Séminaire de Théorie des Nombres (IECL)
Nancy, le 15 mars 2018

Quelques résultats récents autour de la méthode de van der Corput pour les sommes d'exponentielles

O. Robert

Sommes d'exponentielles : définition

Soit un entier $M \geqslant 2$, $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ "suffisamment régulière".

- On cherche à majorer en module la **somme d'exponentielles**

$$S_M := \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \qquad (\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2i\pi x})$$

- Autre convention, selon les applications : pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$

$$\sum_{a<m\leqslant b} \mathrm{e}(f(m)) = \sum_{m=1}^{b-a} \mathrm{e}(f(a+m)),$$

En particulier

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \mathrm{e}(f(m)) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(M+m)),$$

Historique du problème

1. **Méthode de Weyl** : $\geqslant$ 1916 (Problème de Waring)
   - Équirépartition modulo 1, critère de Weyl
2. **Méthode de van der Corput** : $\geqslant$ 1920
   - Améliorations (OR et Sargos) $\geqslant$ 2000.
   - Amélioration (Heath-Brown) $\geqslant$ 2016.
3. **Méthode de Vinogradov** : $\geqslant$ 1930 (Région sans zéro pour zêta)
4. **Systèmes de Vinogradov : résultats récents**
   - Wooley ($\geqslant$ 2012) : Congruences efficaces
   - Bourgain, Demeter & Guth : découplage ($\geqslant$ 2016)
5. **Méthode de Bombieri & Iwaniec** : $\geqslant$ 1985
   - Développement dû à Huxley ($\rightarrow$ 2005)
   - Amélioration récente due à Bourgain (2014)

Contexte autour de deux problèmes

- Majoration de zêta dans la bande critique
- Comptage de points entiers (problème des diviseurs)

Majoration de la fonction zêta dans la bande critique

.

- Pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ fixé, on cherche $A(\sigma)$ "petit" tel que

$$\zeta(\sigma + it) \ll_\sigma |t|^{A(\sigma)} \qquad (|t| \geqslant 1)$$

- Somme d'exponentielle correspondante, pour $N \leqslant |t|$

$$\left| \sum_{N<n\leqslant 2N} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \quad \lessapprox \quad N^{-\sigma} \left| \sum_{N<n\leqslant 2N} \mathrm{e}\left(\frac{t}{2\pi}\log n\right) \right|$$

- *Problème de Lindelöf* : cas où $\sigma = 1/2$
  $\rightarrow$ Conjecture (Hypothèse de Lindelöf) : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\zeta(\tfrac{1}{2} + it) \ll_\varepsilon |t|^\varepsilon \qquad (|t| \geqslant 1)$$

$\rightarrow$ Hypothèse de Riemann $\Longrightarrow$ Hypothèse de Lindelöf

Le problème des diviseurs de Dirichlet

- Pour $n \geqslant 1$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n
- On montre que $\displaystyle\sum_{n \leqslant t} \tau(n) = t \log t + (2\gamma - 1)t + \Delta(t)$

$$\text{avec} \qquad \Delta(t) = -2 \sum_{m \leqslant t^{1/2}} \psi\left(\frac{t}{m}\right) + O(1)$$

$$\psi(y) = y - [y] - \frac{1}{2} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

- On a trivialement $\Delta(t) \ll t^{1/2}$.
- On conjecture que $\Delta(t) \ll_\varepsilon t^{1/4+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.
- **Lien avec les sommes d'exponentielles**

$$\left|\sum_{m=1}^{M} \psi(f(m))\right| \ll \frac{M}{H} + \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{h} \left|\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(hf(m))\right|$$

où $H \geqslant 1$ est un paramètre à optimiser.

