Groupes de Coxeter:

On désigne par W un groupe d'élément neutre 1, et par S un sous-ensemble générateur de W tel que $S = S^{-1}$ et $1 \notin S$. Tout élément de W est produit d'une suite finie d'éléments de S.

1- Longueur et décompositions réduites:

Définition 1:

Soit $w \in W$, on appelle longueur de w (% à S), et l'on note $\ell_S(w)$ (ou $\ell(w)$), le plus petit entier $q \geq 0$ tel que w soit produit d'une suite de q éléments de S.
On appelle décomposition réduite de w (% à S) toute suite $s = (s_1, ---, s_q)$ d'éléments de S telle que $w = s_1 .... s_q$, et $q = \ell(w)$.

Proposition: 1:

Soient w et w' dans W. On a les formules:

(1) $\ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$

(2) $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$

3) $|\ell(w) - \ell(w')| \leq \ell(ww'^{-1})$

2- Groupes diédraux:

Définition: 2:

On appelle groupe diédral tout groupe engendré par deux éléments d'ordre 2, distincts.

Définition : 3 :

1- Soit H et K deux groupes et f un morphisme de K dans le groupe $Aut(H)$ des automorphismes de H, étant donnés, on peut définir le produit semi-direct externe G de H et K suivant f comme le produit cartésien de H et K muni de :

$(h_1, k_1)\cdot(h_2, k_2) = (h_1 f(k_1)(h_2), k_1 k_2)$ où l'inverse d'un élément (h, k) est $(f(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1})$.

$$G = H \rtimes_f K$$

$$\left(Ex : K \circlearrowright H \ , \ \forall x \in K, f_x \in Aut(H) \ . \ f : K \longrightarrow Aut(H) \right)$$

2- Le Produit semi-direct interne d'un sous-groupe normal H par un sous-groupe K sii : $H \cap K = \{1\}$ et $G = H \cdot K$.

Exemple : (groupe diédral)

Soit $M = \{-1, 1\}$ le groupe multiplicatif et soit $m \in \mathbb{N} \geq 2$ (resp. $m = \infty$). On fait opérer M sur le groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}$) par $(-1)\cdot x = -x$ et $D_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes M$.

Proposition : 2 :

On suppose que $S = \{s, s'\}$ t.q. $s \neq s'$ et s, s' d'ordre 2.

(i) Le sous-groupe P de W engendré par $p = ss'$ est distingué et W est produit semi-direct du sous groupe $T = \{1, s\}$ et de P. De plus on a $(W : P) = 2$.

(ii) Soit m l'ordre (fini ou non) de p. On a $m \geq 2$ et W est d'ordre $2m$. IL existe un unique isomorphisme φ de D_m sur W tel que $\varphi(\rho) = s$ et $\varphi(\rho') = s'$. ρ et ρ' générateurs de D_m.

3- Premières propriétés des groupes de Coxeter :

À partir de maintenant, on suppose que les éléments de S sont d'ordre 2. $(\forall s \in S \; ; \; s^2 = 1)$

Définition : 4 :

Étant donner un groupe G et une application f de S dans G telle que $(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1 \quad \forall\, (s,s') \in I$.

On dit que l'ensemble S et les relations forment une <u>prestation</u> du groupe W s'il existe un homomorphisme g de W dans G prolongeant f. (Cet homomorphisme est unique car S engendre W)

Définition : 5 : Système de Coxeter

On dit que (W, S) est un système de Coxeter s'il satisfait à la condition suivante :

(C) : Pour s, s' dans S, soit $m(s,s')$ l'ordre de ss' ;
Soit I l'ensemble des couples (s,s') tels que $m(s,s') < \infty$.
L'ensemble générateur S et les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ pour $(s,s') \in I$ forment une préstation du groupe W.

Exemple :

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n, avec $n \geq 2$.
soit s_i la transposition de i et $i+1$ $= (i \;\; i+1) \quad \forall \; 1 \leq i \leq n$.
On peut montrer que $(\mathfrak{S}_n, S)$ est un système de Coxeter.
$S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$.

4- Décomposition réduites dans un groupe de Coxeter:

Supposons que (W, S) soit un système de Coxeter.

Soit T l'ensemble des conjugués des éléments de S dans W.
Pour toute suite finie $s = (s_1, \dots, s_q)$ d'éléments de S, on note $\Phi(s)$ la suite $(t_1, \dots, t_q)$ d'éléments de T, définie par:
$t_j = (s_1 \dots s_{j-1})\, s_j\, (s_1 \dots s_{j-1})^{-1} \quad 1 \le j \le q.$

Lemme : 1:

Soient $w \in W$ et $s \in S$ t.q. $\ell(sw) \le \ell(w)$
Pour toute suite $(s_1, \dots, s_q)$ d'éléments de S avec $w = s_1 \dots s_q$, il existe un entier j t.q. $1 \le j \le q$ et
$s s_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots s_{j-1} s_j$

5- La condition d'échange:

On désigne sous le nom de "condition d'échange" l'assertion suivante sur (W, S): **Lemme : 1:**

(E): Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $\ell(sw) \le \ell(w)$
Pour toute décomposition réduite $(s_1, \dots, s_q)$ de w, il existe un entier j t.q. $1 \le j \le q$ et $s s_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots s_{j-1} s_j$

Remarque:
On suppose que (W, S) satisfait (E), d'après le lemme il en est ainsi si (W, S) est un système de Coxeter.

