $$h(t) \leq \lambda + \mu h(t)^2, \quad \forall t \in [0,T].$$
   (c) En déduire que pour tout $t \in [0,T]$, on a
   $$h(t) \leq \frac{1-\sqrt{1-4\mu\lambda}}{2\mu} \text{ ou bien } h(t) \geq \frac{1+\sqrt{1-4\mu\lambda}}{2\mu}.$$
   (d) En utilisant la question 2a, trancher entre les deux possibilités de la question précédente et en déduire que $T^* = \infty$.
3. On suppose dans cette question que $\alpha(t) = 1/(1+t^2)$.
   (a) Montrer que la fonction $\alpha(t)$ vérifie (I) avec $\alpha_0 = 1$.
   (b) On suppose que $\lambda > 1/4$ et l'on pose $\varphi(t) = \psi(t)\sqrt{1+t^2}$. Montrer que l'on a les inégalités suivantes sur $[0,T^*[$:
   $$\psi(t)^2 + \lambda - \psi(t) \leq \psi'(t)\sqrt{1+t^2} \leq \lambda + \psi(t)^2.$$
   (c) En déduire d'une part que ψ est strictement croissante et d'autre part que
   $$\int_0^t \frac{\psi'(s)}{\psi^2(s)+\lambda}\mathrm{d}s \leq \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^t \frac{\psi'(s)}{\psi^2(s)-\psi(s)+\lambda}\mathrm{d}s.$$
   (d) Effectuer le changement de variables $\tau = \psi(s)$ après l'avoir justifié. En déduire que $T^* < \infty$.

Exercice 3 : On considère le système d'edo autonome suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & = y(t) + \varepsilon(x^3(t) + 2x(t)y^2(t)) \\ y'(t) & = -x(t) + \varepsilon y^3(t), \end{array}\right. \tag{S}$$

où ε est un réel donné. On note $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi(t, X_0) = (\varphi_1(t, x_0), \varphi_2(t, y_0))$ la solution de (S) vérifiant $\varphi(0, X_0) = X_0$.

1. Vérifier que $(0, 0)$ est un point d'équilibre de (S) et écrire le système linéarisé au voisinage de ce point sous la forme $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice 2×2 que l'on précisera.
2. Déterminer les valeurs propres de A et étudier la stabilité du point $(0, 0)$.
3. Soit $\varepsilon \neq 0$. On note $\rho(t, X_0) = \varphi_1^2(t, x_0) + \varphi_2^2(t, y_0)$. Vérifier que ρ est solution de l'edo $x'(t) = 2\varepsilon x^2(t)$ avec la condition initiale $\rho(0, X_0) = 2\varepsilon|X_0|^2$.
4. Intégrer explicitement l'edo de la question précédente. En déduire que
   - Si $\varepsilon > 0$, la solution $\rho(t, X_0)$ est instable.
   - Si $\varepsilon < 0$, la solution $\rho(t, X_0)$ est asymptotiquement stable.
5. En déduire la nature (stable, asymptotiquement stable ou instable) du système (S) et comparer avec celle du système linéarisé. Que constatez vous ?

Index