Premières majorations de sommes d'exponentielles

Théorème (Inégalité de van der Corput)

Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout entier $M \geqslant 2$, tout réel $\lambda_2 > 0$ et toute fonction $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\lambda_2 \leqslant |f''(x)| \leqslant \alpha\lambda_2 \qquad (1 \leqslant x \leqslant M),$$

on ait

$$\left|\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m))\right| \leqslant C_\alpha\big(M\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}\big).$$

Illustration :

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \mathrm{e}\big(\frac{T}{m}\big) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\Big(\frac{T}{m+M}\Big) \ll M\big(\frac{T}{M^3}\big)^{1/2} + \big(\frac{T}{M^3}\big)^{-1/2}$$

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \mathrm{e}\Big(\frac{T}{m}\Big) \ll M\Big(\frac{T}{M^3}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{T}{M^3}\Big)^{-1/2}$$

- **Application aux parties fractionnaires** : $M \leqslant t^{1/2}$, $H \geqslant 1$

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \psi\Big(\frac{t}{m}\Big) \ll \frac{M}{H} + \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{h}\Big| \sum_{M<m\leqslant 2M} \mathrm{e}\Big(\frac{ht}{m}\Big)\Big|$$

- On applique à chaque somme l'inégalité avec le choix $T = ht$
- On optimise H et on retrouve le Théorème de Voronoï (1903)

$$\sum_{n\leqslant t} \tau(n) = t\log t + (2\gamma - 1)t + O(t^{1/3}\log t) \qquad (t \geqslant 2).$$

Retour sur le problème de Lindelöf : majoration de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$

- *Zone cruciale* : $M < m \leqslant 2M$ avec $M \asymp t^{1/2}$

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} \mathrm{e}\left(\frac{t}{2\pi}\log m\right) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\left(\frac{t}{2\pi}\log(m+M)\right)$$

- Ici, la dérivée seconde vérifie $\lambda_2 \asymp 1$
- En revanche, $\lambda_3 \asymp \frac{|t|}{M^3}$ est petit.
- Résultat analogue pour la dérivée troisième ?

Transformation A de Weyl-van der Corput

Lemme

Pour tous entiers $M \geqslant 2$ et $1 \leqslant H \leqslant M$, on a

$$\left|\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m))\right|^2 \ll \frac{M^2}{H} + \frac{M}{H} \sum_{|h|<H} \left|\sum_{m \in I_h} \mathrm{e}\Big(f(m+h) - f(m)\Big)\right|.$$

où $I_h := \{x \in \mathbb{R},\, 1 \leqslant x, x+h \leqslant M\}$.

- **Idée de la preuve** : Cauchy-Schwarz + décalage d'indices.
- **Utilisation.** Si $|f'''(x)| \asymp \lambda_3 > 0$ sur $[1, M]$, alors pour tout h, $x \mapsto g_h(x) := f(x+h) - f(x)$ satisfait

$$|g_h''(x)| \asymp |h|\lambda_3 \qquad (x \in I_h).$$

Théorème (Van der Corput)

Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. *Il existe une constante* $C_\alpha > 0$ *telle que pour tout entier* $M \geqslant 2$, *tout réel* $\lambda_3 > 0$ *et toute fonction* $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^3 *telle que*

$$\lambda_3 \leqslant |f'''(x)| \leqslant \alpha\lambda_3 \qquad (1 \leqslant x \leqslant M)$$

on ait $\Big|\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m))\Big| \leqslant C_\alpha\big(M\lambda_3^{1/6} + M^{3/4} + M^{1/4}\lambda_3^{-1/4}\big).$

- Application au **problème de Lindelöf** : pour $M \asymp t^{1/2}$

$$M^{-1/2}\left|\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\left(\frac{t}{2\pi}\log(M+m)\right)\right| \ll t^{1/6}$$

- On retrouve

$$\zeta(\tfrac{1}{2} + it) \ll t^{1/6}\log t \qquad (|t| \geqslant 2).$$

Résultat général de van der Corput

- Par récurrence sur k, pour une fonction f de classe C^k telle que
$$\lambda_k \leqslant |f^{(k)}(x)| \leqslant \alpha\lambda_k \qquad (1 \leqslant x \leqslant M),$$
le *résultat de van der Corput* est :

$$S_M(f) := \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_{\alpha,k} M\lambda_k^{1/(2^k-2)} \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_k^{-2^{k-1}/(2^k-2)}.$$

- En particulier
  - $k = 2$: $S_M(f) \ll M\lambda_2^{1/2}$ pour $M \geqslant \lambda_2^{-1}$
  - $k = 3$: $S_M(f) \ll M\lambda_3^{1/6}$ pour $M \geqslant \lambda_3^{-2/3}$
  - $k = 4$: $S_M(f) \ll M\lambda_4^{1/14}$ pour $M \geqslant \lambda_4^{-4/7}$

Autour de la preuve de l'inégalité de van der Corput

Soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f''(x) \asymp \lambda_2$, $0 < \lambda_2 < 1$.