Proposition: 3 :

Soient $s \in S$, $w \in W$ et $s = (s_1, \dots, s_q)$ une décomposition réduit de w. Deux cas seulement sont possibles :

(a) $\ell(sw) = \ell(w) + 1$ et $(s, s_1, \dots, s_q)$ une décomp. réduite de sw.

(b) $\ell(sw) = \ell(w) - 1$ et $\exists j$ t.q. $1 \leq j \leq q$ et que

$(s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_q)$ une décomposition réduite de sw et que la suite $(s, s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_q)$ soit une décomp. réduite de w.

5. Caractérisation des groupes de Coxeter:

Théorème :

Pour que (W, S) soit un système de Coxeter, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition d'échange (E).

6. Matrices et graphes de Coxeter:

Définition : 6 :

Soit I un ensemble. On appelle matrice de Coxeter de type I toute matrice carrée sym. $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ dont les éléments sont des entiers ou $+\infty$ satisfaisant aux relations $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

. $m_{ii} = 1 \quad \forall i \in I$. $m_{ij} \geq 2 \quad \forall i \neq j \in I$.

On appelle graphe de Coxeter de type I un couple formé d'un graph Γ ayant I comme ensemble de sommets et d'une application f de l'ensemble des arêts du ce graphe dans l'ensemble formé de $+\infty$ et des entiers ≥ 3.

On dit que Γ est le graphe sous-jacent au graphe de Coxeter (Γ, f).

A toute matrice de Coxeter M de type I, on associe un graphe de Coxeter (Γ, f) de la manière suivante.
Le graphe Γ a pour ensemble de sommets I et pour ensemble d'arêtes les parties $\{i,j\}$ de I telles que $m_{ij} \geq 3$.
l'application f associe à l'arête $\{i,j\}$ l'éléments correspondant m_{ij} de M.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Matrices de} \\ \text{Coxeter} \\ \text{de type } I \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Graphes de} \\ \text{Coxeter} \\ \text{de type } I \end{array} \right\}$$

Il revient au même de dire que $S \neq \emptyset$ et qu'il n'existe pas de partition de S en deux ensembles S' et S'' distincts tels que tout élément de S' commute avec tout élément de S''.

$$S \neq \emptyset \iff \nexists S = S' \cup S'' \,;\, \forall s' \in S', s'' \in S'' \text{ t.q. } s's'' = s''s'$$

Si (W, S) est un s.d.c., la matrice $M = (m(s,s'))_{s,s' \in S}$ où $m(s,s')$ est l'ordre de ss', est une matrice de Coxeter de type S, que l'on appelle la matrice de (W,S).

Le graphe de Coxeter (Γ, f) associé à M s'appelle le graphe de Coxeter de (W,S). Remarquons que deux sommets s et s' de Γ sont liés si et seulement si s et s' ne commutent pas.

Exemple:

. La matrice de Coxeter d'un groupe diédral d'ordre $2m$ est $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ et son graphe de Coxeter est représenté par.

* $\circ \overset{m}{\text{———}} \circ$ si $m \geq 3$

* $\circ\text{———}\circ$ si $m = 3$

* $\circ\ \ \circ$ si $m = 2$

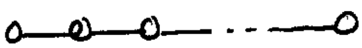
. Le graph de Coxeter du groupe sym. $\mathfrak{S}_n$ est représenté par : $\circ\text{—}\circ\text{—} \cdots\ \circ\text{—}\circ$ ($n-1$ sommets).

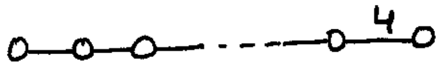
Définition 7 :

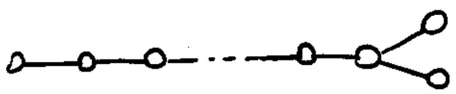
On dit qu'un système de Coxeter (W, S) est irréductible, si le graphe Γ sous-jacent au graphe de Coxeter associé est connexe et non vide.

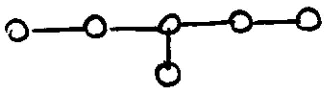
Théorème :

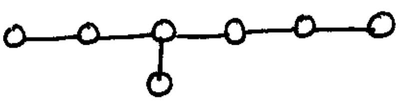
Si (W, S) est un système de Coxeter fini irréductible, son graphe de Coxeter est isomorphe à l'une des suivants :

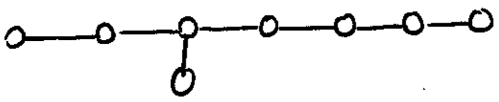
A_ℓ :  ($\ell \geq 1$ sommets)

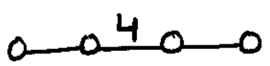
B_ℓ :  ($\ell \geq 2$ sommets)

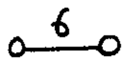
D_ℓ :  ($\ell \geq 4$ sommets)

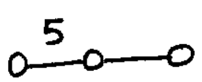
E_6 : 

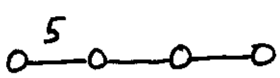
E_7 : 

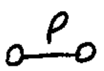
E_8 : 

F_4 : 

G_2 : 

H_3 : 

H_4 : 

$I_2(p)$:  ($p = 5$ ou $p \geq 7$)