- **Version tronquée de la formule de Poisson**

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) = \sum_{f'(1)-1<\nu<f'(M)+1} \int_1^M \mathrm{e}(f(x) - \nu x)\mathrm{d}x + O\big(\log(f'(M) - f'(1) + 2)\big).$$

- Le nombre d'indices ν est $\ll 1 + f'(M) - f'(1) \ll 1 + M\lambda_2$.
- Chaque intégrale oscillante est au plus $\ll \lambda_2^{-1/2}$
- Le terme reste est $\ll \log(1 + M\lambda_2) \ll M\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}$
- On en déduit le résultat.

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll M\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}$$

Quelques remarques

- Exemples précédents : peu de propriétés de f sont utilisées.
- $|f^{(k)}(x)| \asymp \lambda_k$ et $\lambda_k > 0$ petit $\Rightarrow$ majoration non triviale.
- Résultats énoncés très généraux, mais sans doute faibles pour une fonction très régulière.

Dans de nombreuses applications : **phase monomiale**

$$x \mapsto f(x) = T\left(\frac{x}{M}\right)^{\alpha} \qquad (M \leqslant x \leqslant 2M)$$

(convention : pour $\alpha = 0$, $f(x) = T \log x$).

En particulier, $|f^{(k)}(x)| \asymp_k \dfrac{T}{M^k} \qquad (M \leqslant x \leqslant 2M, k \geqslant 1)$.

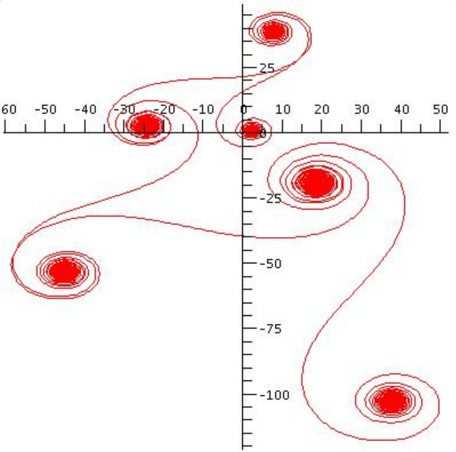
Lorsque f est régulière et f' strictement monotone, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \approx \sum_{f'(1)<\nu<f'(M)} \int_1^M \mathrm{e}(f(x)-\nu x)\mathrm{d}x + E$$

Théorème. Soit $M \geqslant 2$ et $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4 telle que $0 < \lambda_2 \leqslant f''(x) \ll \lambda_2$, $f'''(x) \ll \dfrac{\lambda_2}{M}$, $f^{(4)}(x) \ll \dfrac{\lambda_2}{M^2}$ pour $M \leqslant x \leqslant 2M$. Alors pour tout $[a, b] \subset [M, 2M]$

$$\sum_{a \leqslant m \leqslant b} \mathrm{e}(f(m)) = \mathrm{e}^{i\pi/4} \sum_{f'(a)\leqslant\nu\leqslant f'(b)} \frac{\mathrm{e}(f^*(\nu))}{\sqrt{f''(z(\nu))}} + O\big(\log(2+M\lambda_2) + \lambda_2^{-1/2}\big)$$

où $f'(z(y)) = y$ et $f^*(y) := f(z(y)) - yz(y) \quad (f'(a) \leqslant y \leqslant f'(b))$.



$$\sum_{m=1}^{M} \exp(2i\pi\sqrt{2}(m+1250)^{1,2}) \qquad (M = 1, 2, \ldots, 20000)$$

$$\sum_{a\leqslant m\leqslant b} \mathrm{e}(f(m)) \simeq \mathrm{e}^{i\pi/4} \sum_{f'(a)\leqslant \nu \leqslant f'(b)} \frac{\mathrm{e}(f^*(\nu))}{\sqrt{f''(z(\nu))}}$$

Paires d'exposants (Phillips, 1933)

- Théorie adaptée aux fonctions dites "semi-monomiales".
- Soit (k, ℓ) un couple de réels tels que $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

  Si (k, ℓ) est une **paire d'exposants**, et $\alpha < 1$ un exposant, on a alors pour tout réel $\alpha < 1$,

$$\sup_{\substack{J \text{ intervalle} \\ J \subset [M, 2M]}} \left| \sum_{m \in J} \mathrm{e}\left(T \left(\frac{m}{M} \right)^{\alpha} \right) \right| \ll_{\alpha,k,\ell} \left(\frac{T}{M} \right)^{k} M^{\ell} + \frac{M}{T}.$$

  pour tout $T > 0$, tout $M \geqslant 1$
- Exemple : $(0, 1)$: majoration triviale.
- Exemple : $B(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est une paires d'exposants.
- Conjecture : $(\varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ est une paire d'exposants pour tout $\varepsilon > 0$.

Résultats sur les applications citées

Problème de Lindelöf

- Van der Corput (1920) : $\theta_L = \frac{1}{6}$
- Paires d'exposants $ABA^3B(0,1)$: $\theta_L = \frac{27}{164} = 0,16463\dots$
- Bombieri & Iwaniec (1985) : $\theta_L = \frac{9}{56} + \varepsilon = 0,1607142\dots$ (Lindelöf)
- Améliorations de Huxley et Watt (1988 et 1989).
- Huxley (2005) : $\theta_L = \frac{32}{205} = 0,15609756\dots$.
- Record actuel : Bourgain (2014) $\theta_L = \frac{53}{342} = 0,1549707\dots$

Problème des diviseurs

- Voronoï (1903) : $\theta_D = \frac{1}{3}$
- Paires d'exposants $BA^3B(0,1)$: $\theta_D = \frac{27}{82} = 0,32926\dots$
- Iwaniec & Mozzochi (1988) : $\theta_D = \frac{7}{22} + \varepsilon = 0,31818181\dots$
- Record actuel : Huxley (2003) $\theta_D = \frac{131}{416} = 0,314903\dots$

Exemple avec f de classe C^3 telle que $|f'''(x)| \asymp \lambda_3$ pour $1 \leqslant x \leqslant M$

- **Décalage de Weyl** (N paramètre petit devant M)

$$\sum_{m=1}^{M} e(f(m)) \ll \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M-N} \Big| \sum_{n=1}^{N} e\big(f(m+n)\big) \Big| + N$$

- **Formule de Taylor et sommation d'Abel** (N tel que $N^3\lambda_3 \ll 1$)

$$\sum_{m=1}^{M-N} \Big| \sum_{n=1}^{N} e\big(f(m+n)\big) \Big| \simeq \sum_{m=1}^{M-N} \Big| \sum_{n=1}^{N} e\big(f'(m)n + \tfrac{f''(m)}{2} n^2\big) \Big|$$

- **Inégalité de Hölder** :

$$\rightarrow \frac{1}{M}\sum_m \Big|\sum_{n=1}^{N} e\big(\{f'(m)\}n + \{\tfrac{f''(m)}{2}\}n^2\big)\Big|^{2p}$$

- Si **bonne répartition** des couples $\big(\{f(m)\},\{\frac{f''(m)}{2}\}\big)$

$$\frac{1}{M}\sum_m \Big|\sum_{n=1}^{N} e\big(f'(m)n + \tfrac{f''(m)}{2}n^2\big)\Big|^{2p}$$

$$\simeq J_{2p}(N) := \iint_{[0,1]^2} \Big|\sum_{n=1}^{N} e\big(xn + yn^2\big)\Big|^{2p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- **Orthogonalité de Fourier**. Par exemple pour $2p = 6$, $J_{2p}(N)$ compte le nombre de solutions du système diophantien

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 &= n_4 + n_5 + n_6 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 \end{cases} \qquad (1 \leqslant n_j \leqslant N)$$

La méthode de Bombieri & Iwaniec

Combine l'approche de van der Corput et celle de Vinogradov

- **Préambule analytique** : analogue de la transformation B
- Double grand crible : fait apparaître un **problème diophantien**

Plus précisément : compter les solutions de

$$\begin{cases} n_1 + \cdots + n_5 & = m_1 + \cdots + m_5 \\ n_1^2 + \cdots + n_5^2 & = m_1^2 + \cdots + m_5^2 \\ \left|(n_1^{3/2} + \cdots + n_5^{3/2}) \right. & \left. -(m_1^{3/2} + \cdots + m_5^{3/2})\right| \leqslant \delta N^{3/2} \\ \left|(n_1^{1/2} + \cdots + n_5^{1/2}) \right. & \left. -(m_1^{1/2} + \cdots + m_5^{1/2})\right| \leqslant \Delta N^{1/2} \end{cases}$$

lorsque $N \leqslant n_j, m_j \leqslant 2N$.
Meilleures majoration récentes : Huxley, puis Bourgain.

Sommes courtes d'exponentielles : problématique

Somme courte : du type $\sum_{N<m\leqslant N+M} \mathrm{e}(f(m))$ avec $M \lll N$.

Exemple : $S(N) := \sum_{N\leqslant m\leqslant N+N^{2/3}} \mathrm{e}\left(N^2\left(\frac{m}{N}\right)^{\alpha}\right), \quad (M = N^{2/3})$

- van der Corput (dérivée troisième) fournit pour $\alpha \notin \{1,2\}$

$$S(N) \ll N^{1/2}$$

- La paire d'exposants la plus performante actuellement pour cette somme fournit (pour $\alpha < 1$)

$$S(N) \ll \max_{I\subset[N,2N]} \left|\sum_{m\in I} \mathrm{e}\left(N^2\left(\frac{m}{N}\right)^{\alpha}\right)\right| \ll N^{\frac{1}{2}+\frac{32}{205}}.$$

- *Remarque* : on ne peut pas toujours utiliser de paires d'exposants. Exemple, les exposants $\alpha \geqslant 1$ sont interdits.

L'ensemble $\mathcal{V}_k$

Soit $k \geqslant 2$. Le couple $(\theta, \beta) \in \mathcal{V}_k \subset]0, +\infty[^2$ si pour toute fonction $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que

$$0 < c_1 \lambda_k \leqslant |f^k(x)| \leqslant c_2 \lambda_k \qquad (1 \leqslant x \leqslant M)$$

on a

$$S_M := \sum_m \mathrm{e}\big(f(m)\big) \ll_{\theta,\beta,k,c_1,c_2} M \lambda_k^\theta \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_k^{-\beta}.$$

- Remarque : on a $\beta > 1/k$. En effet

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\Big(\frac{m^k}{100 k! M^k}\Big) \asymp M.$$

- On peut prouver $\beta - \theta \geqslant \frac{1}{k}$.

Des sommes courtes aux sommes longues

Soit $k \geqslant 2$ et $(\theta, \beta) \in \mathcal{V}_k$.

- Comment utiliser (θ, β) lorsque $M < M_0 := \lambda_k^{-\beta}$?
- Première méthode (classique) : orthogonalité de Fourier

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{v=1}^{M} \mathrm{e}(-t\nu) \right) \left(\sum_{m=1}^{M_0} \mathrm{e}(f(m) + tm) \right) \mathrm{d}t$$

$$\ll \int_{-1/2}^{1/2} \min\left(M, \frac{1}{|t|}\right) \left| \sum_{m=1}^{M_0} \mathrm{e}(f(m) + tm) \right| \mathrm{d}t$$

$$\ll (\log M) M_0 \lambda_k^{\theta} \ll (\log M) \lambda_k^{\theta - \beta}.$$

Conséquence :

$$S_M \ll M\lambda_k^{\theta} + \lambda_k^{\theta-\beta} \log M.$$

- Deuxième méthode (Folklore ?) : congruences. Pour $1 \leqslant q < M$ fixé

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\big(f(m)\big) = \sum_{r=1}^{q} \sum_{l=1}^{[(M-r)/q]} \mathrm{e}\big(f(ql+r)\big)$$

$\rightarrow$ Chaque $y \mapsto g_r(y) = f(qy+r)$ satisfait

$$|g_r^{(k)}(y)| \asymp q^k \lambda_k \qquad (1 \leqslant y \leqslant (M-r)/q). \qquad \text{(Uniforme en } r\text{)}$$

$\rightarrow$ Choisir q de sorte que $\frac{M}{q} \geqslant (q^k \lambda_k)^{-\beta}$.

Premières conséquences :

- Si $(\theta, \beta) \in \mathcal{V}_k$ et f "adaptée", alors

$$S_M \ll M\lambda_k^{\theta} + \lambda_k^{-(\beta-\theta)} \qquad (M \geqslant 1).$$

- Si $(\theta, \beta) \in \mathcal{V}_k$, alors

$$\Big(\frac{k\gamma - 1}{k\beta - 1}\theta, \gamma\Big) \in \mathcal{V}_k \qquad (\frac{1}{k} < \gamma \leqslant \beta).$$

Autres conséquences : sommes très courtes

- Soit $(\theta, \beta) \in \mathcal{V}_k$. Le nombre $\eta = \eta(\theta, \beta) := \frac{k(\beta-\theta)-1}{k\beta-1} \in [0, 1[$ est appelé **l'indice** du couple.
- En écrivant $M = \lambda_k^{-1/k} R$, on obtient

$$\sum_{m \leqslant \lambda_k^{-1/k} R} \mathrm{e}(f(m)) \ll \lambda_k^{-1/k} R^{\eta} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant R \leqslant \lambda_k^{-\beta+1/k}.$$

Application : Soient $0 < A_1 < A_2$ fixés. Soit $\mathcal{F}(A_1, A_2)$ l'ensemble des $F : [1, 2] \to \mathbb{R}$ C^3 telles que $A_1 \leqslant F'''(x) \leqslant A_2$ pour $x \in [1, 2]$. Alors pour tout $\psi(N)$ tel que $\psi(N) \to +\infty$ $(N \to +\infty)$, on a

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(A_1, A_2)} \sum_{N < n \leqslant N + N^{1/3}\psi(N)} \mathrm{e}\Big(N^2 F\big(\frac{n}{N}\big)\Big) \ll_{A_1, A_2} N^{1/3} \psi(N)^{1/2}.$$

Nouvelles questions sous l'hypothèse de van der Corput

Si $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ est C^k telle que $0 < \lambda_k \leqslant |f^{(k)}(x)| \ll \lambda_k < 1$ sur $[1, M]$ alors

$$S_M(f) := \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_k M\lambda_k^{\theta_k} \text{ pour } M \geqslant \lambda_k^{-\beta_k}$$

avec $\theta_k = \dfrac{1}{2^k - 2}$ et $\beta_k = \dfrac{2^{k-1}}{2^k - 2}$.

Question 1 : *Peut-on remplacer β_k par un exposant plus petit ?*

Question 2 : *Peut-on remplacer θ_k par un exposant plus grand ?*

Question 3 : *Existe-t-il une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strictement croissante telle que $\varphi(t) \to +\infty$ as $t \to +\infty$ et $\gamma_k > 0$ tels que*

$$\frac{1}{H} \sum_{h \asymp H} \Big| \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\Big(\frac{h}{H} f(m)\Big) \Big| \ll \frac{M\lambda_k^{\theta_k}}{\varphi(H)} \qquad (M \geqslant \lambda_k^{-\beta_k},\ 1 \leqslant H \leqslant \lambda_k^{-\gamma_k})?$$

Optimalité des résultats de van der Corput

Résultats de van der Corput pour f de classe C^2 telle que

$$|f''(x)| \asymp \lambda_2 > 0 \qquad (1 \leqslant x \leqslant M).$$

$$S_M(f) \ll M\lambda_2^{1/2} \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_2^{-1}.$$

L'exposant $1/2$ est optimal : exemple des **sommes de Gauss**,

$$\sum_{m=1}^{q} \mathrm{e}(m^2/q) = \frac{1}{2}(1+i^{-q})(1+i)q^{1/2}.$$

Van der Corput : $k = 2$ en moyenne

- $R_M(f) := \{m \in [1, M] \cap \mathbb{Z} \colon f(m) \in \mathbb{Z}\}$
- $R_M(f) \ll \dfrac{M}{H} + \dfrac{1}{H} \displaystyle\sum_{h=1}^{H} \Big| \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(hf(m)) \Big| \qquad (H \geqslant 1)$
- Conséquence du résultat de van der Corput

$$R_M(f) \ll M\lambda_2^{1/3} \quad \text{pour } M \geqslant \lambda_2^{-2/3}.$$

Théorème (OR 2015) Pour une infinité d'entiers M, il existe une fonction $g : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g''(x) \asymp \lambda_2 := \frac{1}{M}$ pour $x \in [1, M]$ et un entier $H \asymp M^{1/2}$ tel que

$$\frac{1}{H} \Big| \sum_{h \asymp H} \Big(1 - \frac{h}{H}\Big) \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}\Big(\frac{h}{H} g(m)\Big) \Big| \gg M\lambda_2^{1/2},$$

(Résultat très proche d'un résultat de Grekos 1988)

Van der Corput : $k = 3$

- Résultats de van der Corput pour f de classe C^3 telle que
$$|f'''(x)| \asymp \lambda_3 \; (1 \leqslant x \leqslant M).$$
$$S_M \ll M\lambda_3^{1/6} \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_3^{-2/3}$$
- Sargos(95) et Gritsenko (96) (indépendamment)
$$S_M \ll M\lambda_3^{1/6} \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_3^{-1/2}.$$
- L'exposant $1/6$ est optimal pour $M \asymp \lambda_3^{-2/3}$: on a
$$\Big|\sum_{m \asymp M} \mathrm{e}\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}} m^{3/2}\Big)\Big| \asymp M^{3/4} \asymp M\lambda_3^{1/6}.$$

En effet, pour $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}$, on a $f^*(y) = -y^3$ dans la transformation B.

Van der Corput : $k = 3$ sommes longues

$$|f'''(x)| \asymp \lambda_3 \; (1 \leqslant x \leqslant M).$$

$$S_M \ll M\lambda_3^{1/6} \quad \text{pour} \quad M \geqslant \lambda_3^{-2/3}$$

- L'exposant $1/6$ est conjecturé optimal sans hypothèse supplémentaire (Sargos 1995) pour $M \geqslant \lambda_3^{-1}$.
- Ajout d'une hypothèse : Sargos (1995) a conjecturé que si $f^{(3)}$ est monotone, alors l'exposant $1/6$ n'est plus optimal.

Théorème (OR 2005)

Si $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ est de classe C^3 telle que $|f'''(x)| \asymp \lambda_3$ $(1 \leqslant x \leqslant M)$, et si f''' est monotone, alors

$$S_M \ll M\lambda_3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{1354}} \text{ pour } M \geqslant \lambda_3^{-1}.$$

Pour $0 < \alpha < \beta$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}_3(\alpha,\beta)$ des fonctions $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telles que $\alpha \leqslant F'''(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in [1,2]$.

- *Conséquence du résultat de van der Corput (dérivée 3e).* Il existe $C(\alpha,\beta) > 0$ tel que

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_3(\alpha,\beta)} \Big| \sum_{M < m \leqslant 2M} e\Big(M^2 F\big(\frac{m}{M}\big)\Big)\Big| \leqslant C(\alpha,\beta) M^{5/6} \qquad (M \geqslant 1).$$

- **Question ouverte** : a-t-on

$$\limsup_{M \to +\infty} \frac{1}{M^{(5/6)-\varepsilon}} \sup_{F \in \mathcal{F}_3(\alpha,\beta)} \Big| \sum_{M < m \leqslant 2M} e\Big(M^2 F\big(\frac{m}{M}\big)\Big)\Big| > 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$?

Van der Corput : $k = 3$ en moyenne

On pose

$$\tilde{S}(M,H) = \frac{1}{H}\sum_{h=H+1}^{2H}\left|\sum_{m=1}^{M}\mathrm{e}\left(\frac{h}{H}f(m)\right)\right|$$

Théorème (OR-Sargos,2003)

Si f de classe C^3 telle que $|f'''(x)| \asymp \lambda_3$ $(1 \leqslant x \leqslant M)$, alors

$$\tilde{S}(M,H) \ll_\varepsilon M^\varepsilon \left(\frac{M\lambda_3^{1/6}}{H^{1/9}} + M\lambda_3^{1/5} + M^{3/4}\right) + \lambda_3^{-1/3}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Van der Corput : $k = 4$

- f de classe C^4 telle que $|f^{(4)}(x)| \asymp \lambda_4$ $(1 \leqslant x \leqslant M)$.

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll M\lambda_4^{1/14}, \qquad M \geqslant \lambda_4^{-4/7}$$

- **Théorème**(OR-Sargos,2002) Sous la même hypothèse, on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_\varepsilon M^{1+\varepsilon}\lambda_4^{1/13}, \qquad M \geqslant \lambda_4^{-8/13}$$

- **Théorème**(OR, 2014) Sous les mêmes hypothèses, on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_\varepsilon M^{1+\varepsilon}\lambda_4^{1/12}, \qquad M \geqslant \lambda_4^{-1}$$

(Pour ce dernier, la preuve utilise le résultat de Wooley (2014) pour le système de Vinogradov avec $k = 3$).

Théorème (OR 2015). Soit $k \geqslant 4$, et $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $|f^{(k)}(x)| \asymp \lambda_k$ pour $x \in [1, M]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_{\varepsilon,k} M^{1+\varepsilon} \lambda_k^{\Theta_k} \text{ pour } M \geqslant \lambda_k^{-1}$$

où l'on a posé $\Theta_k = \frac{1}{2(k-1)(k-2)}$.

Rappel : exposant de van der Corput : $\theta_k = \frac{1}{2^k-2}$. La preuve utilise

les résultats de Wooley (Congruences efficaces, 2014) concernant

$$J_{s,k}(N) = \int_{[0,1]^k} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}\left(x_1 n + x_2 n^2 + \cdots + x_k n^k\right) \right|^{2s} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Le système de Vinogradov

L'intégrale $J_{s,k}(N)$ compte le nombre de solutions du système

$$\sum_{i=1}^{s} m_i^r = \sum_{i=1}^{s} n_i^r \qquad (1 \leqslant r \leqslant k), \qquad (1 \leqslant m_i, n_i \leqslant N).$$

Heuristique : $J_{s,k}(N) \ll_{s,k,\varepsilon} N^{\varepsilon}\left(N^s + N^{2s-\frac{1}{2}k(k+1)}\right) \quad (N \geqslant 1)$

(Valeur cruciale : $s = \frac{1}{2}k(k+1)$)

Historique :

- Vinogradov 1935 $\rightarrow$ Karatsuba 1973, Stechkin 1975 : vrai pour $s \geqslant 3k^2(\log k + O(\log\log k))$
- Arkhipov, Chubarikov, Karatsuba (1987) : remplace le 3 par 2.
- Wooley (92-96) : $s \geqslant k^2(\log k + 2\log\log k + O(1))$
- Wooley (10-15) : $s \geqslant k(k+1)$ et $s \leqslant \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{3}k - 8k^{2/3}$
- Wooley (14) $k = 3$ avec $s \geqslant 1$

Grandes valeurs de k : utilisation des résultats de Wooley, puis Bourgain, Demeter & Guth

Théorème (Bourgain, Demeter & Guth, 2016). La majoration

$$J_{s,k}(N) \ll_{s,k,\varepsilon} N^{\varepsilon}\left(N^s + N^{2s-\frac{1}{2}k(k+1)}\right) \qquad (N \geqslant 1)$$

est valide pour tout $k \geqslant 2$ et tout $s \geqslant 1$.

Théorème(Heath-Brown 2016). Soit $k \geqslant 4$, et $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $|f^{(k)}(x)| \asymp \lambda_k$ pour $x \in [1, M]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \ll_{\varepsilon,k} M^{\varepsilon}\left(M\lambda_k^{\Theta_k} + M^{1-\Theta_k} + M^{1-2\Theta_k}\lambda_k^{-2\Theta_k/k}\right).$$

avec $\Theta_k = \frac{1}{k(k-1)}$.

$\to$ Utilise le résultat de Wooley (2014) pour $k = 4$, et le résultat de Bourgain, Demeter & Guth (2016) pour $k \geqslant 5$.